З 36

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Г.М.Заславский, С.С.Моисеев,
В.Н.Ораевский

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЫ.

Гор. Новосибирск

1963 г.

Р Е З Ю М Е

Работа посвящена исследованию аномальной диффузии слабоионизованной плазмы в сильном магнитном поле, Учитывается конечная проводимость плазмы и движение частиц вдоль магнитного поля. В линейном приближении задачи получены инкременты неустойчивостей. Проведен предельный переход к сильно ионизованной плазме. Характерной особенностью рассмотренных неустойчивостей является малость инкремента по сравнению с частотой. Это позволило в нелинейном приближении записать квазилинейное уравнение для плазмы и кинетическое уравнение для волн возмущения. Вычислен столкновительный член взаимодействующих волн. Получен коэффициент аномальной диффузии.

I. В настоящее время достигнут существенный прогресс в исследовании влияния диссипативных эффектов на устойчивость неоднородной плазмы. Показано, что учет конечной проводимости и теплопроводности может привести к неустойчивости /I-4/. При этом особую роль играют ветви колебаний, фазовая скорость которых совпадает с дрейфовой скоростью плазмы в магнитном поле за счет градиентов давлений -"дрейфовые волны" (см., например, /1/). Детальное исследование аномалий в явлениях переноса, возникающих из-за неустойчивостей, встречает большие трудности. Одной из них является трудность, характерная для гидродинамического описания плазмы и связанная с тем, что инкремент развития неустойчивости больше или порядка частоты. Это обстоятельство не позволяет воспользоваться квазилинейным приближением /5/ и кинетическим уравнением для волн /6/. Настоящая работа посвящена исследованию аномальной диффузии слабоионизованной плазмы. При этом оказывается, что в ряде случаев инкремент развития неустойчивости много меньше частоты. Это обстоятельство позволяет дать более корректный вывод коэффициента диффузии.

2. Мы будем пользоваться следующими предположениями: I) температура ионов мала по сравнению с температурой электронов ($T_i \ll T_e$, индекс „i" нумерует ионы, индекс „e" -электроны, „o" -нейтральный газ); 2) квазинейтральность ($n_i = n_e$; $\delta n_i = \delta n_e$. Под δa подразумевается возмущение величины a); 3) потенциальность возмущений ($\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$) ; 4) температура электронов постоянна.

Наряду со столкновениями электронов и ионов с нейтральным газом учтем также электрон-ионные столкновения для сравнения результатов со случаем полностью ионизованной плазмы. Система уравнений двухжидкостной гидродинамики и уравнений Максвелла в сделанных предположениях принимает вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(n\vec{v}) = 0 \qquad (1)$$

$$en\vec{E} + \frac{en}{c}[\vec{v}_e \vec{H}] + \vec{\nabla} P_e - \frac{en}{\sigma}(\vec{j}_\parallel + 2\vec{j}_\perp) + mn\nu_{eo}\vec{v}_e = 0 \qquad (2)$$

$$Mn\left(\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \vec{\nabla})\vec{v}_i\right) = en\vec{E} + \frac{en}{c}[\vec{v}_i \vec{H}] - Mn\nu_{io}\vec{v}_i \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \qquad (4)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \qquad (5)$$

где m и M - соответственно масса электронов и ионов; $j_\parallel$, $j_\perp$ - токи вдоль и поперек магнитного поля; ν_{eo} , ν_{io} - частоты столкновений электронов и ионов с нейтральным газом; σ - проводимость вдоль $\vec{H}$ за счет электрон-ионных столкновений.

Выбирая возмущения в виде:

$$\delta a = \delta a(x) \cdot \exp i(yk_y + zk_z + \omega t)$$

(неоднородность вдоль оси x , магнитное поле направлено вдоль z) и линеризуя систему (I)-(5) получаем следующее уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\delta E_y - k_y^2\left\{1 + \frac{\omega_s}{(\nu_{oi} + i\omega)\left[a - i\frac{k_z^2 v_e^2}{\omega\nu_e} - i\frac{k_z^2 v_i^2}{\omega(\nu_{oi} + i\omega)}\right]} \cdot \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega} - i\frac{k_z^2 v_i^2}{\omega(\nu_{oi} + i\omega)}\right)\right\}\delta E_y = 0 \qquad (6)$$

где ν_e - частота столкновения электронов с ионами,

$$\omega_s = \frac{k_z^2}{k_y^2}\frac{\Omega_i^2}{\nu_e}\frac{M}{m}; \quad \Omega_i = \frac{eH}{Mc}$$

$$v_i^2 = T_e/M; \quad v_e^2 = T_e/m; \quad a = 1 + \frac{\nu_{oe}}{\nu_e} \qquad (7)$$

$$\omega_e = \frac{cT_e}{eH}\frac{n'}{n}k_y; \quad n' \equiv \frac{dn}{dx}.$$

При выводе уравнения (6) мы, естественно, пренебрегаем членами порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$.

