

Б. 44

Киселев

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

ПРЕПРИНТ 37

С.Т. БЕЛЯЕВ

ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ВРЕМЕНИ САМОСОГЛАСОВАННОЕ ПОЛЕ

И КОЛЛЕКТИВНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН ЯДРА.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики Сиб. АН СССР
ИЗД. №

гор. Новосибирск
1964 год.

А Н Н О Т А Ц И Я

Получено выражение для коллективного гамильтониана H_c , исходя из общих "микроскопических" представлений. При этом не используются какие-либо приемы принудительного возбуждения, характерные для кренкинг-модели. Основным приближением является условие адиабатичности коллективных возбуждений. Метод вычисления параметров H_c иллюстрируется в модели "спаривание + квадрупольное взаимодействие". Формируется метод рассмотрения более реального взаимодействия.

В в е д е н и е

В последнее время четко определились два различных подхода к изучению коллективных возбуждений в ядрах. В одном из них принимается за основу некоторый феноменологический коллективный гамильтониан H_c (обычно близкий к первоначальному гамильтониану обобщенной модели О.Бора /1/). После этого задача состоит в решении соответствующего уравнения Шредингера с последующим выбором свободных параметров, входящих в H_c , из требования лучшего согласия с экспериментом /2-5/. Преимуществом этого метода является относительная простота и возможность одновременно рассматривать всю совокупность коллективных уровней данного ядра, а основным возражением является довольно произвольное постулирование коллективного гамильтониана.

Другой подход к исследованию коллективных возбуждений ядер — микроскопический. Исходным здесь является многочастичный гамильтониан, на основе которого рассматриваются возбуждения в системе нуклонов, имеющие коллективную природу /6-8/. В результате подобного рассмотрения удается вычислить характерные параметры коллективных возбуждений, не вводя дополнительных феноменологических констант. Подобный микроскопический подход является в принципе значительно более последовательным и результативным, однако вычислительные трудности сильно ограничивают его возможности. Практически удовлетворительные результаты получаются в случае вращений и гармонических колебаний. Если гармонические эффекты велики, то становится необходимым рассматривать высшие корреляционные функции (например, четырехчастичные функции Грина), что сильно усложняет вычисления /9/. Задача о связи колебаний и вращений также представляет большие трудности, т.к. вращения и колебания рассматриваются в этом методе принципиально различными способами (см. ниже). Случай чистого вращения четко выделен экспериментально. В этом случае микроскопический метод позволяет с хорошей точностью вычислить моменты инерции /10,11/. К сожалению, экспериментальные указания о характере других коллективных возбуждений в ядрах не являются столь однозначными. Поэтому последовательное теоретическое рассмотрение должно определить не только параметры возбуждений, но и их общую структуру и классификацию, что в рамках обычного микроскопического метода является сложной и громоздкой задачей.

Можно, однако, изменить цель микроскопического рассмотрения и вместо вычисления параметров возбуждений (моментов инерции, частот колебаний и т.д.) получить непосредственно коллективный гамильтониан H_c . После этого открывается возможность для использования преимуществ и простоты феномено-

логического метода без какой-либо неопределенности в выборе H_c .

Задача о нахождении H_c , исходя из структуры межуclidонного взаимодействия, решалась Керманом /12/ (без учета парной корреляции нуклонов) и Марумори и др. /13/, которые учитывали также куперовское спаривание. В обеих работах существенным образом использовались идеи кренкинг-модели. Понятие "кренкинг-модель" не является вполне определенным. В первой работе Инглиса, посвященной моментам инерции /21/, содержатся две различные идеи: 1) вращение рассматривается не как внутреннее возбуждение, а как вынуждаемое внешней силой; 2) используется адиабатическая теория возмущений для вычисления реакции системы на внешнее воздействие. Полностью избавиться от представлений кренкинг-модели удается лишь при микроскопическом рассмотрении возбуждений сферических ядер. Для деформированных ядер микроскопические методы, хотя и отказываются от второй-вычислительной-идеи кренкинг-модели, тем не менее вынуждены использовать первую идею в том или ином виде (переход во вращающуюся систему /10/, включение множителей Лагранжа /17/ и т.п.). Поэтому под понятием "кренкинг-модель" обычно понимают лишь ее вычислительную сторону — применение адиабатической теории возмущений. Этот метод, используемый в /12/ и /13/, не является строгим и приводит к заметным ошибкам, особенно при наличии спаривания между нуклонами. Это было продемонстрировано при вычислении моментов инерции. Их значения, полученные в рамках адиабатической теории возмущений /18/, отличаются от значений, полученных более строгими методами /10,17/. Аналогичное различие было найдено в массовых коэффициентах для β и γ -колебаний деформированных ядер /16/. Вне зависимости от величины численных поправок, исследование дополнительных членов имеет принципиальный интерес для выяснения области применимости кренкинг-модели.

В настоящей работе рассматривается метод получения коллективного гамильтониана H_c без привлечения как вычисленных, так и идейных концепций кренкинг-модели. Коллективные возбуждения системы последовательно рассматриваются как внутренние без привлечения каких-либо внешних возбудителей. Основным предположением является условие адиабатичности коллективных возбуждений, без которого задача об отделении коллективных степеней свободы от одночастичных и нахождении H_c вообще теряет смысл. Мы будем использовать метод зависящего от времени самосогласованного поля, что фактически включает следующие приближения: а) учет только парных корреляций и пренебрежение межуclidонными корреляциями более высокого порядка. Это является хорошим приближением по крайней мере для средних и тяжелых ядер. в) Коллективные возбуждения описываются квазиклассически. Строго говоря, это позволяет получить лишь классический аналог коллективного гамильтониана H_c . Предполагается, что квантовый гамильтониан может быть

затем восстановлен из классического.

Общая идея метода подробно обсуждается во втором разделе после предварительного анализа основных уравнений самосогласованного поля (раздел I). В 3 решается вспомогательная задача о статическом поле. Общие выражения для коллективного гамильтониана получены в 4. В разделе 5 рассмотрен вопрос о сохранении вращательной симметрии в приближенном решении и ее следствия. Вращательная часть коллективной кинетической энергии исследуется в 6. Значение момента инерции совпадает с полученным ранее методом функции Грина /10/ или обобщенного канонического преобразования /17/. В 7 анализируется общее выражение для кинетической энергии с учетом колебаний и вращений. Раздел 8 посвящен частному случаю квадрупольных деформаций самосогласованного поля, где получен аналог гамильтониана О.Бора для произвольного межнуклонного взаимодействия. В следующем разделе проводится вычисление параметров коллективного гамильтониана в известной модели "спаривание + квадрупольное взаимодействие". В этом случае результаты фактически совпадают с получаемыми в кренкинг-модели. Рассмотрению более реального взаимодействия посвящен 10-й раздел.

I. Метод самосогласованного поля.

Обобщение метода самосогласованного поля для систем с куперовским спариванием было проведено Н.Н.Боголюбовым /14/ (см. также /15/). Мы кратко сформулируем основные уравнения в несколько иной форме, более удобной для дальнейшего.

Рассмотрим систему нуклонов ядра, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид:

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{122'} \langle 12 | G | 12' \rangle a_1^{\dagger} a_2^{\dagger} a_2 a_1 \quad (I.1)$$

Здесь $\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\nu}^0 - \lambda \delta_{\nu}$ одночастичный гамильтониан, включающий химический потенциал системы λ , а G - взаимодействие (предполагаемое парным и антисимметризованным). Среди одночастичных состояний $| \nu \rangle$ удобно выделить пары состояний $(\nu, \bar{\nu})$, (I.1), переходящих друг в друга при обращении времени, которые будем именовать сопряженными. С учетом свойств оператора обращения времени T имеем^{x)}

x) Если $| \nu \rangle = | n j m \rangle$, где j, m - момент частицы и его проекция, а n - остальные квантовые числа, то $| \bar{\nu} \rangle = c_{j m} | n j -m \rangle$ и можно выбрать $c_{j m} = (-1)^{j-m}$. При этом $| \bar{\bar{\nu}} \rangle = c_{j m} c_{j -m} | n j m \rangle = - | \nu \rangle$

$$| \bar{\bar{\nu}} \rangle = \langle \nu | T^{-1} | \bar{\nu} \rangle = - | \nu \rangle \quad (I.2)$$

Для матричных элементов от одночастичных операторов

$$\langle \bar{\nu} | A | \bar{\nu} \rangle = \langle \nu | T^{-1} A T | \nu \rangle = \pm \langle \nu | A | \nu \rangle \quad (I.3)$$

где знак зависит от поведения A при инверсии времени. Для двухчастичного оператора определим

$$\langle 12' | G | 21' \rangle = \langle 12 | T_2^{-1} G_{12} T_2 | 2'1' \rangle \quad (I.4)$$

$$\langle 11' | G | 22' \rangle = \langle 12 | T_2^{-1} G_{12} T_1 | 2'1' \rangle \text{ и т.д.}$$

В частности, вследствие T -инвариантности ϵ и взаимодействия G имеем:

$$\epsilon_{\nu} = \epsilon_{\bar{\nu}}; \quad \langle 12 | G | 2'1' \rangle = \langle 12' | G | 21 \rangle^* \quad (I.5)$$

откуда следует, что энергии сопряженных состояний одинаковы. В связи с эквивалентностью сопряженных состояний удобно ввести комбинированные операторы

$$\psi(\nu) = \begin{pmatrix} a_{\nu} \\ i a_{\bar{\nu}}^{\dagger} \end{pmatrix}; \quad \psi^{\dagger}(\nu) = (a_{\nu}^{\dagger}, -i a_{\bar{\nu}}) \quad (I.6)$$

аргумент которых относится к паре сопряженных состояний (т.е. $\nu = 1, 2, 3, \dots$ но $\nu \neq \bar{\nu}, \bar{\bar{\nu}}, \dots$). Антиккоммутатор (I.6) равен:

$$\psi(\nu) \psi^{\dagger}(\nu) + \psi^{\dagger}(\nu) \psi(\nu) = \delta_{\nu \nu'}$$

Гамильтониан системы можно записать теперь в виде:^{x)}

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} \psi_{\nu} \psi_{\nu}^{\dagger} - \sum_{122'} \langle 12 | G_{12} | 2'1' \rangle \psi_1 \psi_2 \psi_2^{\dagger} \psi_1^{\dagger} + \frac{1}{2} \sum_{122'} \langle 12 | G_{12} | 2'1' \rangle \psi_1 \psi_2 \psi_1^{\dagger} \psi_2^{\dagger} \quad (I.7)$$

x) Гамильтониан (I.7) отличается от (I.1) несущественной постоянной и дополнительным слагаемым в ϵ .

