Подписано к печати I4/УI.I963г.№ МН028I9
Формат бумаги 60 х 84 I/I6 Печ.л.0,5

Зак.22I. Тир.200.

Отпечатано на ротопринте НГУ.

Институт ядерной физики СО АН СССР

Препринт

А.М.Фридман

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск,
1963 г.

А.М.ФРИДМАН

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

I. Недавний учет диссипативных эффектов (конечная проводимость) привел к обнаружению неустойчивости в неоднородной плазме, в результате которой плазма быстро диффундирует поперек магнитного поля с коэффициентом диффузии порядка бомовского/I/. При этом в ранее проводимых исследованиях (см.,например,/I/,/2/,/4/) делалось существенное различие между "высокотемпературным" пределом (когда столкновениями можно пренебречь) и относительно "холодной" плазмой, когда частые столкновения обеспечивают применимость гидродинамического описания. Первый случай описывался кинетическими уравнениями для ионов и электронов, второй, соответственно, уравнениями гидродинамики.

Однако, экспериментальный материал, накопленный в физике устойчивости плазмы в последнее время, требует рассмотрения и "промежуточного" случая,т.е. такого,когда движение электронов описывается гидродинамически, в то время как ионы уже должны быть описаны кинетически.

Данное исследование проведено для неоднородной изотермической плазмы в сильном магнитном поле($H^2 >> 8\pi P$, где P -давление плазмы). В неоднородной плазме, в отличие от однородной, диэлектрические свойства могут существенно измениться даже при появлении небольших пространственных градиентов. Здесь появляются ветви колебаний,фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью электронов в магнитном поле за счет градиентов плотности. Ниже будет идти речь именно о таких волнах.

2. Ограничимся случаем, когда $k_\perp \tau_e << 1$ (где $k_\perp$ -волновой вектор волны возмущения,перпендикулярный направлению магнитного поля, τ_e - длина свободного пробега электронов), т.е. длина волн возмущений много больше длины свободного пробега электронов.

Пусть плотность частиц n зависит только от x , а магнитное поле $\vec{H}$ направлено по оси z . Как и в работах/I-4/, возмущения выберем в виде $\sim exp(i\vec{k}\vec{x} + i\omega t)$. Наложим на стационарное распределение плазмы малое возмущение,которое предположим потенциальным ($\omega << k_z V_A$), т.е.

$$\delta E_i = - i k_i \delta \varphi \tag{I}$$

Также считаем, что справедливо условие квазинейтральности

$$n_e = n_i(E) = n \tag{2}$$

Исследование проводится для области "промежуточных" частот ($v_{T_i} << \frac{\omega}{k} << v_{T_e}$; v_{T_e}, v_{T_i}- тепловые скорости электронов и ионов), для которых,как известно /I/,/4/ имеет место неустойчивость в отсутствии градиента температуры.

Движение электронов изотермической плазмы в системе координат, где $E_{ox} = 0$, будет описываться тогда следующей гидродинамической системой уравнений:

$$- i k_z n T_o - c n_o \delta E_z - \nu m_e v_z n_o = 0 \tag{3}$$

$$- i \omega n + i k_z v_z n_o + c \frac{\delta E_y}{H} n_o'(x) = 0 \tag{4}$$

где невозмущенные величины отмечены индексом "0" , величины без индексов суть значения соответствующих величин в некоторый момент времени после включения возмущения; уравнение(3) - уравнение движения электронов по оси в пренебрежении инерции электронов;

ν - частота электрон-ионных столкновений (таким образом, последний член в уравнении (3) описывает силу трения).