Анализ уравнения (6), имеющего вид уравнения Шредингера с комплексным потенциалом V, вполне аналогичен анализу, проведенному, например, в /7/. В случае сильно ионизованной плазмы при $\omega_s \ll \omega$ из (6) следует, что в ВКБ-приближении $k_y \sim k_x$ и качественно правильный результат получается из условия $V \approx 0$:

$$1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2} + i\frac{\omega}{\omega_s}\left(1 - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2}\right) = 0 \qquad (8)$$

Здесь также учтено, что $k_\perp r_i \ll 1$ $(k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2;\ r_i = v_i/\Omega_i)$.
Для нарастающих ионно-звуковых колебаний имеем из (8):

$$Re\,\omega \sim k_z v_i;\quad Im\,\omega \sim -\frac{\omega_s \omega_e}{k_z v_i}. \qquad (9)$$

Если $\omega_s \gg \omega$, то $k_x^2 \sim k_y^2 \frac{\omega_s}{\omega}$, а собственные частоты находятся из условия $Im\,V = 0,\ Re\,V = k_x^2$. Это дает для ионно-звуковых колебаний: $Im\,\omega = -\omega_e$. В случае $\omega_e \gg k_z v_i$ получаем результат работы /3/: $Re\,\omega \sim -Im\,\omega \sim \omega_e$. Перейдем теперь к слабо ионизованной плазме.

Из (6) имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2}\delta E_y - k_y^2\left\{1 + \omega_s \cdot \frac{1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{i k_z^2 v_i^2}{\omega(i\omega + \nu_{0i})}}{(i\omega + \nu_{0i})\left(a - i\frac{k_z^2 v_e^2}{\omega \nu_e}\right)}\right\}\delta E_y = 0 \qquad (10)$$

Здесь использовалось неравенство

$$\nu_{0i} \gg \nu_e \frac{m}{M} \qquad (11)$$

Для $\nu_{0i} \gg \omega$ получаем из (10) следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - i\omega\left\{\nu_{0i} + \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} + \Omega_s - \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}^2}\right\} - \left\{\frac{k_z^2 v_e^2 \nu_{0i}}{\nu_{0e}} - i\omega_e\Omega_s + \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}}\right\} = 0 \qquad (12)$$

Здесь $\Omega_s = \left(\frac{k_z}{k_\perp}\right)^2 \frac{\Omega_i^2}{\nu_{0e}} \frac{M}{m}$

Если $\omega_s \gg \nu_{0i}$, то ограничиваясь случаем

$$k_\perp^2 v_i^2 \ll \Omega_i^2,\quad k_z v_i \ll \nu_{0i}$$
$$\left(k_x^2 \sim k_y^2 \frac{\omega_s}{\nu_{0i}}\right) \qquad (13)$$

имеем для неустойчивого корня уравнения (12)

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_e - i\frac{\omega_e^2}{4\nu_{0i}} + i\frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}}\right) \qquad (14)$$

Из (12) и (14) видно, что продольное движение частиц стабилизирует неустойчивость. В случае

$$\omega_s \ll \nu_{0i};\quad k_\perp^2 v_i^2 < \Omega_i^2 \qquad (15)$$

получаем из (12):

$$Re\,\omega = \frac{\Omega_s \omega_e}{\nu_{0i}};\quad Im\,\omega = \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} - \frac{\Omega_s^2 \omega_e^2}{\nu_{0i}^3} \qquad (16)$$

Из (16) имеем условие неустойчивости:

$$\frac{\Omega_s^2 \omega_e^2}{\nu_{0i}^3} > \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} \qquad (17)$$

Для максимального инкремента ($\Omega_s \lesssim \nu_{0i}$), учитывая также, что радиус плазменного шнура определяется классической диффузией (если только он поддерживается заданным в силу условий эксперимента) из (17) получим следующее условие неустойчивости:

$$\Omega_i^2 > \nu_{0i}^2 \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{L_z^2}{\ell_e^2} \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0e}} \qquad (18)$$

где ℓ_e - длина свободного пробега электронов, а L_z - продольный размер системы, σ_{0i}, σ_{0e} - соответственно эффективные сечения соударений ионов и электронов с нейтралами.

При выводе уравнения (6) мы, естественно, пренебрегаем членами порядка $\sqrt{\frac{m}{M}}$.