где матрицы (обозначаемые здесь и ниже значком $\hat{}$) представляются в виде следующих комбинаций матриц Паули

$$\hat{G}_{12} = \frac{1}{2} (G_{12} - T_2^{-1} G_{12} T_2) + \frac{1}{2} (G_{12} + T_2^{-1} G_{12} T_2) \sigma_1^x \sigma_2^z - \frac{1}{2} T_2^{-1} G_{12} T_1 (\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) \quad (I.8)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon \sigma^z$$

Символ Sp означает шпур по комбинированным индексам (аргумент (v) + "спиновый" индекс (μ) : $\psi_{\mu}(v) = \psi(v, \mu)$), например

$$Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12} \psi_1 \psi_2^+ \} = \sum_{122'} \sum_{\mu\mu'} \langle 122' | \hat{G}_{12} | 2' \mu \mu' \rangle \psi(2, \mu) \psi^+(2, \mu')$$

Метод самосогласованного поля эквивалентен нахождению операторов квазичастиц \hat{a}_f в виде линейной комбинации исходных операторов a_v . При наличии куперовского спаривания \hat{a}_f и a_v связаны более общим преобразованием:

$$a_v = u_{vf} \hat{a}_f + v_{vf} \hat{a}_f^+ \quad (I.9)$$

$$a_v^+ = u_{vf}^* \hat{a}_f^+ - v_{vf}^* \hat{a}_f$$

(По повторяющимся индексам - суммирование). В "спиновом" представлении (I.6) это преобразование имеет вид

$$\psi(v) = \hat{U}(vf) \psi(f) = \hat{U}(vf) \begin{pmatrix} \hat{a}_f \\ i \hat{a}_f^+ \end{pmatrix} \quad (I.10)$$

где \hat{U} - унитарная матрица

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} u & -i v \\ -i v^* & \tilde{u}^* \end{pmatrix} \quad (I.11)$$

Согласно смыслу квазичастиц, их числа заполнения $\langle \hat{a}_f^+ \hat{a}_f \rangle = n_f$ имеют определенные значения ($n_f = 0, 1$) не только в стационарных состояниях системы, но и в самосогласованном поле, зависящем от времени. Введем обозначение

среднего по состоянию с определенными числами заполнения квазичастиц

$$\langle \psi \psi^+ \rangle = \frac{1}{2} (\hat{1} + \hat{\rho}) \quad (I.12)$$

Для квазичастичных операторов $\hat{\psi}$ и $\hat{\psi}^+$ имеем, очевидно,

$$\hat{\rho}_0(ff') = \delta_{ff'} \begin{pmatrix} 1-2n_f & 0 \\ 0 & 2n_f-1 \end{pmatrix} \quad (I.13)$$

откуда непосредственно видно, что собственные значения $\hat{\rho}_0$ равны ± 1 и поэтому

$$\hat{\rho}_0^2 = \hat{1} \quad (I.14)$$

Для исходных операторов ψ , ψ^+ аналогичное среднее равно

$$\hat{\rho}(vv') = \begin{pmatrix} 2 \langle a_v a_{v'}^+ \rangle - \delta_{vv'} & -2i \langle a_v a_{v'} \rangle \\ 2i \langle a_v^+ a_{v'} \rangle & 2 \langle a_v^+ a_{v'}^+ \rangle - \delta_{vv'} \end{pmatrix} \quad (I.15)$$

Из (I.10) следует связь между $\hat{\rho}$ и $\hat{\rho}_0$

$$\hat{\rho} = \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^{-1} \quad (I.16)$$

откуда с учетом (I.14), имеем:

$$\hat{\rho}(13) \hat{\rho}(32) = \delta(12) \quad (I.17)$$

При адиабатическом изменении самосогласованного поля числа заполнения квазичастиц сохраняются. Поэтому соотношение (I.17) остается справедливым, хотя связь квазичастиц с исходными частицами (матрица \hat{U} в (I.10)), а следовательно и величины $\hat{\rho}(vv')$ меняются со временем.

Уравнение для $\hat{\rho}$ в методе самосогласованного поля можно получить из уравнения для операторов ψ , ψ^+ в гайзенберговском представлении ($\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(v) \psi^+(v') = [\psi(v) \psi^+(v'); H] \quad (I.18)$$

Усредним (I.18) по независящему от времени состоянию с определенными часо-
лами заполнения квазичастиц. Расщепляя затем четверные средние согласно

$$\langle \psi(1) \psi(2) \psi^+(3) \psi^+(4) \rangle = \langle \psi(1) \psi^+(4) \rangle \langle \psi(2) \psi^+(3) \rangle - \langle \psi(1) \psi^+(3) \rangle \langle \psi(2) \psi^+(4) \rangle, \quad (I.19)$$

что означает пренебрежение четверными и более высокими корреляциями, по-
лучим основное уравнение обобщенного метода самосогласованного поля [14]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(12) = \hat{S}(13) \hat{\rho}(32) - \hat{\rho}(13) \hat{S}(32), \quad (I.20)$$

где

$$\hat{S}(11') = \hat{\epsilon}(11') - \langle 1 | S p_2 \{ G_{12} \hat{\rho}_2 \} | 1' \rangle \quad (I.21)$$

Уравнения (I.21) и (I.7) определяют величину $\hat{\rho}$ (I.15), которая, наряду с
матрицей плотности $\langle a_i a_i^+ \rangle$ включает также средние типа $\langle a_i a_j^+ \rangle$, характери-
зующие куперовское спаривание. Величину $\hat{\rho}(v v')$ естественно назвать
обобщенной матрицей плотности системы. Удобно рассматривать $\hat{\rho}(v v')$ и $\hat{S}(v v')$
как матричные элементы некоторых операторов

$$\hat{\rho}(v v') = \langle v | \hat{\rho} | v' \rangle; \quad \hat{S}(v v') = \langle v | \hat{S} | v' \rangle,$$

уравнения для которых согласно (I.17) и (I.20) имеют вид:

$$i \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \hat{S} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{S} \quad (I.22)$$

$$\hat{\rho}^2 = 1 \quad (I.23)$$

Вследствие (I.21) и (I.8) можно записать

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \epsilon & i\Delta \\ -i\Delta^+ & -T^{-1} \epsilon T \end{pmatrix} \quad (I.24)$$

где матричные элементы операторов ϵ и Δ равны^{x)}

x) Суммирование в (I.25) имеет как по состояниям v , так и \tilde{v} , член
в $\epsilon(11')$ с $\delta_{22'}$ компенсирует упоминавшееся переопределение $\epsilon_{11'}$ при пере-
ходе от (I.1) к (I.7).

$$\langle 1 | \Delta | 1' \rangle = \Delta(11') = - \sum_{22'} \langle 1 \tilde{1}' | G | \tilde{2} 2' \rangle \langle a_{\tilde{2}}^+ a_{2'} \rangle, \quad (I.25)$$

$$\langle 1 | \epsilon | 1' \rangle = \epsilon(11') = \epsilon_{11'} + \sum_{22'} \langle 12 | G | 12' \rangle (2 \langle a_{\tilde{2}}^+ a_{2'} \rangle - \delta_{22'})$$

Заметим, что операторы \hat{S} и $\hat{\rho}$ эрмитовские, как непосредственно видно
из (I.24) и (I.25).

Условие инвариантности относительно инверсии времени приводит к до-
полнительным свойствам симметрии для \hat{S} . Заметим, что обращение времени
означает замену состояний $(v, \tilde{v}) \rightarrow (\tilde{v}, -v)$ с одновременной заменой на-
чальных состояний на конечные, т.е. операторов рождения a^+ на операторы
 a . Инвариантность преобразований (I.9) при такой замене означает

$$U_{vt} = U_{\tilde{v}t}^+, \quad v_{vt} = v_{\tilde{v}t}^+ \quad (I.26)$$

Из (I.9) легко получить при этом равенство $\langle a_v a_{\tilde{v}'} \rangle = \langle a_{\tilde{v}}^+ a_{v'}^+ \rangle$ с уче-
том которого из (I.25) и (I.5) следует

$$\Delta(12) = \Delta^*(21), \quad \text{т.е. } \Delta = \Delta^+ \quad (I.27)$$

Согласно (I.27) и (I.24), условие T -инвариантности для оператора \hat{S}
можно записать в виде:

$$\sigma^x \hat{S} \sigma^x = -\hat{S} \quad (I.28)$$

Выделим в матрице плотности $\hat{\rho}$ члены с определенной T -четностью:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)} \quad (I.29)$$

где

$$\hat{\rho}^{(\pm)} = \frac{1}{2} (\hat{\rho} \mp \sigma^x \hat{\rho} \sigma^x) \quad (I.30)$$

Тогда уравнение (I.22) разбивается на два

$$[\hat{S}^{(+)}; \hat{\rho}^{(+)}] + [\hat{S}^{(-)}; \hat{\rho}^{(-)}] = -i \frac{\partial \hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)}}{\partial t} \quad (I.31)$$

$$\hat{L}(\hat{\rho}^{(+)}; \hat{\rho}^{(-)}) \equiv [\hat{S}^{(+)}; \hat{\rho}^{(+)}] + [\hat{S}^{(-)}; \hat{\rho}^{(-)}] = i \frac{\partial \hat{\rho}^{(+)} - \hat{\rho}^{(-)}}{\partial t} \quad (I.31)$$

Здесь $\hat{S}^{(\pm)}$ соответственно четные и нечетные части самосопряженного гамильтониана

$$\hat{S}_1^{(+)}(\rho^{(H)}) = \hat{\epsilon}_1 - Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(+)} \hat{\rho}_2^{(+)} \} \quad (I.32)$$

$$\hat{S}_1^{(-)}(\rho^{(H)}) = - Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(-)} \hat{\rho}_2^{(-)} \}$$

При получении (I.31) мы использовали \mathcal{T} -инвариантность взаимодействия, т.е.

$$\sigma_1^x \sigma_2^x G_{12} \sigma_2^x \sigma_1^x = \hat{G}_{12} \quad (I.32)$$

Отметим, что $\hat{S}^{(\pm)}$ определяются различными частями взаимодействия (I.8):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{12}^{(+)} &= \frac{1}{2} (\hat{G}_{12} - \sigma_2^x \hat{G}_{12} \sigma_2^x) = \\ &= \frac{1}{2} (G_{12} + T_2^{-1} G_{12} T_2) \sigma_1^z \sigma_2^z - \frac{1}{2} (T_2^{-1} G_{12} T_1) \sigma_1^x \sigma_2^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{12}^{(-)} &= \frac{1}{2} (\hat{G}_{12} + \sigma_2^x \hat{G}_{12} \sigma_2^x) = \\ &= \frac{1}{2} (G_{12} - T_2^{-1} G_{12} T_2) - \frac{1}{2} (T_2^{-1} G_{12} T_1) \sigma_1^x \sigma_2^x \end{aligned} \quad (I.33)$$

Вводя $\hat{\rho}^{(\pm)}$ в уравнение (I.23), находим:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)} &= 1 \\ \hat{\rho}^{(+)} \hat{\rho}^{(+)} + \hat{\rho}^{(-)} \hat{\rho}^{(-)} &= 0 \end{aligned} \quad (I.34)$$

Левая часть уравнения (I.31''), независимо от конкретного вида $\hat{\rho}^{(\pm)}$ удовлетворяет условию

$$Sp \{ \sigma^z \mathcal{L}(\hat{\rho}^{(+)}; \hat{\rho}^{(-)}) \} = 0 \quad (I.35)$$

в чем легко убедиться, используя лишь свойство \mathcal{T} -четности и структуру

$G_{12}^{(\pm)}$ (I.33). Естественно, что и для правой части (I.31'') должно быть

$$Sp \{ \sigma^z \frac{\partial \hat{\rho}^{(\pm)}}{\partial t} \} = 0 \quad (I.36)$$

Условие (I.36) имеет простой физический смысл. Его выполнение обеспечивает стационарность среднего числа частиц в системе, для которого в наших обозначениях имеем ^{x)}

$$N = -\frac{1}{2} Sp \{ \sigma^z \hat{\rho}^{(+)} \} \quad (I.37)$$

Среднее значение гамильтониана системы (I.7) в состоянии, описываемом обобщенной матрицей плотности $\hat{\rho}$, равно, согласно (I.12) и (I.19),

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{\epsilon} \hat{\rho} \} + \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12} \hat{\rho}_2 \hat{\rho}_1 \} \quad (I.38)$$

Вводя явно $\hat{\rho}^{(\pm)}$, имеем также

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{\epsilon} \hat{\rho}^{(+)} \} + \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(+)} \hat{\rho}_2^{(+)} \hat{\rho}_1^{(+)} \} + \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(-)} \hat{\rho}_2^{(-)} \hat{\rho}_1^{(-)} \} \quad (I.39)$$

Легко проверить дифференцированием (I.38) по времени, что уравнение (I.22) обеспечивает стационарность $\langle H \rangle$.