Уравнение (4) есть уравнение непрерывности для электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\, \vec{v} n = 0$$

Значения v_z из уравнения (4) подставляем в уравнение (3). Тогда для плотности электронов n_e получаем выражение:

$$n_e = \frac{ien_0 k_z \delta\varphi - \frac{ic\nu m_e n_0'(x)}{k_z}\frac{\delta E_y}{H}}{ik_z T_0 - \nu m_e \frac{\omega}{k_z}} \qquad (5)$$

Движение ионов мы опишем кинетическим уравнением, которое имеет вид:

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + v_i \frac{\partial \delta f}{\partial \vec{r}} + \frac{e_i}{m_i c}\left[\vec{v}_i \vec{H}^{(0)}\right]\frac{\partial \delta f}{\partial \vec{v}} = -\frac{e_i}{m_i}\delta \vec{E} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \vec{v}_i} \qquad (6)$$

$f^{(0)}$ - максвелловская функция распределения по скоростям. (Далее в этом параграфе значок i будем опускать, имея в виду, что за исключением специальных оговорок, речь идет только об ионах). Воспользовавшись зависимостью возмущенных величин от координаты x и времени t в виде $\delta A = \widetilde{\delta A}\exp(i\vec{k}\vec{x} + i\omega t)$, после некоторых выкладок получим (см./3/):

$$\delta f = -\frac{e}{T}\delta\varphi(\vec{r})\left\{1 - \sum_{l,m}\frac{\omega + \frac{k_y T}{m\omega_H}\frac{d}{dx}}{\omega + k_\parallel v_\parallel - l\omega_H} J_l\left(\frac{k v_\perp}{\omega_H}\right) \times \right. \qquad (7)$$

$$\left. \times \exp\left\{il[\theta(t)+\varphi]\right\} J_m\left(\frac{k v_\perp}{\omega_H}\right)\exp\left\{im[\theta(t)+\varphi]\right\}\right\} f^{(0)}$$

где J_n - функция Бесселя действительного аргумента. По определению возмущение плотности есть:

$$n = \int \delta f \, dv_\parallel \, dv_\perp \qquad (8)$$

Используя условие квазинейтральности (2), уравнения (5), (7) и (8) в цилиндрических координатах получим:

$$\frac{ien_0 k_z \delta\varphi - \frac{ic\nu m_e n_0'(x)}{k_z}\frac{\delta E_y}{H}}{ik_z T_0 - \nu m_e \frac{\omega}{k_z}} = -\frac{em^{3/2}}{T}\delta\varphi(\vec{r})\int\frac{n_0}{(2\pi T)^{3/2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) dv_\parallel \, d\vec{\theta} \, v_\perp \, dv_\perp + \frac{em^{3/2}}{T}\delta\varphi(\vec{r})\int\frac{n_0}{(2\pi T)^{3/2}} \times \qquad (9)$$

$$\times \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right)\sum_{l,m}\frac{\omega + \frac{k_y T}{m\omega_H}\frac{d}{dx}}{\omega + k_\parallel v_\parallel - l\omega_H} J_l\left(\frac{k v_\perp}{\omega_H}\right)\exp\left\{il[\theta(t)+\varphi]\right\} \times$$

$$\times J_m\left(\frac{k v_\perp}{\omega_H}\right)\exp\left\{im[\theta(t)+\varphi]\right\} dv_\parallel \, d\vec{\theta} \, v_\perp \, dv_\perp$$

Уравнение (9) весьма сложно. Рассмотрим простые предельные случаи. Выберем "ветвь" $\omega \ll \omega_H$, тогда в уравнении (9) достаточно положить $l = 0$. В силу ортогональности бесселевых функций $m = 0$. После ряда вычислений приходим к дисперсионному уравнению

$$\frac{ik_\parallel - \frac{c\nu m_e k_y \ln' n_0}{e k_\parallel H}}{ik_\parallel T_0 - \nu m_e \frac{\omega}{k_\parallel}} = -\frac{1}{T}\left\{1 - F\left(1 + \frac{\omega_n}{\omega}\right)\right\} \qquad (10)$$

где

$$F(k_\perp^2) = I_0\left(\frac{k^2 T}{\omega_H^2 m}\right)\exp\left(-\frac{k^2 T}{\omega_H^2 m}\right) \qquad (11)$$

I_0 - функция Бесселя от мнимого аргумента.