Анализ уравнения (6), имеющего вид уравнения Шредингера с комплексным потенциалом V, вполне аналогичен анализу, проведенному, например, в /7/. В случае сильно ионизованной плазмы при $\omega_s \ll \omega$ из (5) следует, что в ВКБ-приближении $k_y \sim k_x$ и качественно правильный результат получается из условия $V \approx 0$:

$$1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2} + i\frac{\omega}{\omega_s}\left(1 - \frac{k_z^2 v_i^2}{\omega^2}\right) = 0 \tag{8}$$

Здесь также учтено, что $k_\perp z_i \ll 1$ $(k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2 ;\ z_i = v_i/\Omega_i)$.

Для нарастающих ионно-звуковых колебаний имеем из (8):

$$Re\,\omega \sim k_z v_i ;\quad Im\,\omega \sim -\frac{\omega_s \omega_e}{k_z v_i} \tag{9}$$

Если $\omega_s \gg \omega$, то $k_x^2 \sim k_y^2 \frac{\omega_s}{\omega}$, а собственные частоты находятся из условия $Im\,V = 0,\ Re\,V = k_x^2$. Это дает для ионно-звуковых колебаний: $Im\,\omega = -\omega_e$. В случае $\omega_e \gg k_z v_i$ получаем результат работы /3/: $Re\,\omega \sim -Im\,\omega \sim \omega_e$. Перейдем теперь к слабо ионизованной плазме.

Из (6) имеем:

$$\frac{d^2}{dx^2}\delta E_y - k_y^2\left\{1 + \omega_s \cdot \frac{1 - \frac{\omega_e}{\omega} - \frac{i k_z^2 v_i^2}{\omega(i\omega + \nu_{0i})}}{(i\omega + \nu_{0i})\left(a - i\frac{k_z^2 v_e^2}{\omega \nu_e}\right)}\right\}\delta E_y = 0 \tag{10}$$

Здесь использовалось неравенство

$$\nu_{0i} \gg \nu_e \frac{m}{M} \tag{11}$$

Для $\nu_{0i} \gg \omega$ получаем из (10) следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 - i\omega\left\{\nu_{0i} + \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} + \Omega_s - \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}^2}\right\} - \left\{\frac{k_z^2 v_e^2 \nu_{0i}}{\nu_{0e}} - i\omega_e\Omega_s + \Omega_s\frac{k_z^2 v_i^2}{\nu_{0i}}\right\} = 0 \tag{12}$$

Здесь $\quad \Omega_s = \left(\frac{k_y}{k_\perp}\right)^2 \frac{\Omega_i^2}{\nu_{0e}}\frac{M}{m}$

Если $\omega_s \gg \nu_{0i}$, то ограничиваясь случаем

$$k_\perp^2 v_i^2 \ll \Omega_i^2 ,\quad k_z v_i \ll \nu_{0i} \tag{13}$$

$$\left(k_x^2 \sim k_y^2 \frac{\omega_s}{\nu_{0i}}\right)$$

имеем для неустойчивого корня уравнения (12)

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\omega_e - i\frac{\omega_e^2}{4\nu_{0i}} + i\frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}}\right) \tag{14}$$

Из (12) и (14) видно, что продольное движение частиц стабилизирует неустойчивость. В случае

$$\omega_s \ll \nu_{0i} ;\quad k_\perp^2 v_i^2 < \Omega_i^2 \tag{15}$$

получаем из (12):

$$Re\,\omega = \frac{\Omega_s \omega_e}{\nu_{0i}} ;\quad Im\,\omega = \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} - \frac{\Omega_s^2 \omega_e^2}{\nu_{0i}^3} \tag{16}$$

Из (16) имеем условие неустойчивости:

$$\frac{\Omega_s^2 \omega_e^2}{\nu_{0i}^3} > \frac{k_z^2 v_e^2}{\nu_{0e}} \tag{17}$$

Для максимального инкремента ($\Omega_s \lesssim \nu_{0i}$), учитывая также, что радиус плазменного шнура определяется классической диффузией (если только он поддерживается заданным в силу условий эксперимента) из (17) получим следующее условие неустойчивости:

$$\Omega_i^2 > \nu_{0i}^2 \sqrt{\frac{m}{M}}\frac{L_z^2}{\ell_e^2}\frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{0e}} \tag{18}$$

где ℓ_e – длина свободного пробега электронов, а L_z – продольный размер системы, σ_{0i}, σ_{0e} – соответственно эффективные сечения соударений ионов и электронов с нейтралами.