2. Схема решения основных уравнений.

Обобщенная матрица плотности $\hat{\rho}$ определена как диагональное среднее (I.12) по состояниям с определенными числами заполнения квазичастиц $|n_f\rangle$. Если бы система имела только одночастичные возбуждения, то подобные функции описывали бы точные стационарные состояния и величина $\hat{\rho}$ не зависела бы от времени. Если же истинные стационарные состояния системы $|\psi\rangle$ отличаются от $|n_f\rangle$, то величина $\langle n_f | \psi \psi^\dagger | n_f \rangle$ включает суперпозицию недиагональных матричных элементов по точным состояниям $\langle \psi | \psi \psi^\dagger | \psi \rangle$, содер-

x) Величина (I.37) на самом деле отличается от числа частиц N_0 постоянным членом $N_0 - N = \frac{1}{2} Sp \{ \hat{1} \}$, который ранее был отброшен также в H при переходе от (I.1) к (I.7).

мащих временную зависимость вида $\exp\{\frac{i}{\hbar}(E_\alpha - E_\beta)\}$. Таким образом, зависимость $\hat{\rho}$ от времени отражает факт существования коллективных возбуждений. Если искать решение уравнения (1.17) для $\hat{\rho}$ в виде постоянного члена и малой поправки $\hat{\rho}^{(1)} \sim \exp(-i\omega t)$, то мы найдем уравнение для частот малых колебаний ω [14, 16]. Для определения энергии вращательных возбуждений (момента инерции) такой метод не приводит к цели. В этом случае используют в том или ином виде прием "принудительного вращения" ("кренкинг-модель"). Например, переходят во вращающуюся систему, после чего возникающий в результате перехода член с угловой скоростью рассматривают от теории возмущений [16, 17]. Результаты, получаемые при этом как в случае колебаний, так и вращения, совпадают с результатами применения метода функций Грина [10] или другими "микроскопическими" методами.

Описанные способы изучения коллективных возбуждений не являются логически удовлетворительными в двух пунктах: 1) колебания и вращения описываются различными способами, что сильно затрудняет изучение их взаимодействия; 2) использование модели "принудительного вращения".

Мы рассмотрим другой метод решения уравнений, который позволит избежать указанных недостатков. Основным предположением является условие адиабатичности коллективных возбуждений. Это позволяет применять к уравнению (1.22) вместо обычной теории возмущений ("малые колебания") - адиабатическую.

Формальная схема решения состоит в следующем. Считая $\hat{\rho}$ медленно меняющейся функцией времени, будем разлагать систему (1.31) по параметру адиабатичности. Из структуры (1.31) видно, что $\hat{\rho}^{(2n)}$ будет содержать лишь четные, а $\hat{\rho}^{(2n+1)}$ - нечетные члены разложения:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^{(2n)} &= \hat{\rho}^{(2n,0)} + \hat{\rho}^{(2n,2)} + \dots \\ \hat{\rho}^{(2n+1)} &= \hat{\rho}^{(2n+1,1)} + \hat{\rho}^{(2n+1,3)} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

В нулевом приближении необходимо рассматривать уравнение

$$[\hat{S}(\rho^0); \hat{\rho}^0] = 0 \quad (2.2)$$

Поправка следующего порядка определится затем из уравнения

$$[\hat{S}(\rho^0); \hat{\rho}^{(1)}] + [\hat{S}^{(1)}; \hat{\rho}^0] = i \frac{\partial \hat{\rho}^{(1)}}{\partial t} \quad (2.3)$$

где согласно (1.32)

$$\hat{S}^{(1)} = \hat{S}^{(1)}(\rho^{(1)}) = -S\rho_2 \{ \hat{G}_{12}^{(1)} \hat{\rho}_2^{(1)} \} \quad (2.4)$$

Последовательное решение уравнений (2.2) и (2.3) означает разбиение физической задачи на два этапа: 1) нахождение матрицы плотности $\hat{\rho}^0$ при замороженном состоянии самосогласованного поля (ур. (2.2)) и 2) определение поправки $\hat{\rho}^{(1)}$, связанной с флуктуациями самосогласованного поля, т.е. его зависимость от времени (ур. (2.3)).

Рассмотрим сначала первый этап задачи, представляющий основную трудность вследствие нелинейности уравнения (2.2). Нашей целью будет замена (2.2) некоторым эквивалентным линейным уравнением.

Оператор \hat{S} в (1.22) и (2.2) имеет смысл самосогласованного одночастичного гамильтониана. Как видно из (1.24) и (1.25), элементы обобщенной матрицы плотности $\hat{\rho}$ входят в \hat{S} через величину куперовского спаривания Δ и самосогласованный потенциал $V = \epsilon - \epsilon$. В ядре величину Δ с хорошей точностью можно считать постоянной [10]. Что касается потенциала V , то обычно в задачу входит не его детальный вид, а лишь некоторые более грубые характеристики. Так, при изучении коллективных возбуждений ядра, связанных с квадрупольной анизотропией, достаточно рассматривать лишь компоненты квадрупольного момента Q_μ потенциала V . Эти соображения показывают, что хотя вид самосогласованного гамильтониана \hat{S} , строго говоря, определяется всей матрицей $\hat{\rho}$, фактически его можно характеризовать некоторым ограниченным числом параметров. (В упомянутом примере квадрупольных возбуждений - величинами Δ и Q_μ). Следующий шаг состоит в том, что мы забудем на время о том, что эти параметры являются функциями от $\hat{\rho}$, и будем считать их произвольными. В результате задача сводится к решению вместо (2.2) линейного уравнения

$$[\hat{S}^0; \hat{\rho}^0] = 0 \quad (2.5)$$

где \hat{S}^0 - эрмитовский оператор, не зависящий от $\hat{\rho}^0$, но содержащий некоторое число свободных параметров α .

Решение уравнения (2.5) определит матрицу плотности $\hat{\rho}^0(\alpha)$. После этого мы вспомним, что параметры α не являются произвольными, а в свою очередь зависят от вида $\hat{\rho}^0$. Поэтому для окончательного завершения за-

дачи необходимо потребовать выполнения условия согласования^{x)}

$$\Delta \hat{S}^0 \equiv \hat{S}(\rho^0(\omega)) - \hat{S}^0(\omega) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) решают задачу первого этапа о нахождении матрицы плотности в замороженном, не флуктуирующем самосогласованном поле, которое в нашем рассмотрении характеризуется некоторым набором параметров α

На следующем этапе мы размораживаем самосогласованное поле. Теперь величины α являются уже не фиксированными параметрами, а динамическими переменными ($\dot{\alpha} \neq 0$). Для флуктуирующих величин α статическое условие согласования (2.6) уже не выполняется ($\Delta \hat{S}^0 \neq 0$). Величина $\Delta \hat{S}^0$ характеризует теперь отклонение системы от равновесия, и является мерой потенциальной энергии флуктуаций. Поэтому при адиабатических флуктуациях $\Delta \hat{S}^0$ имеет второй порядок малости по $\dot{\alpha}$ ($\Delta \hat{S}^0 T$ - четно). Ограничиваясь членами первого порядка, ищем теперь решение в виде

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^0(\omega) + \hat{\rho}^1(\omega, \dot{\alpha}) \quad (2.7)$$

где $\hat{\rho}^0(\omega)$ - решение статического уравнения (2.5), а $\hat{\rho}^1(\omega)$ - поправка, связанная с флуктуациями и имеющая первый порядок по $\dot{\alpha}$. В (2.3) мы можем заменить $\hat{S}(\rho^0)$ на \hat{S}^0 и рассматривать для $\hat{\rho}^1$ уравнение

$$[\hat{S}^0; \hat{\rho}^1] + [\hat{S}^1; \hat{\rho}^0] = i \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \quad (2.8)$$

Для завершения решения необходимо сформулировать уравнения для α и $\dot{\alpha}$. Для этого рассмотрим среднее значение гамильтониана системы (I.38) в состоянии, описываемом матрицей плотности (2.7). В результате мы найдем энергию системы, как функцию α и $\dot{\alpha}$, которую можно рассматривать как гамильтониан, определяющий уравнения движения по переменным α . Естественно, что таким путем мы определим классический коллективный гамильтониан. Соответствующий квантовый оператор H_c может быть написан затем по обычным правилам.

Прежде чем переходить к практической реализации изложенной программы следует сделать одно уточнение. Как известно, в обобщенном методе са-

x) Строго говоря, уравнение согласования получается из условия $\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \alpha} = 0$ что совпадает с (2.6) в случае одинаковой операторной зависимости у \hat{S}^0 и $\hat{S}(\rho^0)$. См. ниже (4.23).

мосогласованного поля (как и в других методах учета куперовского спаривания), строго говоря, производится рассмотрение физической системы не с определенным числом частиц ("N-система"), а с фиксированным значением химического потенциала ("λ-система"). Справедливость такой замены оправдана, когда флуктуации числа частиц в λ-системе не существенны. Однако в некоторых случаях отличие λ и N-систем является принципиальным, т.к. в λ-системе возможны возбуждения, связанные с изменением среднего числа частиц. Естественно, что в N-системе возбуждения подобного типа ("духовые состояния") физически невозможны. Для корректного выделения духовых состояний нужно для рассмотрения коллективных возбуждений перейти в N-систему. Коллективным гамильтонианом вместо (I.38) следует считать

$$\langle H \rangle_N = \langle H \rangle + \lambda N \quad (2.9)$$

а химический потенциал λ, определяемый из уравнения (ср. I.37)

$$N = -\frac{1}{T} \text{Sp} \{ \sigma^z \hat{\rho}^0 \} \quad (2.10)$$

следует рассматривать теперь как функцию параметров α.

К сделанному выше заключению можно прийти и чисто формальным путем, т.к. уравнение (2.8), являющееся первым приближением для (I.31''), разрешимо лишь при условии (см. I.36)

$$\text{Sp} \{ \sigma^z \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \} = 0 \quad (2.11)$$

т.е. постоянном числе частиц (2.10). Для выполнения (2.11) необходимо считать λ определенной функцией параметров α.^{x)}

3. Статическое самосогласованное поле.

Для решения статического уравнения (2.5) необходимо установить некоторые общие свойства оператора \hat{S}^0 , моделирующего самосогласованный гамильтониан $\hat{S}^0(\rho^0)$. Прежде всего естественно считать $\hat{S}^0 T$ - четной величиной, удовлетворяющей соотношению (ср. I.28)

$$\sigma^x \hat{S}^0 \sigma^x = -\hat{S}^0 \quad (3.1)$$

x) Можно показать, используя (2.8) и уравнения следующих приближений, что (2.11) обеспечивает стационарность N и в более высоких порядках. Поэтому можно определять λ из уравнения (2.10), содержащего только $\hat{\rho}^0$, не подправляя это значение в следующем приближении.

