С.95

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт. 024

В.С. СЫНАХ

ПОЛУЧЕНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК К СЕЧЕНИЯМ ЭЛЕКТРОН-МЮОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ.

Гор. Новосибирск
1963 г.

I. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач подготавливаемых в настоящее время во многих местах опытов на встречных электрон-электронных и электрон-позитронных пучках является выяснение пределов применимости современной квантовой электродинамики при высоких энергиях (см.,например, обзор /I/). В связи с этим становится актуальным точный расчет сечений электродинамических процессов в высших порядках теории возмущений.

Соответствующие вычисления весьма трудоемки и приводят к трудно обозримым выражениям. Обычно /2-5/ прибегают к различным приближениям, степень корректности и область применимости которых не вполне ясны.

С другой стороны, эти вычисления сводятся к набору хорошо известных стандартных операций, повторяемых многократно. В принципе, такие расчеты представляют удобное поле деятельности для современных электронно-вычислительных машин, которые позволяют производить операции не только над числами, но и над символами /6-8/. Таким образом, появляется возможность получать формулы не "вручную", а на ЭВМ.

В настоящей работе излагается методика аналитического и численного расчета на ЭВМ радиационных поправок порядка e^6 для сечений процессов

$$e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-,$$

$$e^+ + \mu^- \to e^+ + \mu^- \quad (e^- + \mu^+ \to e^- + \mu^+),$$

$$e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+,$$

Основная программа составлена для рассеяния электрона на мюоне одного знака. Переход к другим процессам осуществляется тривиальной заменой переменных. Сравнительно небольшое изменение программы позволяет получить аналогичные результаты для подобных электрон-электронных процессов, а также для соответствующих процессов, сопровождающихся излучением жесткого γ-кванта. Эта работа в настоящее время завершается.

Программа состоит из трех частей:

I. Получение аналитического выражения для вклада от неприводимых диаграмм.

2. Арифметическая часть.

3. Получение численных результатов.

II. ПРОГРАММА ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВОК.

I. Постановка задачи .

Радиационные поправки, связанные с вершинной частью и собственной массой фотона, хорошо известны /9/ и их учет не представляет трудностей. Наиболее трудоемко вычисление вклада от неприводимых диаграмм (рис.I)

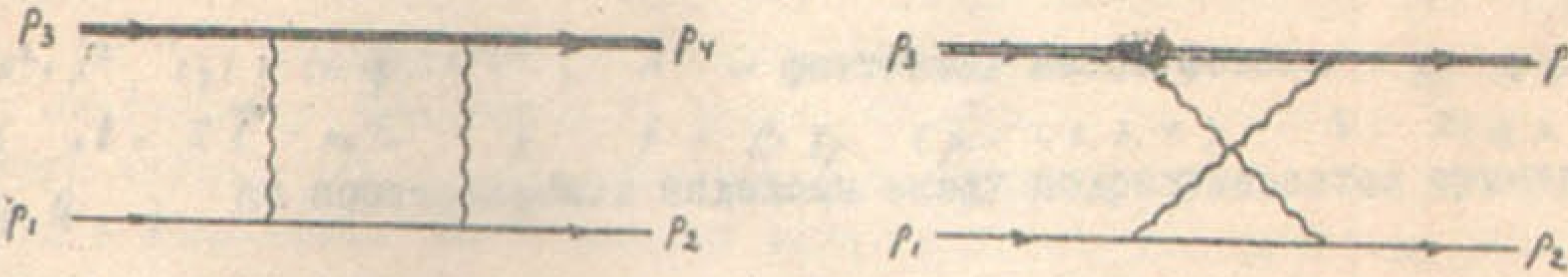


Рис. I.

Здесь p_1 и p_2 - начальный и конечный 4 -импульсы электрона, p_3 и p_4 - начальный и конечный 4 -импульсы мюона.

Несложная выкладка для $\delta_1 = d\sigma_1 / d\sigma_0$, где $d\sigma_0$ - дифференциальное сечение процесса в первом порядке теории возмущений после усреднения по начальным и суммирования по конечным спиновым состояниям, $d\sigma_1$ - вклад в дифференциальное сечение от неприводимых диаграмм, дает:

$$\delta = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\zeta \, \mathrm{Re}\, S_1}{S_0} \tag{I}$$

Здесь: $\alpha = 1/137$; $S_0 = \frac{1}{2}[\zeta^2 + \eta^2 + 4(\mu^2+1)\xi + 2(\mu^2+1)^2]$;
$\xi = (p_2 - p_1)^2$; $\eta = (p_3 - p_1)^2$; $\zeta = (p_4 - p_1)^2$ - инварианты процесса,
$\zeta = \eta - \xi$; μ - масса мюона, масса электрона m принята за I;

$$S_1 = \frac{1}{i\pi^2} \left[\int \frac{\mathrm{Tr}\, Q_1 \cdot \mathrm{Tr}\, Q_2}{(1)(3)(\kappa)(q)} d^4k + \int \frac{\mathrm{Tr}\, Q_1 \cdot \mathrm{Tr}\, Q_3}{(1)(4)(\kappa)(q)} d^4k \right], \tag{2}$$

где

$$Q_1 = \hat{p}_1 \gamma_\tau \hat{p}_2 \gamma_\sigma \hat{p}_1 \gamma_\rho + \hat{p}_1 \gamma_\tau \hat{p}_2 \gamma_\sigma \hat{k} \gamma_\tau - m^2 \hat{p}_1 \gamma_\tau \gamma_\sigma \gamma_\rho -$$
$$- m^2 \gamma_\tau \hat{p}_2 \gamma_\sigma \gamma_\rho - m^2 \gamma_\tau \gamma_\sigma \hat{p}_1 \gamma_\rho - m^2 \gamma_\tau \gamma_\sigma \hat{k} \gamma_\rho ,$$

$$Q_2 = \hat{p}_3\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\sigma\hat{p}_3\gamma_\rho - \hat{p}_3\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\sigma\hat{k}\gamma_\tau - \mu^2\hat{p}_3\gamma_\tau\gamma_\sigma\gamma_\rho -$$

$$- \mu^2\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\sigma\gamma_\rho - \mu^2\gamma_\tau\gamma_\sigma\hat{p}_3\gamma_\rho + \mu^2\gamma_\tau\gamma_\sigma\hat{k}\gamma_\rho ,$$

$$Q_3 = \hat{p}_3\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\rho\hat{p}_4\gamma_\sigma + \hat{p}_3\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\rho\hat{k}\gamma_\sigma - \mu^2\hat{p}_3\gamma_\tau\gamma_\rho\gamma_\sigma -$$

$$- \mu^2\gamma_\tau\hat{p}_4\gamma_\rho\gamma_\sigma - \mu^2\gamma_\tau\gamma_\rho\hat{p}_4\gamma_\sigma - \mu^2\gamma_\tau\gamma_\rho\hat{k}\gamma_\sigma ;$$

$$(1) = k^2 + 2kp_1 , \quad (3) = k^2 - 2kp_3 , \quad (4) = k^2 + 2kp_4 ,$$

$(k) = k^2 + \lambda^2$, $(q) = (k-q)^2 + \lambda^2$; λ – фиктивная масса фотона ; $q = p_2 - p_1$

метрика: $ab = \vec{a}\vec{b} - a_0 b_0$; $\hat{p} = p_\mu\gamma_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, 4)$; $Tr\,Q = \frac{1}{4}\,Sp\,Q$; по повторяющимся индексам всюду подразумевается суммирование.

Программа выражает S_1 в виде суммы одночленов, каждый из которых представляет произведение численного коэффициента, квадратов масс частиц, инвариантов ξ и η и некоторых функций инвариантов, которые будем называть стандартными функциями для данной задачи.

Стандартные функции задачи, обозначенные Y, $\bar{Y}$, A', A'', $\bar{A}'$, $\bar{A}''$, $B^{(1)}$, $H^{(1)}$, $K^{(1)}$, $N^{(1)}$, $C^{(1)}$, $H^{(2)}$, $K^{(2)}$, $N^{(2)}$, определены из соотношений:

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(3)(k)(q)} = \frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(4)(k)(q)} = Y ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(1)(k)(q)} = \bar{Y} ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{k_\sigma\,d^4k}{(3)(k)(q)} = A' p_{3\sigma} + A'' q_\sigma ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{k_\sigma\,d^4k}{(4)(k)(q)} = \bar{A}' p_{1\sigma} + \bar{A}'' q_\sigma ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(1)(3)(k)(q)} = B^{(1)} ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(1)(3)(k)} = \frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4k}{(1)(3)(q)} = H^{(1)} ,$$

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{k_\sigma\,d^4k}{(1)(3)(k)} = K^{(1)} p_{1\sigma} - N^{(1)} p_{3\sigma}$$

или

$$\frac{1}{i\pi^2}\int \frac{k_\sigma\, d^4k}{(1)(3)(q)} = K^{(1)} p_{2\sigma} - N^{(1)} p_{4\sigma} + H^{(1)} q_\sigma \qquad (3)$$

Величины с верхним индексом 2 получаются из соответствующих величин с верхним индексом I заменой (3) (4), т.е. $p_3 \to -p_4$.

2. Кодировка исходной информации.

Ячейка памяти используемой ЭВМ содержит I5 восьмеричных разрядов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{15}$ (нумерация слева направо). Первые три из них образуют "порядок" $\mathcal{P}$, остальные - "мантиссу". Мантисса делится на три "адреса" A_1, A_2, A_3. Большинство буквенных обозначений задачи закодировано в виде двузначного восьмеричного числа, которое будем называть кодом буквенного символа или просто символом и обозначать буквами греческого алфавита с индексами, смысл которых ясен из рис.2. Два символа, записанных в одном адресе, будем называть сцепленными символами или парой.

$\mathcal{P}$			A_1		A_2		A_3	
ε_1	ε_2	ε_3	$\alpha_1^{(1)}$	$\alpha_2^{(1)}$	$\alpha_1^{(2)}$	$\alpha_2^{(2)}$	$\alpha_1^{(3)}$	$\alpha_2^{(3)}$

Рис. 2.