Прежде всего отметим, что поскольку в настоящей работе использовалось гидродинамическое приближение, то длина волны λ_z должна быть велика по сравнению с длиной свободного пробега заряженных частиц при соударениях с нейтральным газом. Это накладывает ограничение на рост k_z. Рассмотрим, однако, тот случай, когда при допустимых в гидродинамике k_z, ω_s может быть как меньше, так и больше ν_{oi}. В случае $\omega_s \ll \nu_{oi}$, используя (26), (17), а также то, что $k_x \sim k_y$ (см.(6)), видим, что $D(k)$ растет с ростом k_z и уменьшением k_y. Если $\omega_s \gg \nu_{oi}$, то $k_x^2 \sim k_y^2 \omega_s/(a\nu_{oi})$ и из (14) и (26) нетрудно показать, что $D(k)$ растет с ростом k_y и уменьшением k_z, т.е. $D(k)$ достигает максимума, когда $\nu_{oi} \sim \omega_s$. Учитывая это обстоятельство, а также то, что для исследуемых случаев

$$\omega_e \lesssim \nu_{oi}, \quad \left(\frac{1}{z_i} \geq k_y \geq k_o\right) \tag{27}$$

имеем из (26), используя (17)

$$D \sim \frac{k_o^2 \sigma_i^2}{\nu_{oi}\Omega_i} \frac{cT_e}{eH} \tag{28}$$

Заметим, что $\frac{k_o^2 \sigma_i^2}{\nu_{oi}\Omega_i}$ по крайней мере не превышает 1 и может быть существенно малой величиной.

Авторы благодарят Р.З.Сагдеева за ценные советы и обсуждение результатов работы.

Приложение.

Используем уравнение (I9) и (20) для нахождения матричного элемента $V_{kk'k''}$. Следуя /6/ величины $\delta\vec{E}$ и δn представим в виде:

$$\psi = \sum_k C_k(t)(\psi_k + \psi_k')e^{i(\vec{k}\vec{z} + \omega_k t)} + \sum_k C_{-k}(t)(\psi_{-k} + \psi_{-k}')e^{-i(\vec{k}\vec{z} + \omega_{-k} t)} \qquad (\text{I.П})$$

где

$$C_{-k} = C_k^*\ , \quad \psi_{-k} = \psi_k^*$$

В (I.П) к "вектору состояния" ψ_k добавлена ортогональная составляющая ψ_k', которая возникает из-за нелинейного взаимодействия.

Используя (I9), (20) и (I.П), из условия разрешимости системы относительно ψ_k' можно получить динамическое уравнение для амплитуды волны C_k:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = \sum_{k=k'+k''} C_{k'} C_{k''} V_{kk'k''} e^{i(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k)t} \qquad (2.\text{П})$$

В (I.П) и (2.П) амплитуды C_k нормированы следующим образом:

$$|C_k|^2 = \frac{\varepsilon_k}{\omega_k} \qquad (3.\text{П})$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{1}{8\pi}\left[k_z^2 + k_\perp^2\left(1 + \frac{\omega_{oi}^2}{\Omega_i^2}\right)\right]\cdot\frac{|E_{ky}|^2}{k_y^2} \qquad (4.2)$$

$$\omega_{oi}^2 = \frac{4\pi n e^2}{M}$$

Воспользовавшись неравенствами $\nu_{oi} \gg \omega, \omega_s\ ;\ k_y \gtrsim k_o$ получаем следующее выражение для величины матричного элемента:

$$V_{kk'k''} \simeq i\frac{c\omega_k}{Hk_y}(k_x'k_y'' - k_y'k_x'')\left(\frac{k_y'}{\omega_{k'}} - \frac{k_y''}{\omega_{k''}}\right)\sqrt{\frac{8\pi\,\omega_{k'}\omega_{k''}\left[k_z^2 + k_\perp^2\left(1 + \frac{\omega_{oi}^2}{\Omega_i^2}\right)\right]}{\omega_k\left[k_z'^2 + k_\perp'^2\left(1 + \frac{\omega_{oi}^2}{\Omega_i^2}\right)\right]\cdot\left[k_z''^2 + k_\perp''^2\left(1 + \frac{\omega_{oi}^2}{\Omega_i^2}\right)\right]}} \qquad (5.\text{П})$$

Литература

I. А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

2. Б.Б.Кадомцев ЖТФ, 31, 1209 (1961)

3. С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 44, № 2 (1963)

4. Г.М.Заславский, С.С.Моисеев. Препринт ИЯФ СО АН СССР и Новосибирского Госуниверситета. Новосибирск, 1963.

5. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, I, 82 (1961)

6. А.А.Галеев. В.И.Карпман. ЖЭТФ, 44, № 2 (1963).

7. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. Препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1963.