Из (3.1) сразу следует, что если ψ - собственный вектор \hat{S}^0 с собственным значением E , то величина

$$\chi = \sigma^x \psi \quad (3.2)$$

также является собственным вектором \hat{S}^0 с собственным значением $-E$. Таким образом, собственные вектора \hat{S}^0 группируются в сопряженные пары (ψ, χ) с собственными значениями, отличающимися только знаком. Запишем разложения ψ и χ по базисным функциям $|i\rangle$ в виде

$$\psi_i = |2\rangle \psi(2i), \quad \chi_i = |2\rangle \chi(2i) \quad (3.3)$$

и соответственно для сопряженных состояний

$$\psi_i^+ = \langle 2i | \psi^+, \quad \chi_i^+ = \langle 2i | \chi^+ \quad (3.4)$$

Здесь коэффициенты разложения $\psi(2i)$ и $\chi(2i)$ - двухкомпонентные столбцы, а $\psi^+(2i)$ и $\chi^+(2i)$ - строки. По повторяющимся индексам проводится суммирование. Оператор \hat{S}^0 в этом представлении имеет вид:

$$\hat{S}^0 = |1\rangle \hat{S}^0(12) \langle 2| \quad (3.5)$$

Ниже мы будем опускать аргументы у ψ, χ, S , записывая все равенства в символическом виде. Явная структура выражений легко восстанавливается из (3.3-5). Имеем уравнения для собственных векторов

$$\begin{aligned} \hat{S}^0 \psi &= \psi E, & \psi^+ \hat{S}^0 &= E \psi^+ \\ \hat{S}^0 \chi &= -\chi E, & \chi^+ \hat{S}^0 &= -E \chi^+ \end{aligned} \quad (3.6)$$

(Здесь E следует считать диагональной матрицей в гильбертовом пространстве $E(1)$. В матричном виде $\psi E \rightarrow \psi(12)E(2)$ и т.д.). Вектора ψ и χ удовлетворяют обычным условиям ортонормировки

$$\psi^+ \psi = \chi^+ \chi = 1, \quad \chi^+ \psi = \psi^+ \chi = 0 \quad (3.7)$$

Заметим, что матрицы $\varphi\varphi^+, \chi\chi^+, \varphi\chi^+, \chi\varphi^+$ образуют полный набор двух-
матриц. Поэтому произвольный "спинорный" оператор \hat{K} может быть
представлен в виде разложения

$$\hat{K} = \varphi a \varphi^+ + \chi b \chi^+ + \varphi c \chi^+ + \chi d \varphi^+ \quad (3.8)$$

где $a = a(n)$, b, c, d - скалярные операторы. Легко убедиться, в част-
ности, что единичный оператор и \hat{S}^0 имеют разложения

$$\varphi\varphi^+ + \chi\chi^+ = \hat{1}, \quad (3.9)$$

$$\hat{S}^0 = \varphi E \varphi^+ - \chi E \chi^+. \quad (3.10)$$

Величина $\hat{\rho}^0$, удовлетворяющая уравнениям (1.23) и (2.5), в общем случае
может быть представлена как

$$\hat{\rho}^0 = \varphi(1-2n)\varphi^+ - \chi(1-2n)\chi^+ \quad (3.11)$$

где n - операторы чисел квазичастиц. В дальнейшем мы ограничимся рассмот-
рением только основного состояния четного ядра, для которого все $n_i = 0$.
Поэтому будем считать

$$\hat{\rho}^0 = \varphi\varphi^+ - \chi\chi^+ \quad (3.12)$$

Векторы φ и χ можно выразить через коэффициенты преобразования
Боголюбова (1.9). Для этого заметим, что φ и χ являются собственными
векторами $\hat{\rho}^0$ с собственными значениями 1 и -1 соответственно. (Это с
очевидностью следует из (3.12) и (3.7)). С другой стороны, из (1.15) и
(1.13) следует

$$\hat{\rho}^0 \hat{U} = \hat{\rho}^0 \hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{U},$$

откуда видно, что столбцы матрицы \hat{U} обладают тем же свойством. Поэтому
с учетом (1.11) и (1.25) можно написать

$$\varphi(n) = \begin{pmatrix} u_{12} \\ -i v_{12} \end{pmatrix}; \quad \chi(n) = \begin{pmatrix} -i v_{12} \\ u_{12} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Явное выражение для φ и χ можно получить, если предположить, что
 $\hat{S}^0(n)$ допускает последовательную диагонализацию сначала по аргументам
(12), а затем уже в двумерном спинорном пространстве. Принимая во внима-
ние (3.1), можно в общем случае представить \hat{S}^0 в виде (ср. I.24)

$$\hat{S}^0 = \begin{pmatrix} \epsilon & i\Delta \\ -i\Delta & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

где ϵ и Δ эрмитовские операторы. Сделав, как выше предположение означа-
ет, что ϵ и Δ можно диагонализировать одновременно.^{x)} После этого
двухрядная матрица (3.14) $\hat{S}^0(n) = \delta_{12} \hat{S}^0(1)$ может быть диагонализиро-
вана обычным u, v - преобразованием Боголюбова. В рассматриваемом прибли-
жении

$$\varphi_v = |v\rangle \begin{pmatrix} u_v \\ -i v_v \end{pmatrix}; \quad \chi_v = |v\rangle \begin{pmatrix} -i v_v \\ u_v \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

где $|v\rangle$ - одночастичные состояния, диагонализующие ϵ и Δ , а пара-
метры u_v, v_v определяются из равенств

$$u_v^2 + v_v^2 = 1; \quad u_v^2 - v_v^2 = \frac{\epsilon_v}{E_v}; \quad 2u_v v_v = \frac{\Delta_v}{E_v}; \quad (3.16)$$

$$E_v \equiv E(v) = \sqrt{\epsilon_v^2 + \Delta_v^2}$$

Выпишем в заключение выражения для матричных элементов между χ^+ и φ
(3.15):

$$\begin{aligned} \chi_1^+ \varphi_2 &= -i \eta_{12}^{(+)}; & \chi_1^+ \varphi_2 &= i \eta_{12}^{(-)}; \\ \chi_1^+ \varphi_2 &= i \bar{\eta}_{12}^{(+)}; & \chi_1^+ \varphi_2 &= \bar{\eta}_{12}^{(-)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{12}^{(+)} &= u_1 u_2 \mp v_1 v_2 \\ \eta_{12}^{(+)} &= u_1 v_2 \pm v_1 u_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Отметим еще полезные при вычислениях соотношения для билинейных комбина-
ций (3.18)

^{x)} Как отмечалось выше, в ядре величину Δ с хорошей точностью можно
считать постоянной, что оправдывает рассматриваемое приближение.

$$\eta_{12}^{(\pm)^2} = 1 - \bar{\eta}_{12}^{(\pm)^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{E_1 E_2} \pm \frac{\Delta_1 \Delta_2}{E_1 E_2} \right) \quad (3.14)$$

$$\eta_{12}^{(+)} \eta_{12}^{(-)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{E_1} - \frac{\epsilon_2}{E_2} \right); \quad \bar{\eta}_{12}^{(+)} \bar{\eta}_{12}^{(-)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{E_1} + \frac{\epsilon_2}{E_2} \right);$$

$$\bar{\eta}_{12}^{(\pm)} \eta_{12}^{(\pm)} = \frac{1}{2E_1 E_2} (\epsilon_1 \Delta_2 \pm \epsilon_2 \Delta_1); \quad \bar{\eta}_{12}^{(+)} \bar{\eta}_{12}^{(-)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2}{E_2} \pm \frac{\Delta_1}{E_1} \right)$$

Выражения (3.15) - (3.19) используются ниже лишь для приведения окончательных результатов к более наглядному и привычному виду. При выводе общих результатов приближение (3.15) не является необходимым.

4. флуктуирующее самосогласованное поле.

Перейдем к рассмотрению уравнения (2.8) для $\hat{\rho}^{(1)}$ -поправки к $\hat{\rho}^0$, связанной с флуктуациями самосогласованного поля. Из (1.23) или (1.34) следует:

$$\hat{\rho}^0 \hat{\rho}^{(1)} + \hat{\rho}^{(1)} \hat{\rho}^0 = 0 \quad (4.1)$$

Умножая (4.1) слева на ψ^+ и справа на ψ , а затем соответственно на χ и χ^+ , получим с учетом (3.7) и (3.12)

$$\psi^+ \hat{\rho}^{(1)} \psi = \chi^+ \hat{\rho}^{(1)} \chi = 0 \quad (4.2)$$

Принимая также во внимание отрицательную четность $\hat{\rho}^{(1)}$ относительно инверсии времени

$$\sigma^x \hat{\rho}^{(1)} \sigma^x = \hat{\rho}^{(1)} \quad (4.3)$$

мы можем искать $\hat{\rho}^{(1)}$ в виде (ср. 3.8)

$$\hat{\rho}^{(1)} = 2 (\chi Z \psi^+ + \psi Z \chi^+) \quad (4.4)$$

Для определения скалярной матрицы $Z = Z(11')$ подставим (4.4) в уравнение (2.8). Учитывая (3.6), найдем

$$2\psi (Ez + zE) \chi^+ - 2\chi (Ez + zE) \psi + [\hat{S}^{(1)}, \hat{\rho}^0] = i \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \quad (4.5)$$

Умножая (4.5) на χ^+ и ψ , получим скалярное уравнение

$$Ez + zE - \chi^+ \hat{S}^{(1)} \psi = -\frac{i}{2} \chi^+ \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \psi \quad (4.6)$$

Производную от $\hat{\rho}^0$ удобно выразить через \hat{S}^0 . Дифференцируя с этой целью уравнение (2.5), после очевидных преобразований получим

$$E \chi^+ \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \psi + \chi^+ \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \psi E = 2 \chi^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi \quad (4.7)$$

Для матричных элементов это соотношение принимает вид

$$E_{11'} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial t} \psi_{1'}) = 2 (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_{1'}) \quad (4.8)$$

где для сокращения дальнейших выражений введено обозначение

$$E_{11'} = E_1 + E_{1'} \quad (4.9)$$

с учетом (4.8) уравнение (4.6) преобразуется к

$$E_{11'} Z(11') - (\chi_1^+ \hat{S}^{(1)} \psi_{1'}) = -\frac{i}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_{1'}) \equiv R(11') \quad (4.10)$$

аналогичное выражение $\hat{S}^{(1)}$ через Z нетрудно получить из (2.4)

$$(\chi_1^+ \hat{S}^{(1)} \psi_{1'}) = -4 \sum_{22'} (\chi_1^+ \chi_2^+ G_{12}^{(-)} \psi_{2'} \psi_{1'}) Z(22') \quad (4.11)$$

Таким образом (4.10) является линейным уравнением интегрального типа относительно $Z(11')$. Разрешив (4.10), мы найдем затем $\hat{\rho}^{(1)}$ с помощью (4.4)

Установим теперь некоторые свойства поправки второго порядка $\hat{\rho}^{(2)}$. члены 2-го порядка в уравнении (1.23) имеют вид

$$\hat{\rho}^0 \hat{\rho}^{(2)} + \hat{\rho}^{(2)} \hat{\rho}^0 + \hat{\rho}^{(1)} \hat{\rho}^{(1)} = 0 \quad (4.12)$$

Подставляя для $\hat{\rho}^0$ и $\hat{\rho}^{(1)}$ выражения (3.12) и (4.4), после очевидных преобразований с использованием ортогональности φ и χ находим

$$\varphi + \hat{\rho}^{(2)} \varphi = -\chi + \hat{\rho}^{(2)} \chi = -2Z Z \quad (4.13)$$

Из (4.13) с учетом (3.10) легко получить соотношение

$$Sp \{ \hat{S}^0 \hat{\rho}^{(2)} \} = -2 \sum_{11'} E_{11'} Z(11') Z(1'1) \quad (4.14)$$

Перейдем теперь к определению энергии системы в состоянии, характеризуемом обобщенной матрицей плотности $\hat{\rho}^0 + \hat{\rho}^{(1)} + \hat{\rho}^{(2)}$. Из (1.39), сохраняя только члены нулевого порядка, имеем

$$\langle H \rangle^0 = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{\epsilon} \hat{\rho}^0 \} + \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(1)} \hat{\rho}_2^0 \hat{\rho}_1^0 \} \equiv U - \lambda N \quad (4.15)$$

Члены первого порядка в (1.39), как и следовало ожидать, отсутствуют. Во втором порядке

$$\langle H \rangle^{(2)} = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{S}^0 \hat{\rho}^{(2)} \} + \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(2)} \hat{\rho}_2^{(1)} \hat{\rho}_1^{(1)} \} \equiv T \quad (4.16)$$