В машину вводится информация о Q_1, Q_2, Q_3. Каждый одночлен, входящий в Q_{1-3}, занимает одну ячейку в участке памяти машины, отведенном для исходной информации. Информация о матричной части одночлена записывается в мантиссе, остальная - в порядке. Каждый буквенный символ матричной части закодирован двузначным восьмеричным числом, причем для величин типа $\hat{p}$ пуста первая позиция кода символа, а для кодов γ -матриц с индексами пуста вторая позиция кода. Конкретно принята кодировка:

$$\hat{p}_1 \leftrightarrow 01,\quad \hat{p}_2 \leftrightarrow 02,\quad \hat{p}_3 \leftrightarrow 03,\quad \hat{p}_4 \leftrightarrow 04,\quad \hat{k} \leftrightarrow 05;$$

$$\gamma_\rho \leftrightarrow 10,\quad \gamma_\sigma \leftrightarrow 20,\quad \gamma_\tau \leftrightarrow 30.$$

В ε_1 записывается знак одночлена: „+" $\leftrightarrow 0$, „-" $\leftrightarrow 2$;
в ε_3 - сведения о множителях μ^2 или m^2 : отсутствие множителя $\leftrightarrow 0$, $m^2 \leftrightarrow 1$, $\mu^2 \leftrightarrow 2$.

Например:

$$\hat{p}_1\gamma_\tau\hat{p}_2\gamma_\sigma\hat{p}_1\gamma_\rho \leftrightarrow 000\ \ 0130\ \ 0220\ \ 0110$$

$$-m^2\gamma_\tau\gamma_\sigma\hat{p}_1\gamma_\rho \leftrightarrow 201\ \ 3020\ \ 0110\ \ 0000$$

3. Кодировка результатов.

Для каждого одночлена результата отведено две ячейки памяти. В одной из них записан численный коэффициент, в другой - алгебраическая структура одночлена, т.е. входящие в него сомножители. Для записи алгебраической структуры используется только мантисса. Каждому сомножителю отвечает определенный символ и определенное место в строке в зависимости от типа сомножителя (рис.3):

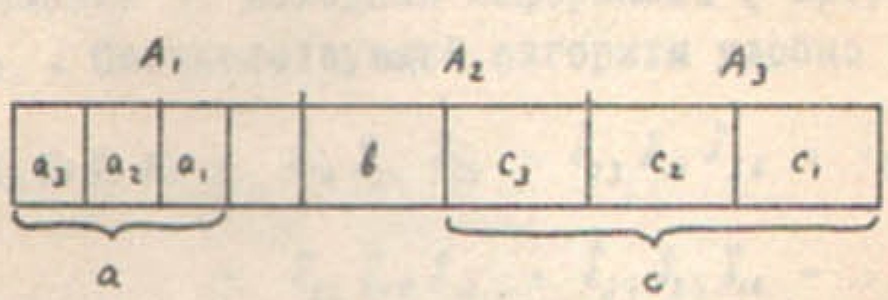


Рис. 3.

I) Символы ξ и η записываются в группу разрядов, обозначенную a :

$$\xi \leftrightarrow 1, \quad \eta \leftrightarrow 2$$

2) Стандартные функции $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ записываются в два разряда b :

$$b^{(1)} \leftrightarrow 07, \quad b^{(2)} \leftrightarrow 13$$

3) Остальные стандартные функции, а также μ^2 и m^2 записываются в разряды c :

$$y \leftrightarrow 01, \quad \bar{y} \leftrightarrow 02, \quad A' \leftrightarrow 03, \quad A'' \leftrightarrow 04, \quad \bar{A}' \leftrightarrow 05$$

$$\bar{A}'' \leftrightarrow 06, \quad \varkappa^{(1)} \leftrightarrow 10, \quad K^{(1)} \leftrightarrow 11, \quad N^{(1)} \leftrightarrow 12, \quad \varkappa^{(2)} \leftrightarrow 14,$$

$$K^{(2)} \leftrightarrow 15, \quad N^{(2)} \leftrightarrow 16, \quad \mu^2 \leftrightarrow 17, \quad m^2 \leftrightarrow 20$$

Каждая группа разрядов заполняется слева направо, причем символы в пределах группы располагаются в порядке убывания их кодов. Вместо величины x^n записывается $\underbrace{xx\ldots.x}_{n}$.

Например:

$\xi N^{(2)} \mu^2 \leftrightarrow$ 00I0 0000 I6I7

$\xi\eta b^{(1)} m^2 \leftrightarrow$ 0I20 0700 0020

$b^{(2)} \mu^6 \leftrightarrow$ 0000 I320 2020

4. Программа алгебраического вычисления следов произведений γ-матриц (ПВШ)

Основная программа распадается на несколько подпрограмм. Целесообразно рассмотреть эти подпрограммы в отдельности, во-первых, для удобства, во-вторых, потому, что они представляют и самостоятельный интерес, т.к. их комбинация позволяет решать другие родственные задачи.

Первой из них является программа вычисления следов произведений γ-матриц ("шнурование"). Исходная информация ("аргумент" программы) – одночлен из Q_{1-3}. Соответствующий алгоритм удобно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
Tr\,\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5\gamma_6 = {} & \delta_{12}\delta_{34}\delta_{56} - \delta_{23}\delta_{14}\delta_{56} + \delta_{31}\delta_{24}\delta_{56} - \\
& - \delta_{23}\delta_{45}\delta_{16} + \delta_{34}\delta_{25}\delta_{16} - \ldots
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(Здесь цифры имеют смысл буквенных индексов).

Реализация этого алгоритма сводится к последовательной циклической перестановке символов и последующему об"единению символов в пары. После об"единения символов в пары их смысл в соответствии с (4) меняется: символы 0I, 02, 03, 04 означают векторы p_1, p_2, p_3, p_4; символы I0, 20, 30 означают индексы ρ, σ, τ компонент векторов; два сцепленных символа индексов означают величину типа $\delta_{\mu\nu}$; два сцепленных символа векторов означают скалярное произведение их.

Например:

$$0201 \longleftrightarrow p_2 p_1\,, \quad 3004 \longleftrightarrow p_{4\tau}\,, \quad 2010 \longleftrightarrow \delta_{\sigma\rho}\,.$$

Для облегчения "опознавания" такого рода величин символы в паре располагаются так, чтобы $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда символ индекса автоматически оказывается первым.

Информация, записанная в порядке ПВШ не изменяется, за исключением, конечно, ε_1 (знак). Результаты располагаются в последовательных ячейках памяти. В конце ставится маркер.

Пример:

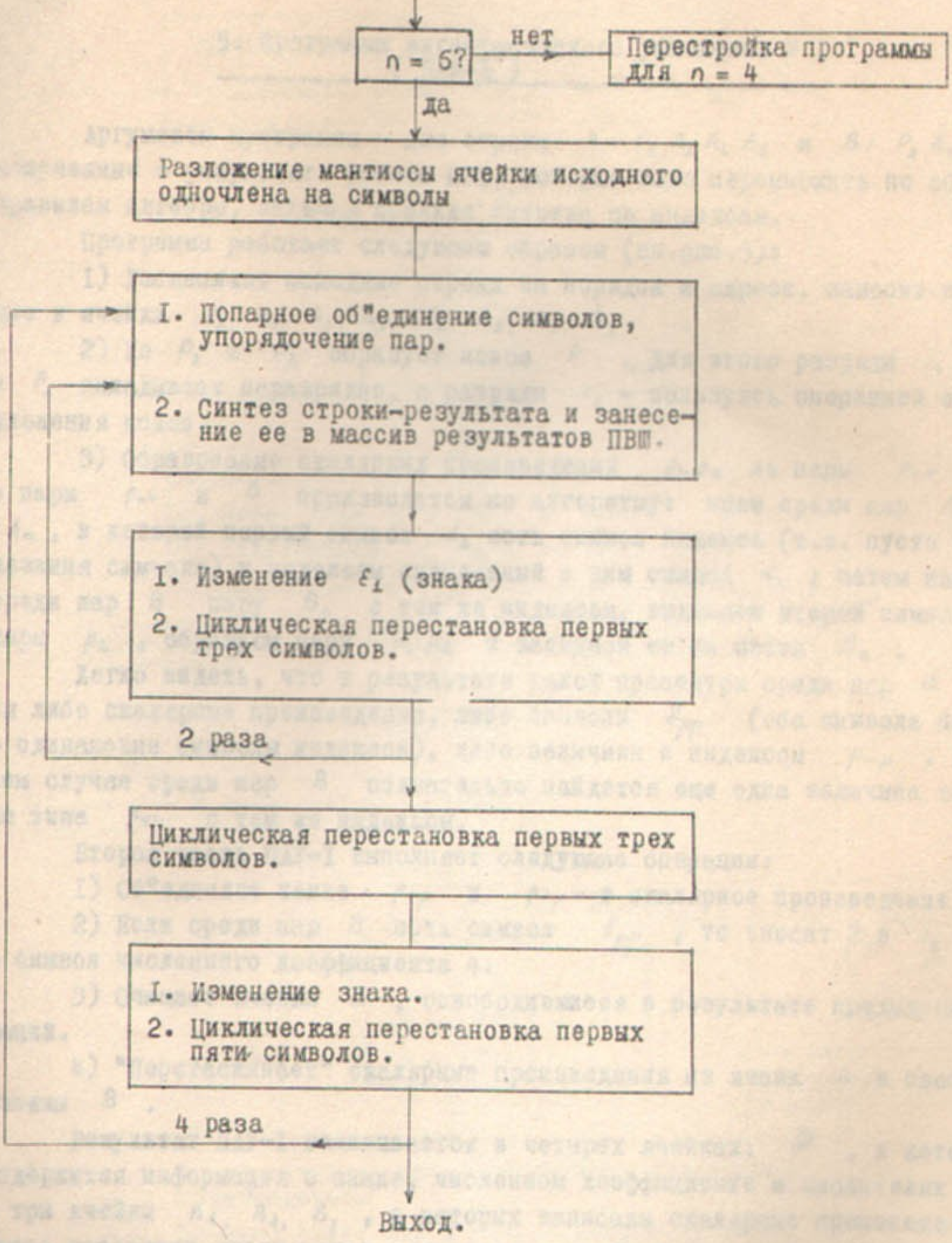
Преобразование

$$Tr\,\hat{p}_1\gamma_\tau\hat{p}_2\gamma_\sigma\hat{p}_1\gamma_\rho = p_{1\tau}p_{2\sigma}p_{1\rho} - p_{2\tau}p_{1\sigma}p_{1\rho} + (p_2 p_1)\delta_{\tau\sigma}p_{1\rho} - \ldots$$

в "машинном изложении" выглядит так:

$$
000\quad 0I30\quad 0220\quad 0II0 \longrightarrow
\left.\begin{array}{cccc}
000 & 300I & 2002 & I00I \\
200 & 3002 & 200I & I00I \\
000 & 020I & 3020 & I00I \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right\}\ \text{I5 ячеек}
$$

маркер



$n = 6?$
нет
Перестройка программы для $n = 4$
да
Разложение мантиссы ячейки исходного одночлена на символы
I. Попарное об"единение символов, упорядочение пар.
2. Синтез строки-результата и занесение ее в массив результатов ПВШ.
I. Изменение ε_1 (знака)
2. Циклическая перестановка первых трех символов.
2 раза
Циклическая перестановка первых трех символов.
I. Изменение знака.
2. Циклическая перестановка первых пяти символов.
4 раза
Выход.