Уравнение (I0) легко приводится к виду:

$$\frac{1+i\,\frac{\nu\,\omega_n}{K_{\parallel}^2\,v_{T_e}^2}}{1+i\,\frac{\nu\,\omega}{K_{\parallel}^2\,V_{T_e}^2}} = F\left(1+\frac{\omega_n}{\omega}\right)-1 \qquad (I1)$$

откуда определяем

$$\omega = \frac{\omega_n F}{2-F+i\,\frac{\nu}{K_{\parallel}^2\,V_{T_e}^2}(\omega_n-\omega)} \qquad (I2)$$

Из формулы (I2) находим инкремент нарастания неустойчивости :

$$\gamma = -\frac{\nu\,\omega_n F(\omega_n-\omega)}{K_{\parallel}^2(2-F)^2\,V_{T_e}^2} \qquad (I3)$$

Т.к. при $K\tau_i >> 1,\ \omega < \omega_n$, то $\gamma < 0$, что говорит о наличии неустойчивости.

3. Используя связь коэффициента диффузии с инкрементом и длиной волны /4/, оценим коэффициент диффузии для нашей модели. Максимум инкремента плазмы достигается при $\gamma \sim \omega$. $K_{\parallel}$ не может быть очень малым. Используемые в работе ограничения снизу на $K_{\parallel}$:

$$\frac{\omega}{K_{\parallel}} < V_A,\ v_e \qquad (I4)$$

требуют в случае $\beta < \frac{m_e}{m_i}$ выполнения условия

$$(K_{\parallel})_{min} \sim \frac{\omega}{v_e} \qquad (I5)$$

в случае же $1 > \beta > \frac{m_e}{m_i}$

$$(K_{\parallel})_{min} \sim \frac{\omega}{V_A} \qquad (I6)$$

Условия (I6) и (I7) дадут, соответственно, и два значения:

$$K\tau_i \sim \frac{\omega}{\nu} \qquad (I7)$$

$$K\tau_i \sim \left(\frac{\beta m_i}{m_e}\right)\frac{v_{T_i}}{R\nu}\,\frac{n'}{n} \qquad (I8)$$

Следуя обзору /4/: выпишем коэффициент диффузии

$$\mathcal{D} \sim \tau_i^2\,\frac{\gamma^2}{\omega}\,\frac{1}{K\tau_i} \qquad (I9)$$

выведенный для случая почти апериодической неустойчивости $\gamma \sim \omega$.

Подставляя сюда инкремент нарастания (I3) и последовательно два значения длин волн пульсаций (I8) и (I9), получим два выражения для нашего коэффициента диффузии:

$$\mathcal{D}_1 \sim \frac{\tau_i}{R}\,\frac{\nu}{\omega}\,\mathcal{D}_Б \qquad \left(\beta < \frac{m_e}{m_i}\right) \qquad (20)$$

$$\mathcal{D}_2 \sim \frac{\nu}{\omega}\,\frac{m_e\tau_i}{m_i R\beta}\,\mathcal{D}_Б \qquad \left(1 > \beta > \frac{m_e}{m_i}\right) \qquad (21)$$

Эти формулы справедливы в тех случаях, когда поведение плазмы действительно можно описать системой уравнений (3),(4) и (6).

Гидродинамическое описание движения электронов возможно, когда длина волны возмущения $\lambda_{\parallel}$ больше длины свободного пробега вдоль магнитного поля : $\frac{2\pi}{K_{\parallel}} > \lambda_c$,т.е.

$$\frac{\nu}{\omega} > \sqrt{\frac{m_i}{m_e}\beta}$$

С другой стороны пренебрежение столкновениями в кинетическом уравнении для ионов возможно лишь когда характерное время нарастания возмущения $\frac{1}{\gamma}$ меньше времени между ион-ионными столкновениями:

$$\gamma > \nu\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \tag{22}$$

(т.к. $\frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{m_i}{n_e}} \sim \frac{1}{\nu_{i_i}}$).

В заключение автор благодарит А.А.Галеева и Р.З.Сагдеева за внимание,проявленное к работе, и И.О.Форескина за стимулирующие дискуссии.

Литература:

I С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 44, 2 (I963)

2.А.А.Галеев, В.Н.Ораевский,Р.З.Сагдеев,ЖЭТФ,44,3 (I963)

3. M. N. Rosenbluth, N. A. Krall, N. Rostoker, Nuclear Fusion, Suplement, Part 1, S. 75(1962)

4.А.А.Галеев,С.С.Моисеев,Р.З.Сагдеев , Атомная энергия,в печати.