Принимая во внимание (4.14), убеждаемся, что оба члена в (4.16) являются квадратичными функциями скоростей z ($\rho^{(1)} \sim z \sim d$). Таким образом, (4.15) и (4.16) можно рассматривать соответственно как потенциальную U и кинетическую T энергии коллективного движения. Последний член в (4.16) согласно (4.4) и (4.11) можно записать также в другом виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(2)} \hat{\rho}_2^{(1)} \hat{\rho}_1^{(1)} \} &= 4 \sum_{12'1'2'} (\chi_1^+ \chi_2^+ \hat{G}_{12}^{(2)} \varphi_2 \varphi_1) Z(1'1') Z(2'2) = \\ &= \sum_{11'} (\chi_1^+ \hat{S}^{(1)} \varphi_1) Z(1'1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Используя (4.14) и (4.17), получим для кинетической энергии

$$T = \sum_{11'} \{ E_{11'} Z(11') - (\chi_1^+ \hat{S}^{(1)} \varphi_1) \} Z(1'1) \quad (4.18)$$

что с учетом уравнения (4.10) можно записать в двух эквивалентных формах^{x)}

$$T = -i \sum_{11'} \frac{1}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) Z(1'1) = \quad (4.19')$$

$$= \sum_{11'} \frac{1}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) - i \sum_{11'} \frac{1}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) (\chi_1^+ \hat{S}^{(1)} \varphi_1) \quad (4.19'')$$

Потенциальная энергия (4.15) также может быть записана в другой форме, если использовать определение (1.32) для $\hat{S}(\rho^0)$ - (2.6) для $\Delta \hat{S}^0$

$$U = \lambda N - \frac{1}{2} Sp \{ \hat{S}^0 \hat{\rho}^0 \} - \frac{1}{2} Sp \{ \Delta \hat{S}^0 \hat{\rho}^0 \} - \frac{1}{4} Sp_1 Sp_2 \{ \hat{G}_{12}^{(1)} \hat{\rho}_2^0 \hat{\rho}_1^0 \} = \quad (4.20')$$

$$= \lambda N - \frac{1}{2} Sp \{ \hat{\epsilon} \hat{\rho}^0 \} - \frac{1}{2} Sp \{ \hat{S}^0 \hat{\rho}^0 \} - \frac{1}{4} Sp \{ \Delta \hat{S}^0 \hat{\rho}^0 \} \quad (4.20'')$$

Первые два члена в (4.20') совпадают с энергией нуклонов во внешнем поле \hat{S}^0 , в то время как два последних обязаны самосогласованной природе потенциала. Отметим простую форму для производной от U по параметру α , входящему в \hat{S}^0 . Из (4.15) с учетом (2.10) находим

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{S}^0(\rho^0) \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial \alpha} \} \quad (4.21)$$

Заметим теперь, что соотношения (4.1) и (4.2) остаются справедливыми при замене $\rho^{(1)}$ на $\frac{\partial \rho^0}{\partial \alpha}$. Отсюда следует согласно (3.10)

$$Sp \{ \hat{S}^0 \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial \alpha} \} = 0 \quad (4.22)$$

Поэтому вместо (4.21) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} Sp \{ \Delta \hat{S}^0 \frac{\partial \hat{\rho}^0}{\partial \alpha} \} \quad (4.23)$$

Учитывая теперь соотношение (4.8), справедливое для производной по любому параметру, получим из (4.23)

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 2 \sum_{11'} \frac{1}{E_{11'}} (\chi_1^+ \Delta \hat{S}^0 \varphi_1) (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \varphi_1) \quad (4.24)$$

x) Отметим, что кренкинг-модель дает лишь первый член в (4.19').

Используя (4.16), можно найти производную по α от кинетической энергии. Вычисления элементарны, хотя и громоздки, и проводятся путем дифференцирования основных уравнений (2.5), (2.8) и (1.23).

В результате найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \alpha} = & -2 \left(\psi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_2 \right) Z(23) Z(31) - 2i \frac{1}{E_{12}} \left(\chi_1^+ \frac{\partial^2 \hat{S}^0}{\partial \alpha \partial t} \psi_2 \right) Z(21) + \\ & + 2 \frac{1}{E_{12}} \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_2 \right) \left[Z(23) (\psi_3^+ \hat{S}^0 \psi_1) - (\psi_2^+ \hat{S}^0 \psi_3) Z(31) \right] + \\ & + \frac{2i}{E_{12}} Z(21) \left[\frac{1}{E_{32}} (\psi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_3) (\chi_3^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_2) + \frac{1}{E_{13}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_2) (\psi_3^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_2) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E_{32}} (\psi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_3) (\chi_3^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_2) + \frac{1}{E_{13}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha} \psi_3) (\psi_3^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \psi_2) \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

(В правой части по всем аргументам суммирование).

5. Симметрия относительно вращений.

Замена самосогласованного гамильтониана $\hat{S}(\rho)$ на \hat{S}^0 формально означает переход от изолированной системы к системе во внешних полях, характеризуемых параметрами α . При этом исчезает симметрия относительно вращений, существовавшая в исходной системе. Можно, однако, утверждать, что состояние системы не изменится при ее вращении с одновременным поворотом внешних полей. Рассмотрим к чему приводит требование такой инвариантности.

Оператор момента в "спинорном" представлении (1.6) записывается как

$$\vec{I} = \sum_{(i\bar{i})} \langle i | \vec{I} | i \rangle a_i^+ a_i = \frac{1}{2} Sp \vec{I} - Sp \{ \vec{I} \psi \psi^+ \} \quad (5.1)$$

где

$$\vec{I}(12) = \begin{pmatrix} \langle 1 | \vec{I} | 2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle 1 | \vec{I} | 2 \rangle \end{pmatrix} = \langle 1 | \vec{I} | 2 \rangle \cdot \hat{I} \quad (5.2)$$

Изменение $\hat{S}^0(\alpha)$ при вращении системы (внешние поля фиксированы) определяется оператором поворота $i \delta \vec{v} \vec{I}$.

В результате

$$\delta' \hat{S}^0 = i \delta \vec{v} (\vec{I} \hat{S}^0 - \hat{S}^0 \vec{I}) \quad (5.3)$$

Рассмотрим теперь изменение \hat{S}^0 при вращении полей. Для определенности будем считать, что в качестве параметров α используется набор мультипольных моментов $\alpha_{\lambda\mu}$. Это означает, что самосогласованное поле ядра характеризуется его мультипольными моментами. При бесконечно малом повороте $\alpha_{\lambda\mu} \rightarrow \alpha_{\lambda\mu} + \delta \alpha_{\lambda\mu}$ мультипольные моменты $\alpha_{\lambda\mu}$ меняются согласно

$$\delta \alpha_{\lambda\mu} = i \delta \vec{v} \cdot \alpha_{\lambda\mu'} (\lambda \mu' | \vec{I} | \lambda \mu) \quad (5.4)$$

где $(\lambda \mu' | \vec{I} | \lambda \mu)$ — известные матричные элементы момента между состояниями с определенными значениями $I = \lambda$ и $I_z = \mu, \mu'$. (По повторяющимся индексам — суммирование). Соответствующее изменение \hat{S}^0 равно

$$\delta'' \hat{S}^0 = i \delta \vec{v} \cdot \alpha_{\lambda\mu'} (\lambda \mu' | \vec{I} | \lambda \mu) \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \quad (5.5)$$

Приравняв нулю суммарное изменение $\delta \hat{S}^0 = \delta' \hat{S}^0 + \delta'' \hat{S}^0$ при одновременном повороте системы и внешних полей, получим из (5.3) и (5.5)

$$\alpha_{\lambda\mu'} (\lambda \mu' | \vec{I} | \lambda \mu) \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} = \hat{S}^0 \vec{I} - \vec{I} \hat{S}^0 \quad (5.6)$$

Умножая (5.6) на $\chi_i^+ \psi$ — собственные вектора оператора \hat{S}^0 — находим

$$\alpha_{\lambda\mu'} (\lambda \mu' | \vec{I} | \lambda \mu) \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) = -E_{12} (\chi_1^+ \vec{I} \psi_2) \quad (5.7)$$

Соотношение (5.7) устанавливает связь между матричными элементами, являющаяся следствием вращательной симметрии.

Отметим, что величина $\partial \hat{S}^0 / \partial t$ определяет изменение \hat{S}^0 при вращении всей конфигурации полей α с угловой скоростью $\vec{\omega} = \delta \vec{v} / \delta t$. Используя равенство $\delta'' \hat{S}^0 = -\delta' \hat{S}^0$, получим из (5.3)

$$\left(\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \right)_r = -i \vec{\omega} (\vec{I} \hat{S}^0 - \hat{S}^0 \vec{I}) \quad (5.8)$$

или для матричных элементов

$$\left(\chi_1^+ \left(\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \right)_r \psi_2 \right) = -i \vec{R} E_{12} \left(\chi_1^+ \hat{I} \psi_2 \right) \quad (5.9)$$

Очевидно, что при выводе (5.8) и (5.9) предположение об определенном виде параметров α не используется, поэтому эти соотношения определяют изменение одночастичного гамильтониана \hat{S}^0 при вращениях (r) самосогласованного поля в общем случае.

При выборе в качестве коллективных переменных мультипольных моментов $\alpha_{\lambda\mu}$ кинетическая энергия коллективного движения является квадратичной формой по скоростям $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$

$$T = \frac{1}{2} B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} \dot{\alpha}_{\lambda\mu} \dot{\alpha}_{\lambda'\mu'} \quad (5.10)$$

где тензор масс $B(\alpha)$ определяется согласно (4.19)

$$B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} = -2i \sum_{12} \frac{1}{E_{12}} \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) \cdot \frac{\partial Z(21)}{\partial \alpha_{\lambda'\mu'}} \quad (5.11)$$

Отметим, что несмотря на несимметричную запись, правая часть (5.11) симметрична по $\lambda\mu$ и $\lambda'\mu'$. Действительно, все члены (4.10) линейны по $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}$, поэтому это уравнение может быть записано как

$$E_{12} \frac{\partial Z(12)}{\partial \dot{\alpha}_{\lambda\mu}} - \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) = -\frac{i}{E_{12}} \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) \quad (5.12)$$

Исключая в (5.11) матричный элемент от $\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}}$ с помощью (5.12), а затем используя (4.11), убеждаемся в симметрии выражения (5.11) для B . Из (4.19) следует эквивалентная формула для B

$$B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} = - \sum_{12} \frac{1}{E_{12}^2} \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) \left(\chi_2^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda'\mu'}} \psi_1 \right) - i \sum_{12} \frac{1}{E_{12}^2} \left(\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda\mu}} \psi_2 \right) \left(\chi_2^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_{\lambda'\mu'}} \psi_1 \right) \quad (5.13)$$

В феноменологическом гамильтониане обобщенной модели О.Бора кинетическая энергия по форме совпадает с (5.10), но тензор масс имеет специальный вид

$$B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} \Rightarrow (-1)^{\mu-\mu'} \delta_{\mu,-\mu'} \delta_{\lambda\lambda'} B_{\lambda} \quad (5.14)$$

что в общем случае не справедливо для (5.11). Как будет ясно из дальнейшего, это отличие оказывается существенным.

6. Вращательная энергия. Момент инерции.