Рис. 4.

Блок-схема ПВШ для $n = 6$ γ-матриц приведена на рис.4.[x] Изменения в программе для $n = 4$ не показаны. Обобщение на случай $n > 6$ очевидно.

5. Программа алгебраического умножения № I (ПАИ-I)

Аргументы программы - две строки $A = P_1 A_1 A_2 A_3$ и $B = P_2 B_1 B_2 B_3$, полученные в результате работы ПВШ, которые надо перемножить по обычным правилам алгебры, включая правила свертки по индексам.

Программа работает следующим образом (см.рис.5):

I) Расщепляет исходные строки на порядок и адреса, заносит последние в ячейки $P_1, A_1, A_2, A_3, P_2, B_1, B_2, B_3$.

2) Из P_1 и P_2 образует новое P. Для этого разряды ε_1 из P_1 и P_2 складывает поразрядно, а разряды ε_3 - пользуясь операцией обычного сложения кодов.

3) Образование скалярных произведений $p_\mu p_n$ из пары $p_{\mu\sigma}$ в A и пары $p_{n\sigma}$ в B производится по алгоритму: ищем среди пар A пару A_m, в которой первый символ α_1 есть символ индекса (т.е. пуста вторая позиция символа) и выделяем сцепленный с ним символ α_2; затем находим среди пар B пару B_n с тем же индексом, выделяем второй символ этой пары β_2, образуем пару $\alpha_2\beta_2$ и засылаем ее на место B_n.

Легко видеть, что в результате такой процедуры среди пар B окажутся либо скалярные произведения, либо символы $\delta_{\mu\mu}$ (оба символа пары - одинаковые символы индексов), либо величины с индексом $p_\mu \mu$. В последнем случае среди пар B обязательно найдется еще одна величина такого же типа $p_{\kappa\mu}$ с тем же индексом.

Вторая часть ПАУ-I выполняет следующие операции:

I) Об"единяет такие $p_\mu \mu$ и $p_{\kappa\mu}$ в скалярное произведение $p_\mu p_\kappa$.

2) Если среди пар B есть символ $\delta_{\mu\mu}$, то вносит 2 в ε_2 из P - символ численного коэффициента 4.

3) Очищает ячейки B, освободившиеся в результате предыдущих операций.

4) "Перетаскивает" скалярные произведения из ячеек A в свободные ячейки B.

Результат ПАУ-I записывается в четырех ячейках: $\mathcal{P}$, в которой содержится информация о знаке, численном коэффициенте и множителях M^2 и m^2 и три ячейки B_1, B_2, B_3, в которых записаны скалярные произведения. Часть последних ячеек может оказаться пустой. Пары, изображающие скалярные произведения, упорядочены в прежнем смысле ($\alpha_1 > \alpha_2$). При этом символ κ автоматически оказывается первым.

x) На заключительном этапе излагаемой работы нам стала известна работа Кайзера /I0/, содержание которой частично перекрывается с содержанием этого раздела.

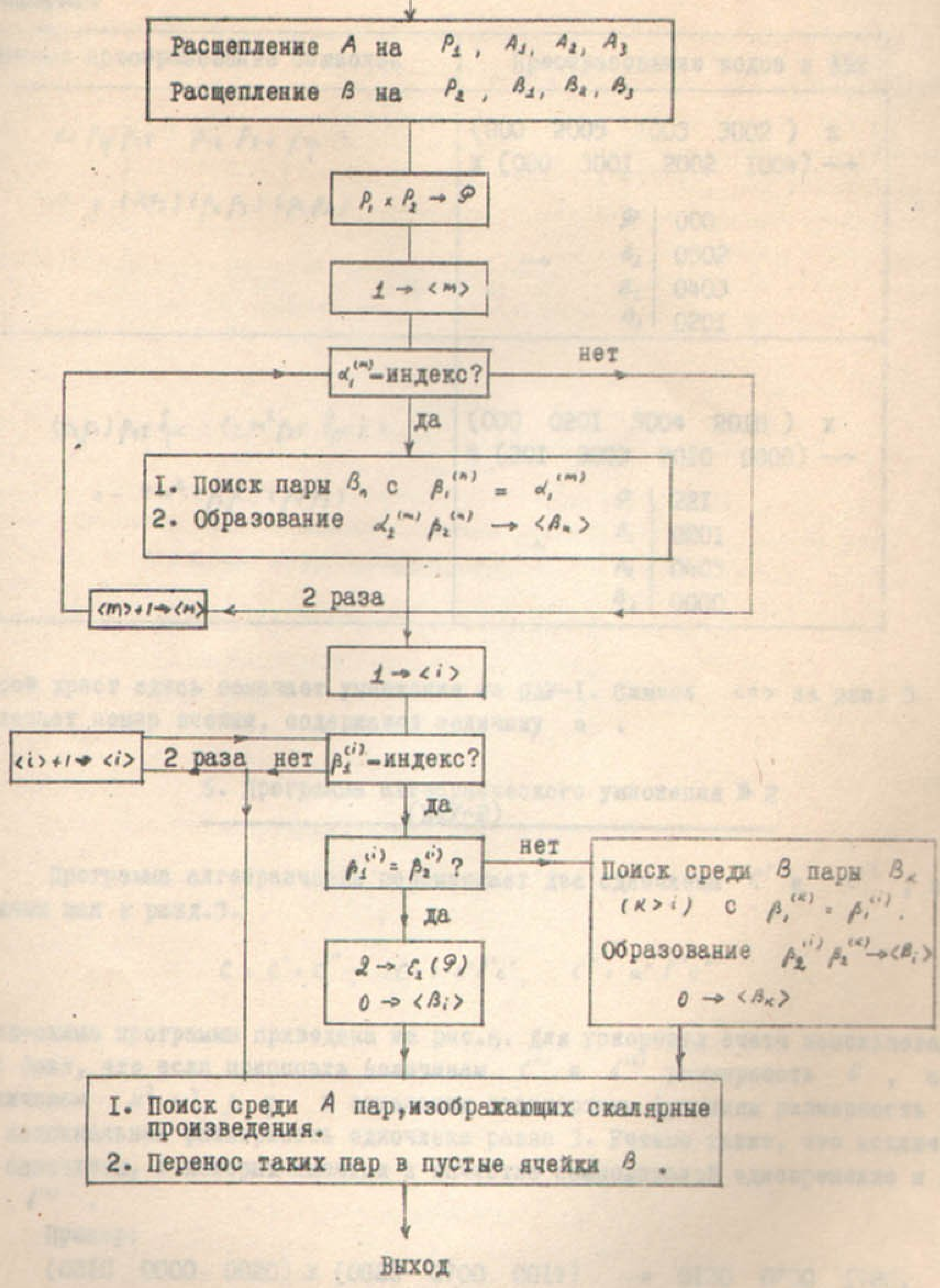

Расщепление A на P_1, A_1, A_2, A_3
Расщепление B на P_2, B_1, B_2, B_3
$P_1 \times P_2 \to \mathcal{P}$
$1 \to \langle m \rangle$
$\alpha_1^{(m)}$-индекс?
нет
да
I. Поиск пары B_n с $\beta_1^{(n)} = \alpha_1^{(m)}$
2. Образование $\alpha_2^{(m)} \beta_2^{(n)} \to \langle B_n \rangle$
$\langle m \rangle + 1 \to \langle m \rangle$
2 раза
$1 \to \langle i \rangle$
$\langle i \rangle + 1 \to \langle i \rangle$
2 раза
нет
$\beta_1^{(i)}$-индекс?
да
$\beta_1^{(i)} = \beta_2^{(i)}$?
нет
Поиск среди B пары B_k $(k > i)$ с $\beta_1^{(k)} = \beta_1^{(i)}$.
Образование $\beta_2^{(i)} \beta_2^{(k)} \to \langle B_i \rangle$
$0 \to \langle B_k \rangle$
да
$2 \to \varepsilon_1(\mathcal{P})$
$0 \to \langle B_i \rangle$
I. Поиск среди A пар, изображающих скалярные произведения.
2. Перенос таких пар в пустые ячейки B .
Выход

Рис. 5.

Действие программы ПАУ-I может быть проиллюстрировано на следующих примерах:

Обычное преобразование символов	Преобразование кодов в ЭВМ
$k_\sigma p_{3\rho} p_{2\tau} \cdot p_{1\tau} p_{2\sigma} p_{4\rho} =$ $= (kp_2)(p_4 p_3)(p_2 p_1)$	(000 2005 I003 3002) x x (000 300I 2002 I004) $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\mathcal{P}$ | 000 B_1 | 0502 B_2 | 0403 B_3 | 020I
$(p_2 p_1) p_{4\tau} \delta_{\rho\tau} \cdot (-m^2 p_{3\tau} \delta_{\rho\tau}) =$ $= -4m^2 (p_2 p_1)(p_4 p_3)$	(000 020I 3004 20I0) x x (20I 3003 20I0 0000) $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\mathcal{P}$ | 22I B_1 | 020I B_2 | 0403 B_3 | 0000

Косой крест здесь означает умножение по ПАУ-I. Символ $\langle a \rangle$ на рис. 5 означает номер ячейки, содержащей величину a .

6. Программа алгебраического умножения № 2 (ПАУ-2)

Программа алгебраически перемножает два одночлена C' и C'' , заданных как в разд.3.

$$C = C' \times C'', \quad C' = a'b'c', \quad C'' = a''b''c''$$

Блок-схема программы приведена на рис.6. Для ускорения счета использован тот факт, что если приписать величинам $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$ размерность 0 , а величинам μ^2, m^2, ζ, η и остальным стандартным функциям размерность I, то максимальная размерность одночлена равна 3. Учтено также, что исключены одночлены, в которых имеются в качестве сомножителей одновременно и $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$.

Пример:

(00I0 0000 0020) x (0020 0700 00I7) $\rightarrow$ 0I20 0700 I720,

т.е.

$$m^2\zeta \cdot \mu^2\eta\, b^{(1)} = \mu^2 m^2 \zeta\eta\, b^{(1)}$$

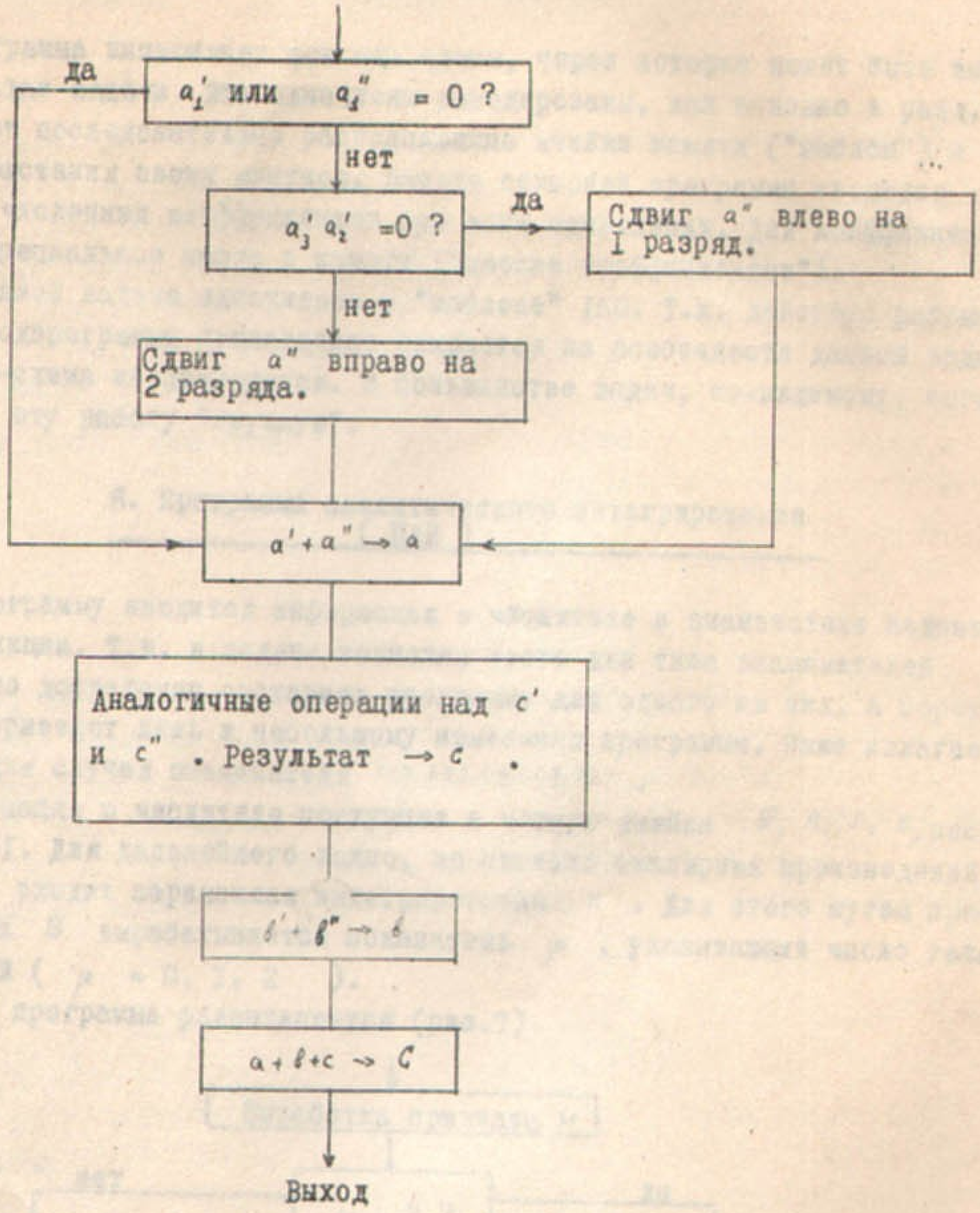

да
a_1' или a_1'' = 0 ?
нет
$a_3' a_2'$ =0 ?
да
Сдвиг a'' влево на I разряд.
нет
Сдвиг a'' вправо на 2 разряда.
$a' + a'' \to a$
Аналогичные операции над c' и c''. Результат $\to c$.
$b' + b'' \to b$
$a + b + c \to C$
Выход

Рис. 6.

7. Программа "Шаблон"

Программа выписывает все одночлены, через которые может быть выражен результат задачи. Эти одночлены закодированы, как описано в разд.3, и заполняют последовательно расположенные ячейки памяти ("шаблон") в порядке возрастания своих мантисс. Работа основной программы сводится к отысканию численных коэффициентов при этих одночленах. Для коэффициентов отведено специальное место в памяти ("массив коэффициентов").

В данной задаче одночленов в "шаблоне" I60. Т.к. действие рассматриваемой подпрограммы существенно опирается на особенности данной задачи, то ее блок-схема не приводится. В большинстве задач, по-видимому, выгоднее делать эту работу "вручную".

8. Программа аналитического интегрирования (ПАИ)

В программу вводится информация о числителе и знаменателе подинтегральной функции. Т.к. в задаче возможны всего два типа знаменателей (см./2/), то достаточно составить программу для одного из них, а переход к другому приведет лишь к небольшому изменению программы. Ниже излагается программа для случая знаменателя $(1)(3)(2)(4)$.

Информация о числителе поступает в четыре ячейки $\mathcal{P}, B_1, B_2, B_3$ после работы ПАУ-I. Для дальнейшего важно, во сколько скалярных произведений B_1, B_2, B_3 входит переменная интегрирования k . Для этого путем просмотра ячеек B вырабатывается показатель μ , указывающий число таких произведений (μ = 0, I, 2).

Далее программа разветвляется (рис.7)

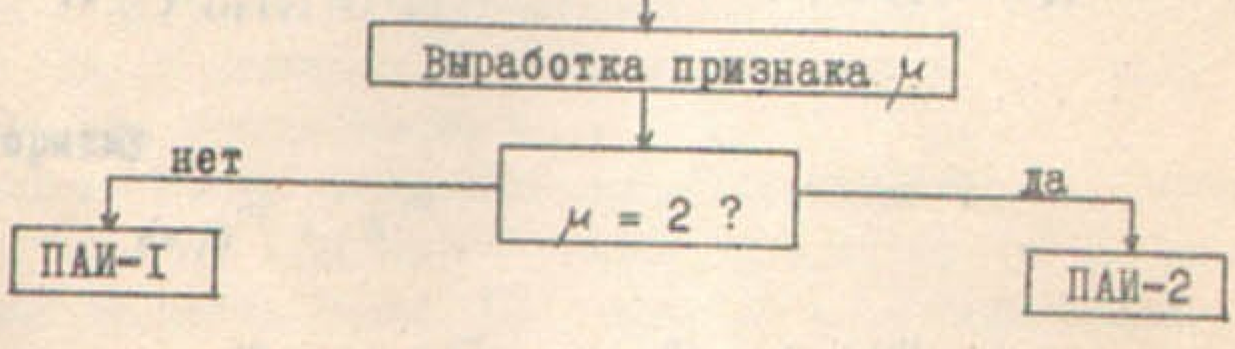


Рис. 7.

Целесообразно предварительно рассмотреть некоторые блоки ПАИ.

I) Блок "расшифровки" (БР)

Всего в рассматриваемой задаче возможны I0 скалярных произведений вида $p_i p_k$. Пользуясь законами сохранения, их можно представить в виде линейной комбинации μ^2, m^2 и инвариантов ζ и η:

$$p_i p_k = a_{ik}\mu^2 + b_{ik} m^2 + c_{ik}\zeta + d_{ik}\eta$$

Будем называть эту операцию "расшифровкой" скалярного произведения. Выполняется "расшифровка" следующим образом:

В массиве информации к БР записаны IO строк вида $000;\ p_i p_k,\ K,\ 0000$ Первый адрес строки указывает, о каком скалярном произведении идет речь, а K – номер ячейки, в которой содержится коэффициент a_{ik}. В ячейках $K+1$, $K+2$, $K+3$ содержатся коэффициенты b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}.

Например:

000	040I	I740	000	I740	– I/2
				I	– I/2
				2	+ I/2
				3	– I/2

означает

$$p_4 p_1 = -\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2}\eta$$

Блок расшифровки находит для pp-произведения B_1 строку с адресом четверки коэффициентов a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik} и заносит эти коэффициенты в четыре последовательные "арифметические ячейки" $N_1(n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14})$ а в четыре "алгебраические" ячейки $M_1(m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{14})$ заносит символы величин μ^2, m^2, ζ, η. Затем расшифровываются B_2 и B_3.

В случае скалярного произведения типа kp БР сразу же вычисляет интеграл

$$\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{(kp)\,d^4k}{(1)(3)(k)(q)} = p_\sigma\cdot\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{k_\sigma\,d^4k}{(1)(3)(k)(q)} = p_\sigma b_\sigma^{(1)}$$

по алгоритму

$$k_\sigma p_\sigma^{(1)} = H^{(1)},$$

$$p_{4\sigma} b_\sigma^{(1)} = -\frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{2}H^{(1)} - \frac{1}{2}\zeta\,\ell^{(1)},$$

$$p_{3\sigma} b_\sigma^{(1)} = -\frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{2}H^{(1)}, \tag{5}$$

$$p_{2\sigma} b_\sigma^{(1)} = \frac{1}{2}\bar{y} - \frac{1}{2}H^{(1)} + \frac{1}{2}\zeta\,\ell^{(1)},$$

$$p_{1\sigma} b_\sigma^{(1)} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}H^{(1)}$$

Принцип работы БР в этом случае прежний, только в алгебраические ячейки засылаются символы $y, \bar{y}, H''', \zeta b'''$, а не μ^2, m^2, ζ, η .

Пример:

Преобразование

$$\frac{1}{i\pi^2}\int \frac{(p_1 p_1)(k p_3)(p_4 p_1)}{(1)(3)(k)(q)}\, d^4k = (-m^2)\left(-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}H'''\right)\left(-\frac{1}{2}\mu^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}\zeta-\frac{1}{2}\eta\right)$$

в БР выглядит так:

$$\left.\begin{array}{l} 0101 \\ 0503 \\ 0401 \end{array}\right\} \rightarrow \quad
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{lll} 0000 & 0000 & 0017 \\ 0000 & 0000 & 0020 \\ 0010 & 0000 & 0000 \\ 0020 & 0000 & 0000 \end{array}\right\} \mathcal{M}_1 \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} \mathcal{N}_1 \\
\left.\begin{array}{lll} 0000 & 0000 & 0001 \\ 0000 & 0000 & 0002 \\ 0000 & 0000 & 0010 \\ 001C & 0700 & 0000 \end{array}\right\} \mathcal{M}_2 \qquad \left.\begin{array}{r} 0 \\ -1/2 \\ +1/2 \\ 0 \end{array}\right\} \mathcal{N}_2 \\
\left.\begin{array}{lll} 0000 & 0000 & 0017 \\ 0000 & 0000 & 0020 \\ 0010 & 0000 & 0000 \\ 0020 & 0000 & 0000 \end{array}\right\} \mathcal{M}_3 \qquad \left.\begin{array}{r} -1/2 \\ -1/2 \\ +1/2 \\ -1/2 \end{array}\right\} \mathcal{N}_3
\end{array}$$

Блок-схема БР приведена на рис. 8.