Для выделения из T энергии, связанной с вращением, следует перейти от $\alpha_{\lambda\mu}$ к новым переменным, которые включают три угла θ_i , определяющие ориентировку самосогласованного поля в пространстве. В качестве остальных переменных можно выбрать величины $\alpha_{\lambda\mu}^0$ в "собственной" системе самосогласованного поля (см./I/). При вращении системы как целого (все скорости $\dot{\alpha}_{\lambda\mu}^0 = 0$, а $\vec{\theta} = \vec{R}$) изменения переменных $\alpha_{\lambda\mu}$ согласно (5.7) равны

$$(\dot{\alpha}_{\lambda\mu})_r = i \vec{R} \alpha_{\lambda\mu}^0 (\lambda\mu | \hat{I} | \lambda\mu) \quad (6.1)$$

Подставляя (6.1) в (5.10), получим выражение для вращательной энергии T_r в виде квадратичной функции компонент угловой скорости \vec{R}_i

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{ik} \mathcal{F}_{ik} R_i R_k \quad (6.2)$$

где тензор инерции \mathcal{F}_{ik} связан с тензором масс равенством

$$\mathcal{F}_{ik} = - \alpha_{\lambda\mu} (\lambda\mu | \hat{I}_i | \lambda\nu) \alpha_{\lambda'\mu'} (\lambda'\mu' | \hat{I}_k | \lambda'\nu') B_{\lambda\lambda'}^{\nu\nu'} \quad (6.3)$$

Вычисление \mathcal{F} можно провести, если подставить в (6.3) значение тензора масс из (5.11) или (5.13), а затем проводя суммирование по моментам с помощью (5.7). Проще, однако, воспользоваться общим выражением для T (4.19') подставив в него матричный элемент (5.9). В результате

$$\mathcal{F}_{ik} = -2 \sum_{12} \left(\chi_1^+ \hat{I}_i \psi_2 \right) \frac{\partial Z(21)}{\partial R_k} \quad (6.4)$$

а из равенства (4.19) следует эквивалентное выражение

$$F_{ik} = \sum_{12} \frac{2}{E_{12}} (\chi_1^+ \hat{I}_i \varphi_2) (\chi_2^+ \hat{I}_k \varphi_1) - \sum_{12} \frac{2}{E_{12}} (\chi_1^+ \hat{I}_i \varphi_2) (\chi_2^+ \frac{\partial S^{(1)}}{\partial R_x} \varphi_1) \quad (6.5)$$

Подчеркнем еще раз, что выражения (6.4) и (6.5), так же, как (5.11) и (5.13), определяют симметричный тензор.

Для получения более конкретных выражений для момента инерции воспользуемся представлением (3.15) для ψ и χ . Рассмотрим в (6.5) главное значение момента инерции $F_{xx} = F$. Величина $S^{(1)}$ — нечетна и, следовательно, обладает симметрией типа (4.3). Поэтому ее можно представить в виде (ср. I.24)

$$S^{(1)} = \epsilon^{(1)} + i \Delta^{(1)} \sigma^x \quad (6.6)$$

Используя также представление (5.2) для \hat{I} и формулы (3.17), после простых преобразований находим

$$F = F^{(1)} + F^{(2)} + F^{(3)};$$

$$F^{(1)} = 2 \sum_{12} |\langle 1 | I_x | 2 \rangle|^2 \frac{\eta_{12}^{(1)2}}{E_{12}};$$

$$F^{(2)} = 2 \sum_{12} \langle 2 | I_x | 1 \rangle \langle 1 | \frac{\partial \Delta^{(1)}}{\partial R_x} | 2 \rangle \frac{\eta_{12}^{(1)} \bar{\eta}_{12}^{(1)}}{E_{12}} \quad (6.7)$$

$$F^{(3)} = -2 \sum_{12} \langle 2 | I_x | 1 \rangle \langle 1 | \frac{\partial \epsilon^{(1)}}{\partial R_x} | 2 \rangle \frac{\eta_{12}^{(1)2}}{E_{12}}$$

Эти выражения совпадают с результатами, полученными методом функций Грина /10/ и обобщенного канонического преобразования /17/ x).

Кренкинг-модель дает только первый член в (6.7).

7. Момент количества движения ядра. Вращение и колебания.

Усредним оператор момента (5.1) по "внутреннему" состоянию ядра, описываемому матрицей плотности $\hat{\rho} = \hat{\rho}^0 + \hat{\rho}^{(1)} + \dots$

x) Напомним, что суммирование в (7.11), как и везде, проходит лишь по одной группе сопряженных состояний (ν , но не $\bar{\nu}$), что компенсируется в (6.7) множителем 2.

$$\langle \hat{I} \rangle = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{I} \hat{\rho} \} \quad (7.1)$$

Будем считать для простоты, что в основном состоянии момент отсутствует (четные ядра). Тогда (7.1) определяет момент коллективного движения (как функцию \mathcal{L} и $\dot{\mathcal{L}}$). Последний мы также будем обозначать через \vec{I} , опуская знак среднего. Учитывая, что согласно (5.2) имеет место равенство $\hat{I} = \sigma^x \hat{I} \sigma^x$, получим в первом приближении из (7.1) и (4.4)

$$\vec{I} = -\frac{1}{2} Sp \{ \hat{I} \hat{\rho}^{(1)} \} = -2 \sum_{12} (\chi_1^+ \hat{I} \varphi_2) Z^{(21)} \quad (7.2)$$

Поправка первого порядка Z является линейной функцией скоростей, которые можно представить как сумму вращательных (r) и колебательных (v) составляющих. Поэтому момент ядра также представляется в виде

$$\vec{I} = \vec{I}^r + \vec{I}^v = -2 \sum_{12} (\chi_1^+ \hat{I} \varphi_2) (Z_r^{(21)} + Z_v^{(21)}) \quad (7.3)$$

Найдем явные выражения для составляющих момента через соответствующие скорости. Из сравнения (7.3) и (6.4) находим обычное соотношение

$$I_i^r = \sum_x F_{ix} R_x \quad (7.4)$$

где F_{ix} — тензор инерции, определенный ранее. Для вибрационной составляющей находим из (7.3) и (5.7)

$$\vec{I}^v = 2 \sum_{\lambda \nu} (\lambda \nu | \hat{I} | \lambda \nu) \sum_{12} \frac{1}{E_{12}} (\chi_1^+ \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \lambda \nu} \varphi_2) Z_v^{(21)} \quad (7.5)$$

Учитывая, что вибрационная часть Z_v представляется в виде

$$Z_v = \frac{\partial Z_v}{\partial \dot{\lambda \nu}} (\dot{\lambda \nu})_v \quad (7.6)$$

где $\dot{\lambda \nu}$ — скорость, связанная с колебаниями, получим из (7.5) и (5.11)

$$\vec{I}^v = i \sum_{\lambda \nu} (\lambda \nu | \hat{I} | \lambda \nu) B_{\lambda \nu}^{(1)} (\dot{\lambda \nu})_v \quad (7.7)$$

Кинетическую энергию коллективного движения в общем случае можно представить в виде суммы вращательного, колебательного и смешанного членов, которые получаются после подстановки в (5.10) \dot{d} в виде суммы $\dot{d}r + \dot{d}v$. Вращательная энергия была рассмотрена выше, а выражение для чисто колебательной энергии T_v имеет вид (5.10) с заменой \dot{d} на $\dot{d}v$

$$T_v = \frac{1}{2} B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} (\dot{d}_{\lambda\mu})_v (\dot{d}_{\lambda'\mu'})_v \quad (7.8)$$

Рассмотрим теперь смешанный вращательно-колебательный член T_{rv} . Для этого удобно вернуться к выражению для T в форме (4.19), откуда, учитывая неявную симметрию относительно обоих множителей (ср. 5.11), находим

$$T_{rv} = -i \sum_{12} \frac{1}{E_{12}} (\chi_1^+ \left(\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \right)_r \psi_2) Z_v(2t) \quad (7.9)$$

Ввиду (5.9) это можно связать с матричным элементом момента и угловой скоростью

$$T_{rv} = -\vec{R} \sum_{12} (\chi_1^+ \hat{I} \psi_2) Z_v(2t) \quad (7.10)$$

Вибрационные составляющие Z_v даются (7.6). Заметим, что T_{rv} можно выразить через вибрационный момент. Из (7.3), (7.10) и (7.7) находим

$$T_{rv} = -\vec{R} \vec{I}^v = i \vec{R} d_{\lambda\mu} (\lambda\mu | \vec{I} | \lambda'\mu') B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} (\dot{d}_{\lambda\mu})_v \quad (7.11)$$

В случае произвольных флуктуаций самосогласованного поля смешанный член T_{rv} , вообще говоря, нельзя обратить в нуль путем выбора переменных $d_{\lambda\mu}$. Однако в наиболее интересном случае квадрупольных деформаций это можно сделать, так что полная кинетическая энергия становится аддитивной по колебаниям и вращениям.

8. Квадрупольные деформации самосогласованного поля.

Рассмотрим практически интересный случай, когда флуктуации самосогласованного поля имеют квадрупольную анизотропию и могут быть описаны пятью переменными $d_{\lambda\mu} = d_{\lambda\mu} = (-1)^\mu d_{\lambda, -\mu}^*$. Форма самосогласованного поля

характеризуется при этом двумя инвариантами относительно вращений

$$d_{\lambda\mu}^* d_{\lambda\mu} \equiv \beta^2; \quad (8.1)$$

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu' 2\mu'' | 2\mu) d_{\lambda\mu'}^* d_{\lambda\mu''}^* d_{\lambda\mu} \equiv \beta^2 \cos 3\gamma$$

где $(2\mu' 2\mu'' | 2\mu)$ - коэффициент Клебша-Гордана, а по повторяющимся индексам производится суммирование. Путем векторного сложения нескольких $d_{\lambda\mu}$ можно получать новые тензоры 2-го ранга, например,

$$\sigma_{\lambda\mu} = -\sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu' 2\mu'' | 2\mu) d_{\lambda\mu'} d_{\lambda\mu''} = (-1)^\mu \sigma_{-\mu} \quad (8.2)$$

Легко убедиться, что независимых тензоров при этом будет только два, за которые можно принять $d_{\lambda\mu}$ и $\sigma_{\lambda\mu}$, а остальные будут выражаться через $d_{\lambda\mu}$ и $\sigma_{\lambda\mu}$ с коэффициентами, зависящими от инвариантов (8.1). Если направить ось координат по главным осям тензора $d_{\lambda\mu}^x$, то в этой системе компоненты $d_{\lambda\mu}$ и $\sigma_{\lambda\mu}$ будут иметь вид

$$d_{0; \pm 1; \pm 2} = \left\{ \beta \cos \gamma; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma \right\}; \quad (8.3)$$

$$\sigma_{0; \pm 1; \pm 2} = \left\{ \beta^2 \cos 3\gamma; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \beta^2 \sin 3\gamma \right\}$$

Сделанные замечания позволяют рассмотреть вопрос о структуре тензора масс $B_{\lambda\lambda'}^{\mu\mu'} = B_{\lambda\mu\lambda'\mu'}$, определяемого равенствами (5.11) или (5.13). Правые части этих выражений являются функциями $d_{\lambda\mu}$, поэтому в общем случае $B_{\lambda\mu\lambda'\mu'}$ может содержать все возможные тензорные комбинации, составленные из $d_{\lambda\mu}$. Чтобы установить число независимых комбинаций, рассмотрим систему, где справедливо (8.3). Замечая, что коэффициенты Клебша-Гордана $(2\mu' 2\mu'' | 2\mu)$ не меняются при изменении знака всех проекций и не могут содержать нечетное число значений $\mu = \pm 1$, легко убедиться, что в этой системе для любого тензора, составленного из (8.3) и коэффициентов $(2\mu' 2\mu'' | 2\mu)$

$$B_{\mu\mu}^0 = B_{-10}^0 = B_{12}^0 = B_{-12}^0 = B_{+2}^0 = B_{-+2}^0 = 0; \quad (8.4)$$

$$B_{11}^0 = B_{-1-1}^0, \quad B_{20}^0 = B_{-20}^0, \quad B_{22}^0 = B_{-2-2}^0$$

x) Подчеркнем, что направление главных осей $d_{\lambda\mu}(t)$ меняется со временем. Выбирая систему (8.3) мы имеем в виду совпадение неподвижных осей координат с главными осями $d_{\lambda\mu}$ в данный момент времени.