2) Блок подготовки.

Блок подготовки перерабатывает информацию, записанную в $\mathcal{P}$:

I) меняет знак у отличных от нуля коэффициентов $\mathcal{N}_1$, если $\varepsilon_1 = 2$;

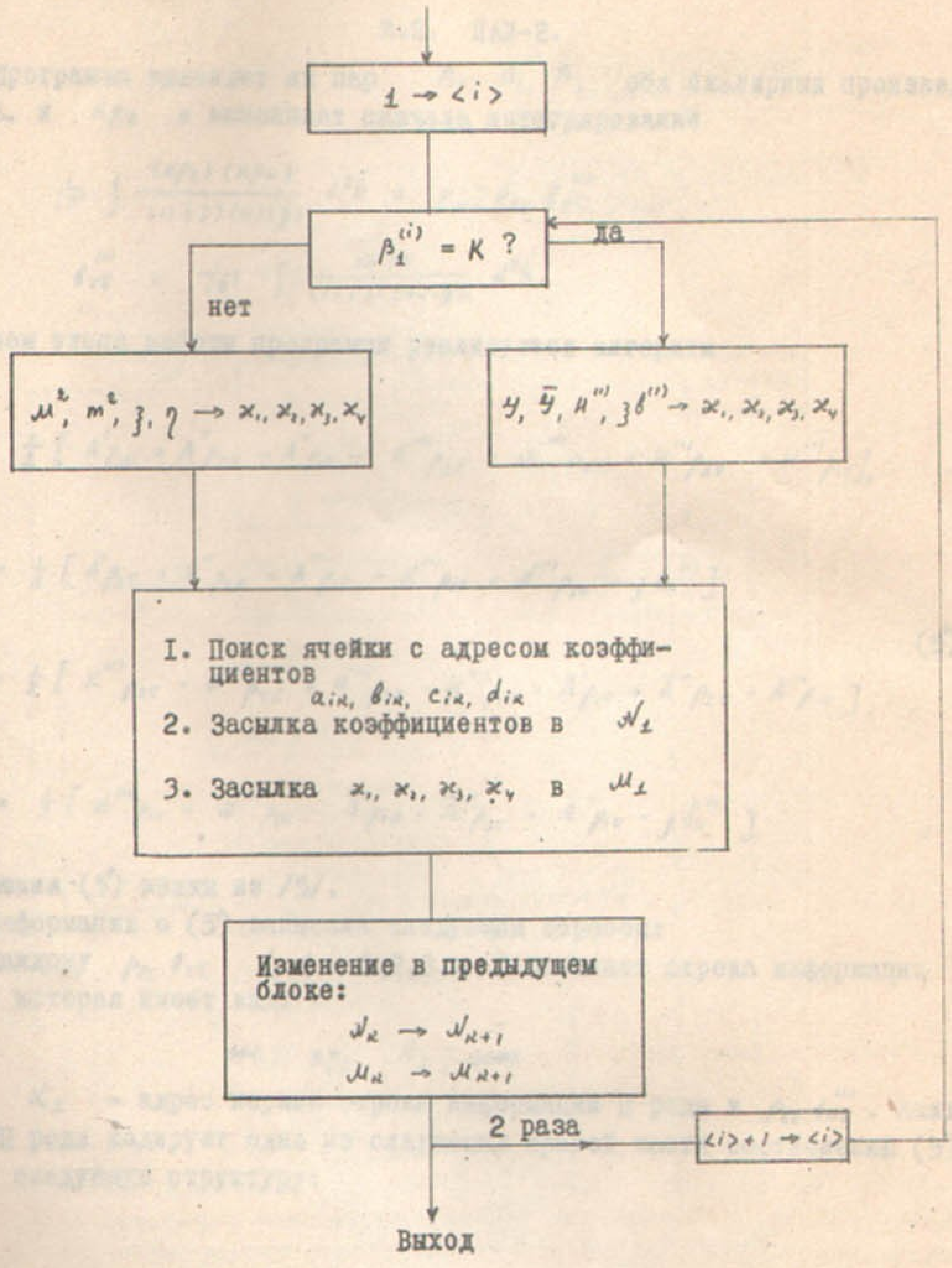
2) умножает эти коэффициенты на 4, если $\varepsilon_2 = 2$;

3) умножает по ПАУ-2 соответствующие "алгебраические" символы из $\mathcal{M}_1$ на m^2, если $\varepsilon_3 = 1$; на μ^2 ,если $\varepsilon_3 = 2$; на $\mu^2 m^2$,если $\varepsilon_3 = 3$;

4) умножает по ПАУ-2 $\mathcal{M}_1$ на $b^{(\nu)}$, если $\mu = 0$. Этим самым, согласно (3) выполняется интегрирование по d^4k в этом случае.

3) Блок приведения подобных членов (БПП)

В блок поступает один из одночленов $\mathcal{R}$, предусмотренных программой "шаблон", и численный коэффициент при нем ω . Блок просматривает "шаблон", находит строку, совпадающую с $\mathcal{R}$, и к соответствующему коэффициенту прибавляет ω .



$1 \to \langle i \rangle$
$\beta_1^{(i)} = K$?
да
нет
$\mu^2, m^2, \xi, \eta \to x_1, x_2, x_3, x_4$
$y, \bar{y}, u^{(i)}, z^{(i)} \to x_1, x_2, x_3, x_4$
I. Поиск ячейки с адресом коэффициентов $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{ik}$
2. Засылка коэффициентов в N_1
3. Засылка x_1, x_2, x_3, x_4 в M_1
Изменение в предыдущем блоке:
$N_k \to N_{k+1}$
$M_k \to M_{k+1}$
2 раза
$\langle i \rangle + 1 \to \langle i \rangle$
Выход

Рис. 8.

8.I. ПАИ-I.

Работа ПАИ-I ясна из рис.9. Упрощения, вносимые в програму при $\mathcal{N}_2 = 0$ или $\mathcal{N}_3 = 0$, не показаны. Косой крест означает умножение одночленов по ПАУ-2, точка - обычное умножение чисел.

8.2. ПАИ-2.

Программа выделяет из пар B_1, B_2, B_3 оба скалярных произведения kp_m и kp_ℓ и выполняет сначала интегрирование

$$\frac{1}{i\pi^2}\int \frac{(kp_\ell)(kp_m)}{(1)(3)(2)(4)}\, d^4k = p_{m\sigma}\, p_{\ell\tau}\, b^{(1)}_{\sigma\tau},$$

$$b^{(1)}_{\sigma\tau} = \frac{1}{i\pi^2}\int \frac{k_\sigma k_\tau}{(1)(3)(2)(4)}\, d^4k$$

На первом этапе работы программы реализуется алгоритм

$$\left.\begin{aligned}
p_{1\tau} b^{(1)}_{\sigma\tau} &= \tfrac{1}{2}\left[A' p_{3\sigma} + A'' p_{2\sigma} - A'' p_{1\sigma} - K''' p_{2\sigma} + \mathcal{N}''' p_{4\sigma} - H''' p_{2\sigma} + H''' p_{1\sigma}\right],\\
p_{2\tau} b^{(1)}_{\sigma\tau} &= \tfrac{1}{2}\left[A' p_{3\sigma} + A'' p_{2\sigma} - A'' p_{1\sigma} - K''' p_{1\sigma} + \mathcal{N}''' p_{3\sigma} + {}_3 b^{(1)}_{\sigma}\right]\\
p_{3\tau} b^{(1)}_{\sigma\tau} &= \tfrac{1}{2}\left[K''' p_{2\sigma} - \mathcal{N}''' p_{4\sigma} + H''' p_{2\sigma} - H''' p_{1\sigma} + \bar{A}' p_{1\sigma} + \bar{A}'' p_{2\sigma} - \bar{A}'' p_{1\sigma}\right],\\
p_{4\tau} b^{(1)}_{\sigma\tau} &= \tfrac{1}{2}\left[K''' p_{1\sigma} - \mathcal{N}''' p_{3\sigma} - \bar{A}' p_{1\sigma} - \bar{A}'' p_{2\sigma} + \bar{A}'' p_{1\sigma} - {}_3 b^{(1)}_{\sigma}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Соотношения (5') взяты из /5/.