Эти девять условий уменьшают число независимых тензорных комбинаций, входящих в $V_{\mu\nu}$, до шести. Мы можем поэтому написать

$$V_{\mu\nu} = (1) \delta_{\mu\nu} V_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu 2\nu | 2\mu 1) \frac{d_{\mu 1}}{\beta} V_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu 2\nu | 2\mu 1) \left(\frac{\sigma_{\mu 1}}{\beta^2} V_2 + \frac{1}{\beta^2} d_{\mu 1}^* d_{\mu 1}^* V_2' + \frac{1}{\beta^2} (d_{\mu 1}^* \sigma_{\mu 1}^* + \sigma_{\mu 1}^* d_{\mu 1}^*) V_3 + \frac{1}{\beta^4} \sigma_{\mu 1}^* \sigma_{\mu 1}^* V_4 \right) \quad (8.5)$$

где все скалярные функции V_0 зависят только от инвариантов (8.1).

Рассмотрим теперь выражение (6.3) для тензора инерции. Легко убедиться, что равенства (8.3) и (8.4) обеспечивают обращение в нуль недиагональных членов тензора \mathcal{F}_{ik} . Оставшиеся главные моменты инерции имеют вид (ср. /12, 13/)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_{xx} &= -4\beta^2 (V_{1-1}^0 + V_{11}^0) \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\bar{\gamma}}{3} \right), \\ \mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_{yy} &= -4\beta^2 (V_{1-1}^0 - V_{11}^0) \sin^2 \left(\gamma - \frac{2\bar{\gamma}}{3} \right), \\ \mathcal{L}_3 \equiv \mathcal{L}_{zz} &= 4\beta^2 (V_{2-2}^0 - V_{22}^0) \sin^2 \gamma \end{aligned} \quad (8.6)$$

Входящие сюда комбинации компонент тензора масс можно выразить через функции инвариантов. Рассматривая равенство (8.5) в системе (8.3), легко получить

$$\begin{aligned} V_{1-1}^0 + V_{11}^0 &= -V_0 + V_1 \cos \left(\gamma - \frac{2\bar{\gamma}}{3} \right) + V_2 \cos \left(2\gamma - \frac{4\bar{\gamma}}{3} \right), \\ V_{1-1}^0 - V_{11}^0 &= -V_0 + V_1 \cos \left(\gamma - \frac{2\bar{\gamma}}{3} \right) + V_2 \cos \left(2\gamma - \frac{4\bar{\gamma}}{3} \right), \\ V_{2-2}^0 - V_{22}^0 &= V_0 - V_1 \cos \gamma - V_2 \cos 2\gamma \end{aligned} \quad (8.7)$$

Подставляя (8.7) в (8.6), находим для моментов инерции относительно главных осей ($K = 1, 2, 3$) самосогласованного поля

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K &= 4\beta^2 (V_0 - V_1 \cos \gamma_K - V_2 \cos 2\gamma_K) \sin^2 \gamma_K \\ \gamma_K &= \gamma - \frac{2\bar{\gamma}}{3} K \end{aligned} \quad (8.8)$$

(Напомним, что в гидродинамической модели $V_1 = V_2 = 0$, $V_0 = \text{const}$).

Вибрационные степени свободы связаны с параметрами формы самосогласованного поля β и γ . Дифференцируя (8.1), получим для колебательных составляющих

$$(\dot{L}_\mu)_\nu = \frac{d_{\mu\nu}}{\beta} \dot{\beta} - \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\beta \sin 2\gamma} \dot{\gamma} + \sigma_{\mu\nu} \dot{\gamma} \quad (8.9)$$

В системе главных осей (8.3) это равенство принимает вид

$$(\dot{L}_0)_\nu = \dot{\beta} \cos \gamma - \beta \dot{\gamma} \sin \gamma; \quad (\dot{L}_{11})_\nu = 0; \quad (8.10)$$

$$(\dot{L}_{22})_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\beta} \sin \gamma + \beta \dot{\gamma} \cos \gamma)$$

Используя (8.10) и (8.4), легко убедиться, что колебательный момент (7.7), а вместе с ним и смешанный член $T_{\nu\mu}$ в кинетической энергии (7.11) обращаются в нуль. Вибрационная энергия (7.8) является квадратичной формой по переменным β и γ

$$T_\nu = \frac{1}{2} V_\beta \dot{\beta}^2 + V_{\beta\gamma} \dot{\beta} \dot{\gamma} + \frac{1}{2} V_\gamma \dot{\gamma}^2 = \frac{1}{2} G_{\nu\mu} \dot{\beta} \dot{\beta} \quad (8.11)$$

где массовые коэффициенты $V_{\mu\nu}$ легко вычислить с помощью (8.10), рассматривая (7.8) в системе главных осей. В результате находим

$$\begin{aligned} V_\beta &= V_{00}^0 \cos^2 \gamma + \sqrt{2} V_{20}^0 \sin 2\gamma + (V_{2-2}^0 + V_{22}^0) \sin^2 \gamma \\ V_\gamma &= V_{00}^0 \sin^2 \gamma - \sqrt{2} V_{20}^0 \sin 2\gamma + (V_{2-2}^0 + V_{22}^0) \cos^2 \gamma \\ V_{\beta\gamma} &= \frac{1}{2} (V_{2-2}^0 + V_{22}^0 - V_{00}^0) \sin 2\gamma + \sqrt{2} V_{20}^0 \cos 2\gamma \end{aligned} \quad (8.12)$$

Если использовать общие соотношения (8.5) и (8.9), то из (7.8) получим массовые коэффициенты $V_{\mu\nu}$, выраженные через функции инвариантов V_0 :

$$\begin{aligned} V_\beta &= V_0 + V_2 + V_4 + (V_1 + 2V_3) \cos 3\gamma + V_4 \cos^2 3\gamma; \\ V_\gamma &= V_0 - V_2 - V_4 \cos 3\gamma + V_4 \sin^2 3\gamma; \\ V_{\beta\gamma} &= -(V_1 + V_3 + V_4 \cos 3\gamma) \sin 3\gamma \end{aligned} \quad (8.13)$$

Установим теперь вид квантового оператора, соответствующего (8.11). Обозначим через $\beta^2 G^{xp}$ тензор, обратный G_{xp} в (8.11)

$$G^{xp} = \frac{1}{g^2} \begin{pmatrix} B_x & -B_{xy}/\beta \\ -B_{xy}/\beta & B_y/\beta^2 \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

$$g^2 = B_x B_y - B_{xy}^2 \quad (8.15)$$

Оператор T_v записывается в виде ($\hbar=1$) /19/

$$T_v = -\frac{1}{2} \sum_{xp} \Gamma^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \beta_x} \Gamma^{1/2} G^{xp} \frac{\partial}{\partial \beta_p} ; (\beta_{xp} = \beta_x \beta_p) \quad (8.16)$$

где

$$\Gamma = \beta^2 g^2 \prod_{\kappa} \mathcal{L}_{\kappa} \quad (8.17)$$

Для произведения трех главных моментов инерции, входящего в (8.17), легко получить из (8.8)

$$\begin{aligned} \prod_{\kappa} \mathcal{L}_{\kappa} &= 4\beta^6 \hbar^2 \gamma \left\{ B_0^3 - \frac{3}{4} B_0 (B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos 2\gamma) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (B_1^3 \cos 3\gamma + B_2^3 \cos 3\gamma) - \frac{3}{4} B_1 B_2 (B_1 + B_2 \cos 2\gamma) \right\} \equiv \\ &\equiv 4\beta^2 \hbar^2 \gamma R^2 \end{aligned} \quad (8.18)$$

В результате для (8.16) находим

$$\begin{aligned} T_v &= -\frac{1}{2gR} \left\{ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{B_x R}{g} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \hbar \gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{B_y R}{g} \hbar \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{B_{xy} R}{g} \beta^3 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta \hbar \gamma} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{B_{xy} R}{g} \hbar \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} \right\} \end{aligned} \quad (8.19)$$

где g и R определены соответственно в (8.15) и (8.18).

Оператор полной кинетической энергии T складывается из колебательной и вращательной части

$$T = T_r + T_v \quad (8.20)$$

причем вращательный член имеет обычный вид

$$T_r = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} I_{\kappa}^2 / \mathcal{L}_{\kappa} \quad (8.21)$$

Здесь I_{κ} - операторы проекций момента на главные оси симметрии, а моменты инерции \mathcal{L}_{κ} определены в (8.8).

Соответствие полученных выражений с гамильтонианом О.Бора очевидно. Для этого следует в (8.5) положить

$$B_0 = \alpha \hbar^2 ; B_{\sigma \neq 0} = 0,$$

вследствие чего

$$\begin{aligned} B_x = B_y = B_0 ; B_{xy} = 0 \\ g = B_0 ; R = B_0^{3/2} \end{aligned} \quad (8.22)$$

В общем случае моменты инерции (8.8) и массовые коэффициенты (8.13) являются сложными функциями β и γ , поэтому оператор (8.19) имеет также сложную структуру. Если, однако, имеет место малые колебания около некоторых равновесных значений β_0 и γ_0 , то выражение для T существенно упрощается.

Рассмотрим, в частности, случай аксиально симметричной равновесной деформации $\gamma_0 = 0$. Вид всех коэффициентов при малых γ можно непосредственно усмотреть из (8.8) и (8.13):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 &= 3\beta^2 (B_0 + \frac{1}{2} B_1 + \frac{1}{2} B_2), \\ \mathcal{L}_3 &= 4\beta^2 \gamma^2 B_y ; B_{xy} = 0(\gamma) \quad (\gamma \rightarrow 0) \\ R^2 &= \frac{1}{9\beta^4} B_y \mathcal{L}_1^2 ; g^2 = B_x B_y \end{aligned} \quad (8.23)$$

Отметим еще соотношение для производных от моментов инерции (полезное при рассмотрении связи γ -колебаний и вращений)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = -\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \beta^2 (4B_0 - B_1 + 8B_2) \quad (8.24)$$

Сохраняя лишь основные члены, получим для кинетической энергии при малых f

$$T = \frac{1}{2I_1} (\vec{I}^2 - I_3^2) - \frac{1}{2f^2 B_f} \left\{ \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial f} f \frac{\partial}{\partial f} - \frac{I_3^2}{4\mu^2} \right\} - \frac{1}{2fR} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \frac{B_f R}{f} \mu^4 \frac{\partial}{\partial R} - 4 \frac{R}{f} \left(\frac{B_f R}{f} \right)_{f=0} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right\} \quad (8.25)$$

Для окончательного определения оператора кинетической энергии T остается вычислить инерционные параметры I_k и B_{kf} или компоненты тензора масс B_{km} . Для этого необходимо сделать определенные предположения о виде межнуклонного взаимодействия. Конкретные вычисления параметров выходят за рамки настоящей работы. Однако для выяснения некоторых принципиальных вопросов и общей схемы вычислений мы рассмотрим ниже простую модель "спаривание + квадрупольное взаимодействие". /16, 18, 20/.

9. Модель со спариванием и квадрупольным взаимодействием.