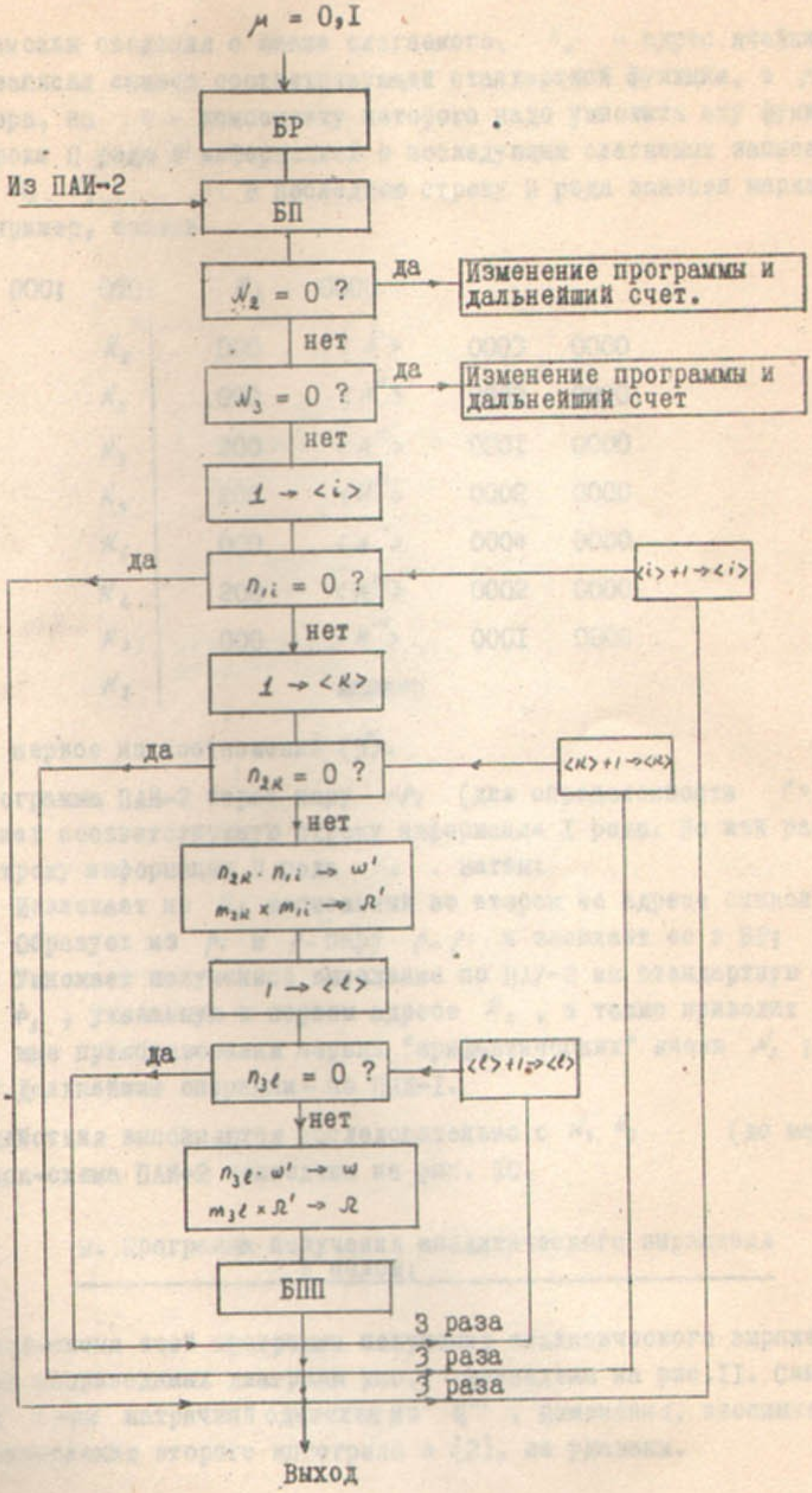
Информация о (5') записана следующим образом:

Каждому $p_{\ell\tau} b_{\sigma\tau}$ (ℓ = I,2,3,4) отвечает строка информации I рода, которая имеет вид:

$$000\,;\ kp_\ell\,,\ K_1\,,\ 0000$$

Здесь K_1 - адрес первой строки информации П рода к $p_{\ell\tau} b^{(1)}_{\sigma\tau}$. Каждая строка П рода кодирует одно из слагаемых правой части соотношений (5') и имеет следующую структуру:

$$\ell,\ 00\,;\ \Phi_k\,,\ 00\, p_i\,,\ 0000$$



μ = 0,I
БР
Из ПАИ-2
БП
$N_2 = 0$?
да
Изменение программы и дальнейший счет.
нет
$N_3 = 0$?
да
Изменение программы и дальнейший счет
нет
$1 \to \langle i \rangle$
да
$n_{1i} = 0$?
$\langle i \rangle + 1 \to \langle i \rangle$
нет
$1 \to \langle k \rangle$
да
$n_{2k} = 0$?
$\langle k \rangle + 1 \to \langle k \rangle$
нет
$n_{2k} \cdot n_{1i} \to w'$
$m_{2k} \times m_{1i} \to \Omega'$
$1 \to \langle \ell \rangle$
да
$n_{3\ell} = 0$?
$\langle \ell \rangle + 1 \to \langle \ell \rangle$
нет
$n_{3\ell} \cdot w' \to w$
$m_{3\ell} \times \Omega' \to \Omega$
БПП
3 раза
3 раза
3 раза
Выход

Рис. 9.

В ε_1 записаны сведения о знаке слагаемого, K_1 - адрес ячейки, в которой записан символ соответствующей стандартной функции, а ρ_i - символ вектора, на σ - компоненту которого надо умножить эту функцию.

Строки П рода с информацией о последующих слагаемых записаны в ячейках $K_2, K_3 \cdots$. В последнюю строку П рода занесен маркер.

Например, запись

000;	0501	K_1	0000	
K_1	000	$\langle A' \rangle$	0003	0000
K_2	000	$\langle A'' \rangle$	0002	0000
K_3	200	$\langle A''' \rangle$	000I	0000
K_4	200	$\langle K''' \rangle$	0002	0000
K_5	000	$\langle N''' \rangle$	0004	0000
K_6	200	$\langle H''' \rangle$	0002	0000
K_7	000	$\langle H'' \rangle$	000I	0000
K_8		маркер		

кодирует первое из соотношений (5').

Программа ПАИ-2 берет пару $\kappa\rho_\ell$ (для определенности $\ell > m$) и разыскивает соответствующую строку информации I рода. По ней разыскивает первую строку информации П рода K_1 . Затем:

I) Извлекает из K_1 записанный во втором ее адресе символ ρ_i ;

2) Образует из ρ_i и ρ_m пару $\rho_m\rho_i$ и засылает ее в БР;

3) Умножает полученное выражение по ПАУ-2 на стандартную функцию ϕ_1 ; указанную в первом адресе K_1 , а также приводит необходимые преобразования первых "арифметических" ячеек N_1 ;

4) Дальнейшие операции - по ПАИ-I.

Эти же действия выполняются последовательно с $K_2, K_3 \cdots$ (до маркера).

Блок-схема ПАИ-2 приведена на рис. I0.

9. Программа получения аналитического выражения в целом.

Блок-схема всей программы получения аналитического выражения для вклада от неприводимых диаграмм рис.I приведена на рис.II. Символ $Q_i^{(')}$ означает i-ый матричный одночлен из $Q^{(')}$. Изменения, вносимые в программу для вычисления второго интеграла в (2), не указаны.

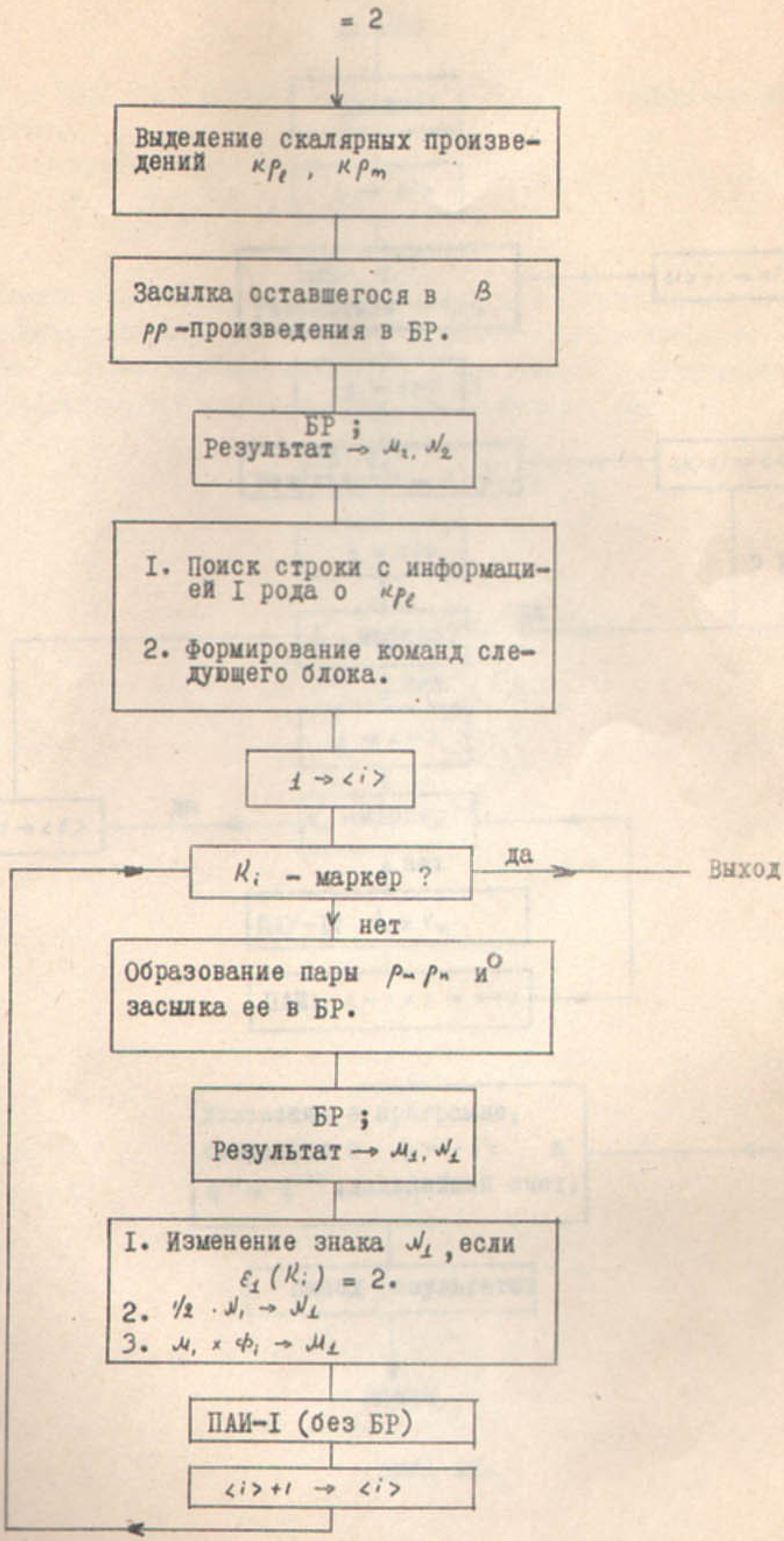

= 2
Выделение скалярных произведений кpℓ , кpm
Засылка оставшегося в pp-произведения в БР.
БР ;
Результат → μ1, ν2
I. Поиск строки с информацией I рода о кpℓ
2. Формирование команд следующего блока.
1 → ‹i›
Ki – маркер ?
да
Выход
нет
Образование пары p– p и засылка ее в БР.
БР ;
Результат → μ1, ν1
I. Изменение знака ν1 , если ε1 (Ki) = 2.
2. ½ · ν1 → ν1
3. μ1 × φi → μ1
ПАИ-I (без БР)
‹i›+1 → ‹i›

Рис. I0.

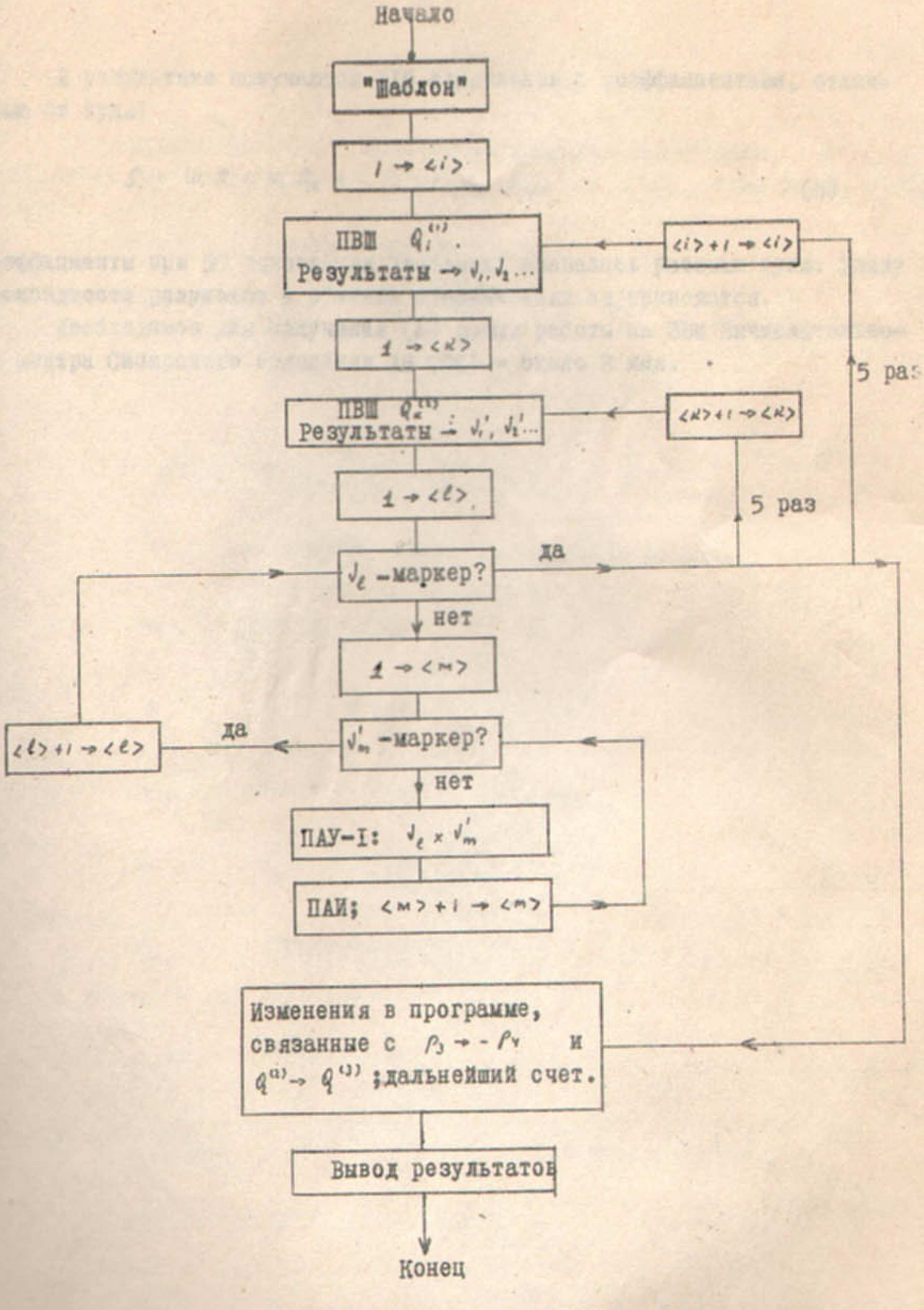

Начало
"Шаблон"
1 → <i>
ПВШ $Q_i^{(1)}$.
Результаты → $\nu_1, \nu_2 \ldots$
<i>+1 → <i>
5 раз
1 → <k>
ПВШ $Q_k^{(1)}$
Результаты → $\nu_1', \nu_2' \ldots$
<k>+1 → <k>
5 раз
1 → <l>
ν_l –маркер?
да
нет
1 → <m>
<l>+1 → <l>
да
ν_m' –маркер?
нет
ПАУ-I: $\nu_l \times \nu_m'$
ПАИ; <m>+1 → <m>
Изменения в программе, связанные с $\rho_3 \to -\rho_4$ и $Q^{(2)} \to Q^{(3)}$; дальнейший счет.
Вывод результатов
Конец

Рис. II.

В результате получаются 110 одночленов с коэффициентами, отличными от нуля:

$$S_1 = \omega_1 \Omega_1 + \omega_2 \Omega_2 + \ldots + \omega_{110} \Omega_{110} \tag{6}$$

Коэффициенты при 50 одночленах "шаблона" оказались равными нулю. Ввиду громоздкости результат в обычных обозначениях не приводится.

Необходимое для получения (6) время работы на ЭВМ Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР - около 8 мин.

III. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.

Арифметическая часть программы вычисляет инварианты и для заданных энергий процесса и угла рассеяния и стандартные функции задачи.

Стандартные функции имеют явный вид:

$$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{z(z+4)}} \left[\ln^2 \frac{1-\bar{\beta}}{\bar{\beta}} - \ln^2 \frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}} - 2\Phi\left(\frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}-1}\right) + 2\Phi\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}-1}\right) + \pi^2 \right],$$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\left[z+2+\sqrt{z(z+4)}\right], \quad \bar{\beta} = \frac{1}{2}\left[z+2-\sqrt{z(z+4)}\right],$$

$$\Phi(x) = -\int_0^x \frac{\ln|1-y|}{y}\, dy$$ – функция Спенса;

$$y(z) = m^{-2}\, y(z/m^2);$$

$$A' = \left(z y - 2\ln z/m^2\right)/(z+4m^2);$$

$$A'' = \left(2m^2 y + \ln z/m^2\right)/(z+4m^2);$$

$$\bar{A}' = -\left(z\bar{y} - 2\ln z\right)/(z+4);$$

$$\bar{A}'' = (2y + \ln z)/(z+4);$$

$$K''' = y''' + \mu''' \ln \lambda^2,$$

$$y''' = \frac{1}{\beta^2 \operatorname{sh} 2\theta} \left[(\gamma_1+\gamma_2)\ln(\beta \operatorname{ch}\theta) - \gamma_1 \ln \operatorname{ch}\gamma_1 - \gamma_2 \ln \operatorname{ch}\gamma_2 + L(\gamma_1) + L(\gamma_2) \right],$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Arth}\,(1-2\alpha)\,\mathrm{th}\,\theta\,, \quad \gamma_2 = \mathrm{Arth}\,(1+2\alpha)\,\mathrm{th}\,\theta\,,$$

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}\,(1+b/a)\,, \quad \mathrm{sh}^2\theta = a/4\beta^2\,, \quad \beta^2 = -(\alpha^2 a + \alpha b + c)\,,$$

$$a = -(\eta + 2m^2 + 2)\,, \quad b = \eta + 3m^2 + 1\,, \quad c = -m^2\,,$$

$$L(z) = \int\limits_0^z z'\,\mathrm{th}\,z'\,dz'\,,$$

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{2\beta^2\,\mathrm{sh}\,2\theta}\left(\mathrm{Arth}\,\frac{b}{2\beta^2\,\mathrm{sh}\,2\theta} - \mathrm{Arth}\,\frac{2a+b}{2\beta^2\,\mathrm{sh}\,2\theta}\right);$$

$$\rho^{(1)} = -\left(2\mu^{(1)}/\zeta\right)\ln\left(\zeta/\lambda^2\right)\,,$$

$$K^{(1)} = \left(1 - \frac{m^2-1}{a}\right)\mu^{(1)} - \frac{\ln m}{a}\,,$$

$$N^{(1)} = 2\mu^{(1)} - K^{(1)}\;;$$

величины с верхним индексом 2 получаются из соответствующих величин с верхним индексом I заменой:

$$\eta \to -\zeta - 2m^2 - 2\,,$$

что эквивалентно

$$p_3 \to -p_4$$

Все приведенные выражения (7), кроме A', A'', $\bar{A}'$, $\bar{A}''$, $H^{(1)}$ взяты из /5/.

Представляет некоторый интерес вычисление $\Phi(z)$ и $L(z)$, входящих в выражения для стандартных функций.

Для функции Спенса получено быстросходящееся в области $\mathrm{Re}\,z < \frac{1}{2}$, $|z| < 1$ разложение:

$$\Phi(z) = z + \tfrac{1}{2} + (1-z)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n S_n(u)\,,$$

$$S_n(u) = \sum_{k=2n+1}^{\infty}\frac{(-u)^k}{k!}\,, \quad u = \ln(1-z)\,,$$

B_n – числа Бернулли: $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, ... (8)

В остальной области изменения z могут быть использованы различные формулы приведения /II/.

Для функции $L(z)$ получены выражения:

$$L(z) = \frac{z^2}{2} - z \ln(1+t) + \frac{1}{2}\Phi(-t) - \frac{\pi^2}{24}, \quad t = e^{-2z}$$

$$(\mathrm{Re}\, z > 0, \ \mathrm{Im}\, z \neq 0)$$

$$L(iy) = i\left[\Psi\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{2}\ln|\cos y|\right],$$

$$(\mathrm{Im}\, y = 0, \ |y| < \pi)$$

$$\Psi(x) = x\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{2n+1}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n}\right],$$

$$\zeta(k) = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots$$ – функция Римана. (9)

Для вычисления $L(z)$ в области $\mathrm{Re}\, z < 0$ использовалась нечетность функции.

IУ. ПОЛУЧЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Выписывать явный вид (6), а затем "вручную" составлять программу для счета S_1 нерационально. В работе применен прием, который в принципе сводится к следующему:

Результаты арифметической части программы заносятся в ячейки, номер которых совпадает с двузначным кодом символа соответствующей стандартной функции. Например, $\ell^{(2)}$ заносится в ячейку 0013, $\mathcal{Y}$ – в 0001 и т.д. Затем специальная расшифровывающая программа извлекает в качестве первого сомножителя стандартную функцию, записанную в начале Ω_1, в качестве второго сомножителя – следующую стандартную функцию и т.д., перемножает их и умножает результат на ω_1. Аналогичные операции выполняются с $\omega_2 \Omega_2$ и т.д.

Для перехода от процесса $e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$ к другим электрон-мюонным процессам нужно лишь в определении ξ и η произвести замену:

I) $e^+ + \mu^- \to e^+ + \mu^-$

$p_1 \to -p_{2+}$, $p_2 \to -p_{1+}$, где p_{1+} и p_{2+} – 4-импульсы начального и конечного позитронов; смысл p_3 и p_4 – прежний

2) $e^+ + e^- \to \mu^- + \mu^+$

$p_1 \to p_-$, $p_2 \to -p_+$, $p_3 \to -\mathcal{P}_+$, $p_4 \to \mathcal{P}_-$, где p_- и p_+ – 4-импульсы соответственно электрона и позитрона, $\mathcal{P}_-$ и $\mathcal{P}_+$ – 4-импульсы соответственно отрицательного и положительного мюонов.

Примеры расчета вклада от неприводимых диаграмм приведены на рис.12 и 13. Энергия всюду в единицах mc^2, λ положено равным I. Как видно из результатов, приближение, принятое в /5/, является в рассматриваемой области энергий достаточно хорошим.

Время счета одной точки на ЭВМ Вычислительного центра СО АН СССР – около I сек.

Имеется также программа для расчета вклада δ_2 от радиационных поправок, связанных с вершинной частью и собственной массой фотона, и δ_3 – – поправки, связанной с излучением мягких квантов.

Пользуюсь случаем выразить благодарность кандидату физ.мат.наук В.Н.Байеру за инициирование работы и обсуждение результатов, доктору физ.мат.наук М.К.Фаге за обсуждение методики работы и И.Е.Смеловой за помощь в отладке арифметической части программы.

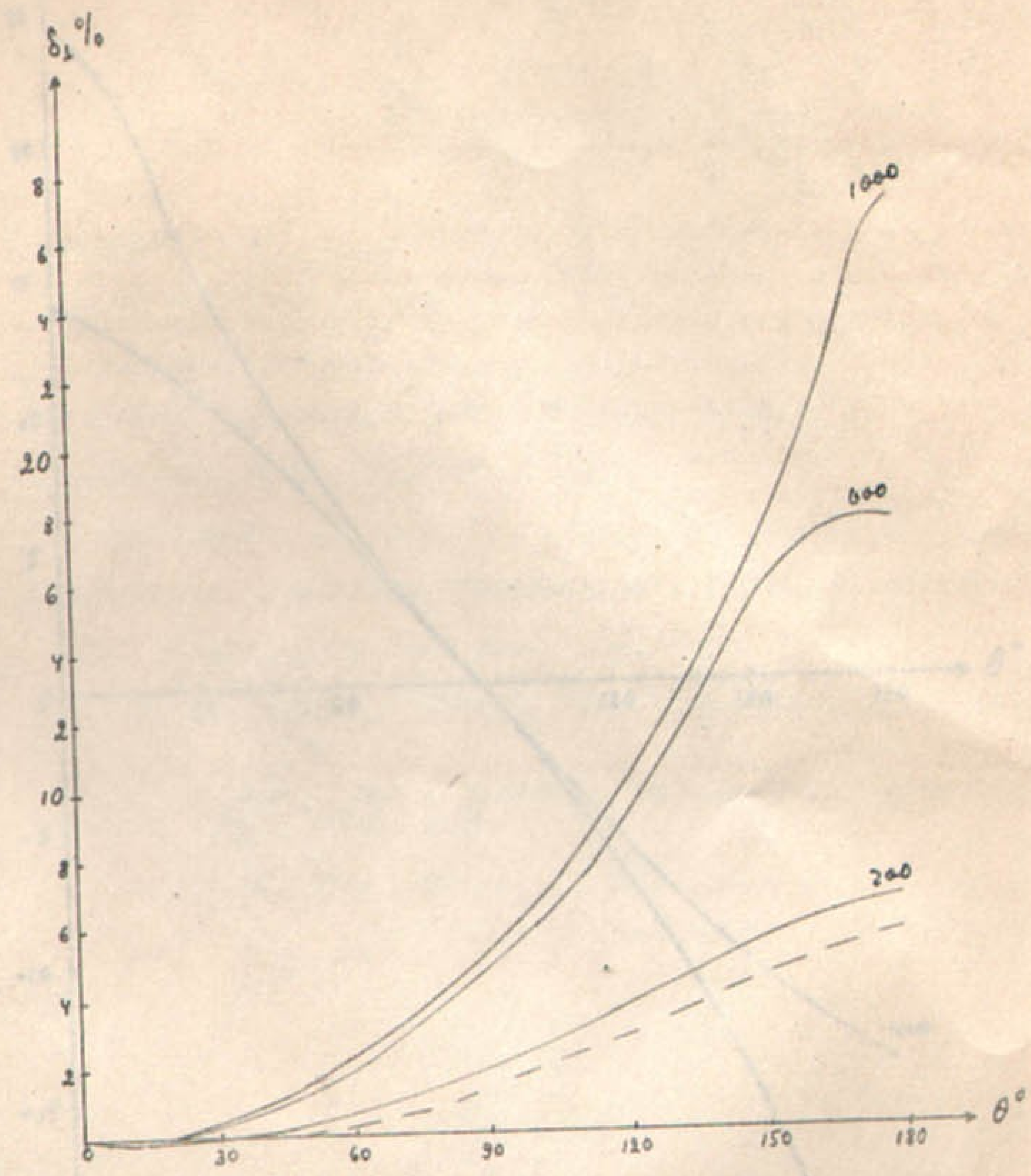


Рис. I2.

Вклад от неприводимых диаграмм для случая рассеяния частиц одного знака. Цифры на кривых - энергия налетающего электрона в с.ц.и. θ - угол рассеяния. В случае частиц разного знака δ_1 сохраняет абсолютную величину, но меняет знак. Пунктиром проведена кривая для ϵ = 200 из /5/.

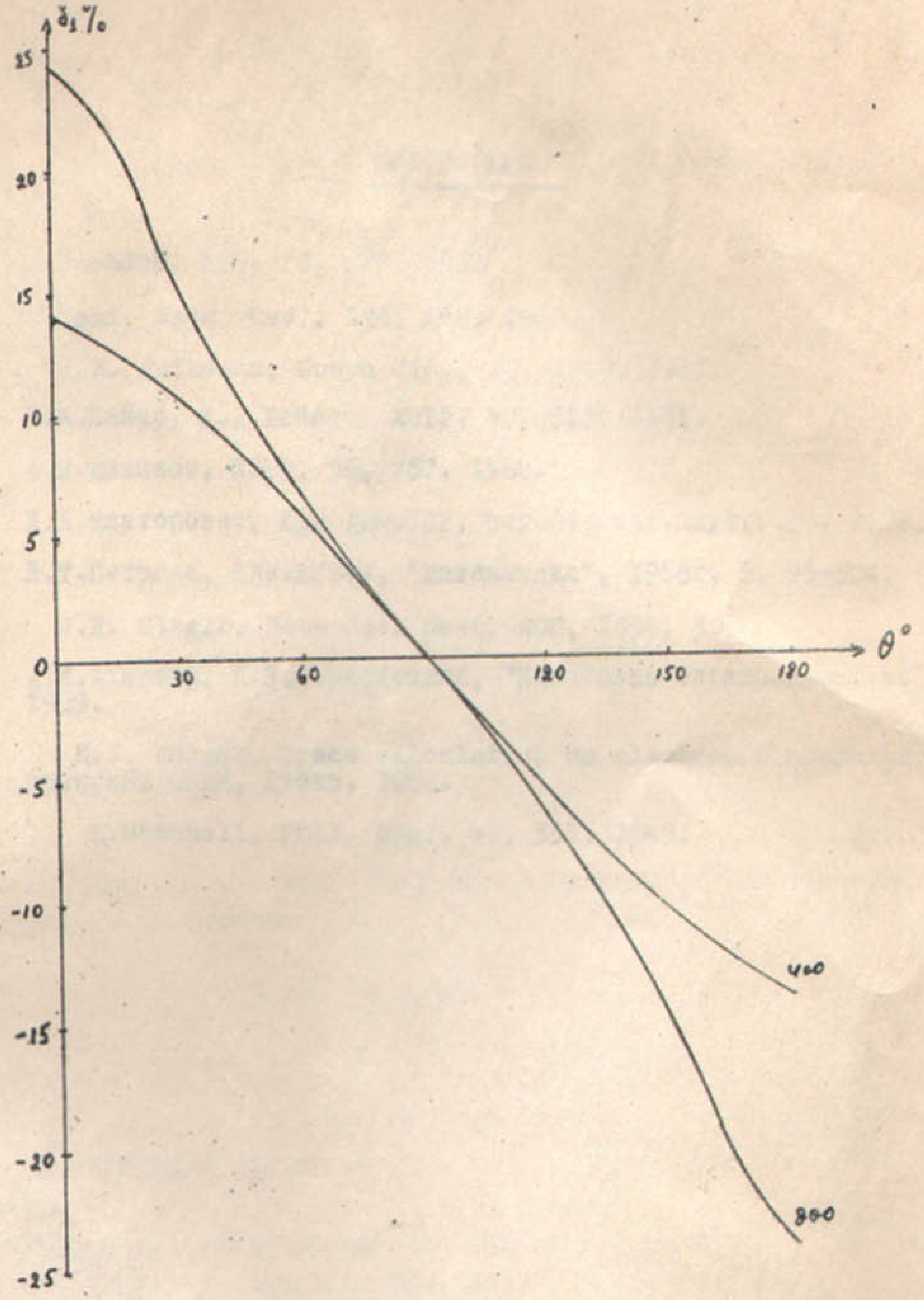


Рис. 13.

Вклад от неприводимых диаграмм для процесса $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$. Цифры на кривых - энергия электрона в с.ц.и. θ - угол между налетающим электроном и вылетающим μ^--мезоном в с.ц.и.

Литература

/1/ В.Н.Байер, УФН, 78, 620, 1962

/2/ Tsai, Phys. Rev., 120, 269, 1960.

/3/ K.E. Eriksson, Nuovo Cim., 19, 1029, 1961.

/4/ В.Н.Байер, С.А.Хейфец, ЖЭТФ, 40, 613, 1961.

/5/ А.И.Никишов, ЖЭТФ, 39, 757, 1960.

/6/ Л.В.Канторович, ИАН Арм.ССР, сер.физ.мат.наук,т.10, 2,3-16,1957.

/7/ Л.Т.Петрова, Изв.ВУЗов, "Математика", 1958г, 5, 95-104.

/8/ J.R. Slagle, 14th Nat. Meet. ACM, 1959, 30.

/9/ А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, "Квантовая электродинамика",М, 1959.

/10/ H.J. Kaiser, Trace calculation on electronic computer, препринт ОИЯИ, Дубна, 1962.

/11/ K.Mitchell, Phil. Mag., 40, 351, 1949.

Ответственный за выпуск В.В.Соколов
подписано к печати МН02721
формат бумаги 270 x 190, тираж 200
заказ № 024 · Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной
физики СО АН СССР.