Для нахождения явного вида коллективного гамильтониана необходимо сделать более конкретные предположения относительно эффективного одночастичного гамильтониана $\hat{S}^0(\omega)$. При этом следует руководствоваться требованием, чтобы $\hat{S}^0(\omega)$ воспроизводил характер истинного самосогласованного поля (1.21). В общем случае T - четный оператор \hat{S}^0 представляется в виде (3.14) и содержит одночастичный гамильтониан ϵ и куперовское спаривание Δ . Оператор Δ с хорошей точностью можно аппроксимировать константой. В ϵ кроме сферически симметричной части ϵ естественно выделить член с квадрупольным потенциалом, играющим основную роль в коллективных возбуждениях квадрупольной симметрии. Итак, будем рассматривать \hat{S}^0 в виде

$$\hat{S}^0 = (\epsilon - \chi q_\mu^* \chi_\mu) \sigma^2 - \Delta \sigma^2 = \hat{\epsilon} - \chi q_\mu^* \chi_\mu - \Delta, \quad (9.1)$$

где q_μ - оператор одночастичного квадрупольного момента, а χ - постоянная.

Собственные функции (9.1) определяются формулами (3.15) и (3.16). Матрица плотности нулевого приближения согласно (3.12) и (3.15) равна

$$\hat{\rho}^0(12) = \delta_{12} \left\{ (u_1^2 - v_1^2) \sigma^2 - 2u_1 v_1 \sigma^2 \right\} = \delta_{12} \left(\frac{\epsilon_1}{E_1} \sigma^2 - \frac{\Delta}{E_1} \sigma^2 \right). \quad (9.2)$$

где

$$\epsilon_1 = \epsilon(11) - \chi \langle 1 | q_\mu^* | 1 \rangle \chi_\mu \quad (9.3)$$

Подставляя (9.2) в (1.32), находим выражение для самосогласованного оператора $\hat{S}(\rho^0)$

$$\begin{aligned} \hat{S}(\rho^0) &= \hat{\epsilon}_1 - Sp_2 \{ G_{12} \hat{\rho}_2^0 \} = \\ &= \hat{\epsilon}_1 - \sigma_1^2 Sp_2 \left\{ \frac{1}{2} (G_{12} + T_2^{-1} G_{12} T_2) \sigma_2^2 \hat{\rho}_2^0 \right\} + \sigma_1^2 Sp_2 \left\{ \frac{1}{2} (T_2^{-1} G_{12} T_2) \sigma_2^2 \hat{\rho}_2^0 \right\} \end{aligned} \quad (9.4)$$

Рассмотрим простейший вид взаимодействия, дающий для $\hat{S}(\rho^0)$ структуру, подобную (9.1). Для этого можно положить

$$G_{12} + T_2^{-1} G_{12} T_2 \rightarrow -\chi q_\mu^* (1) q_\mu(2), \quad (9.5')$$

$$T_2^{-1} G_{12} T_2 \rightarrow G = \text{const} \quad (9.5'')$$

Здесь (9.5') - "квадрупольное взаимодействие", а (9.5'') - модельное взаимодействие, приводящее к куперовскому спариванию (см. напр. /16/). Подставляя (9.5) в (9.4), получаем

$$\hat{S}(\rho^0) = \hat{\epsilon} - \chi q_\mu^* Q_\mu - \bar{\Delta} \quad (9.6)$$

где

$$Q_\mu = -\frac{1}{2} Sp \{ q_\mu^* \hat{\rho}^0 \} = -\sum_i \langle 1 | q_\mu | 1 \rangle \frac{\epsilon_1}{E_1}, \quad (9.7)$$

$$\bar{\Delta} = -\frac{1}{2} G Sp \{ \sigma^2 \hat{\rho}^0 \} = G \Delta \sum_i \frac{1}{E_1} \quad (9.8)$$

Структурное подобие (9.1) и (9.6) очевидно. Переход от $\hat{S}(\rho^0)$ к \hat{S}^0 состоит лишь в замене самосогласованных величин Q_μ и $\bar{\Delta}$ на свободные пара-

х) Величина ϵ в (9.4), строго говоря, описывает лишь кинетическую энергию. Чтобы отождествить ее с ϵ в (9.1) следует считать, что мы неявно учитываем дополнительные к (9.5) части взаимодействия, определяющие сферический потенциал. Самосогласованный характер этого потенциала в данной модели фактически не учитывается (см. раздел 10).

метры α_μ и Δ . Условие статического согласования (2.6) приводит в этом случае к уравнениям

$$\Delta = \bar{\Delta} \quad (9.9)$$

$$\alpha_\mu = \bar{\alpha}_\mu(\alpha) \quad (9.10)$$

Естественно, что такое простое соответствие между $\hat{S}(\rho^0)$ и \hat{S}^0 явилось следствием специального выбора межнуклонного взаимодействия (9.5). Реальное взаимодействие, конечно, не сводится к (9.5), поэтому и структура $\hat{S}(\rho^0)$ отличается от (9.1). В рассматриваемом методе такое отличие, однако, вполне допустимо. Единственным предположением является лишь возможность рассмотрения разности $\Delta \hat{S}^0 = \hat{S}(\rho^0) - \hat{S}^0$ по теории возмущений. Мы ограничимся вначале модельным взаимодействием (9.5), которое, удовлетворительно описывая основные эффекты межнуклонного взаимодействия, приводит к простым и наглядным результатам.

В (9.1), наряду с набором α_μ , формально независимым параметром является также Δ . Однако из физических соображений очевидно, что возбуждения, связанные с Δ , являются по существу одночастичными и обладают большими энергиями. Поэтому при рассмотрении низкоэнергетических коллективных возбуждений можно определять Δ из статического условия согласования (9.9). Таким образом, независимыми параметрами в (9.1) — коллективными переменными — являются α_μ , а величину Δ , как и химический потенциал λ , следует рассматривать как функции α_μ .

Перейдем к решению основного уравнения (4.10). Согласно (1.33), (3.17) и (9.5) имеем

$$(\chi_1^+ \chi_2^+ G_{12}^{\hat{H}} \varphi_2 \varphi_1) = -\frac{1}{2} G (\chi_1^+ \sigma^x \varphi_1) (\chi_2^+ \sigma^x \varphi_2) = -\frac{1}{2} G \delta_{11'} \delta_{22'} \quad (9.11)$$

Уравнение (4.10) принимает вид

$$E_{11'} Z(11') + 2G \delta_{11'} \sum_2 Z(22) = R(11') \quad (9.12)$$

где правая часть, согласно (9.1) и (3.17), равна

$$R(11') = -\frac{i}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) = \\ = -2\delta_{11'} \frac{1}{E_{11}^2} (\epsilon_1 \Delta + \Delta \lambda) - \frac{\eta_{11'}^{(H)}}{E_{11'}} \times \langle 11' | \rho^* | 11' \rangle \alpha_\mu \quad (9.13)$$

Из (9.12) после очевидных преобразований получаем

$$(1 - 2G \sum_2 \frac{1}{E_{22}}) \sum_1 Z(11) = \sum_1 \frac{1}{E_{11}} R(11) \quad (9.14)$$

Правая часть (9.14) обращается в нуль, т.к. согласно (4.8) и (3.17) условие постоянства числа частиц (2.10) можно записать в виде

$$\frac{dN}{dt} = \sum_{11'} (\chi_1^+ \sigma^z \varphi_1) (\chi_{11'}^+ \frac{\partial \rho^0}{\partial t} \varphi_{11'}) = 2i \sum_1 \frac{\eta_{11}^{(H)}}{E_1} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1)$$

откуда с учетом (9.13) получаем

$$\frac{dN}{dt} = -4\Delta \sum_1 \frac{1}{E_{11}} R(11) = 0 \quad (9.15)$$

Благодаря обращению в нуль правой части, уравнение (9.14) является совместным, несмотря на то, что коэффициент при \sum_2 , равный согласно (9.8)

$1 - \frac{2G}{\Delta}$, является формально величиной 2-го порядка малости. Решение уравнения (9.12) имеет вид

$$Z(11') = \frac{R(11')}{E_{11'}} = -\frac{i}{E_{11'}} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial t} \varphi_1) \quad (9.16)$$

причем в рассматриваемом случае

$$\hat{S}^{(H)} = -\frac{1}{2} G \sigma^x \sum_2 Z(22) = 0 \quad (9.17)$$

Для тензора масс (5.11) получаем

$$B_{\mu\nu 11'} = -2 \sum_{12} \frac{1}{E_{12}^2} (\chi_1^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_\mu} \varphi_2) (\chi_2^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_\nu} \varphi_1) \quad (9.18)$$

где согласно (9.1)

$$\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial \alpha_\mu} = -2 \hat{q}_\mu^* - \sigma^z \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_\mu} - \sigma^y \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_\mu} \quad (9.19)$$

Преобразования правой части (9.18) элементарны. Приведем окончательный результат. Для сокращения записи введем обозначения для сумм по одночастичным состояниям ($2E_1 = E_{11}$)

$$\sum \frac{\Delta}{E_1^2} = t; \quad \sum \frac{\epsilon_1}{E_1^2} = \tau;$$

$$\sum \frac{\Delta^2}{E_1^3} = f; \quad \sum \frac{\Delta \epsilon_1}{E_1^3} = \phi; \quad \sum \frac{\epsilon_1^2}{E_1^3} = \theta;$$

$$\sum \frac{\Delta}{E_1} \langle 1|q_\mu|1 \rangle = t_\mu; \quad \sum \frac{\epsilon_1}{E_1} \langle 1|q_\mu|1 \rangle = \tau_\mu. \quad (9.20)$$

$$\sum \frac{\Delta^2}{E_1^2} \langle 1|q_\mu|1 \rangle = f_\mu; \quad \sum \frac{\Delta \epsilon_1}{E_1^2} \langle 1|q_\mu|1 \rangle = \phi_\mu$$

Для тензора масс (9.19) имеем

$$B_{\mu\nu} = B'_{\mu\nu} + B''_{\mu\nu}; \quad (9.21)$$

$$B'_{\mu\nu} = 2x^2 \sum_{12} \frac{\eta_{12}^{(4)2}}{E_{12}^3} \langle 1|q_\mu|2 \rangle \langle 2|q_\nu|1 \rangle \quad (9.21')$$

$$4B''_{\mu\nu} = x \left(f_\mu^* \frac{\partial \lambda}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \lambda}{\partial q_\mu} f_\nu^* \right) + x \left(\phi_\mu^* \frac{\partial \Delta}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \Delta}{\partial q_\mu} \phi_\nu^* \right) + \\ + f \frac{\partial \lambda}{\partial q_\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial q_\nu} + \phi \left(\frac{\partial \Delta}{\partial q_\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \lambda}{\partial q_\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial q_\nu} \right) + \theta \frac{\partial \Delta}{\partial q_\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial q_\nu}, \quad (9.21'')$$

где производные от λ и Δ , вычисляемые дифференцированием (2.10) и (9.9) равны

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q_\mu} = -x \frac{t t_\mu^* + \tau \tau_\mu^*}{t^2 + \tau^2}; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial q_\mu} = -x \frac{\tau t_\mu^* - t \tau_\mu^*}{t^2 + \tau^2} \quad (9.22)$$

Перейдем к исследованию потенциальной энергии $V(d)$. При этом удобнее рассматривать выражение для производной $\partial V / \partial q_\mu$. Используя

равенство

$$\Delta \hat{S}^0 = x (d_\mu - Q_\mu) q_\mu^* \quad (9.23)$$

находим из (4.23) и (9.7)

$$\frac{\partial V}{\partial q_\mu^*} = -\frac{1}{2} S_P \left\{ \hat{q}_\mu^* \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial d_\mu^*} \right\} x (d_\mu^* - Q_\mu^*) = x (d_\mu^* - Q_\mu^*) \frac{\partial \Phi_\mu^*}{\partial d_\mu^*} \quad (9.24)$$

из (9.24) видно, что стационарные точки $V(d)$ определяются из уравнения согласования (9.10). Для второй производной в равновесном состоянии имеем

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\mu^* \partial q_{\mu'}^*} \right|_{d=d^0} = x \left(d_{\mu\nu}'' - \frac{\partial Q_{\mu\nu}}{\partial d_\mu^*} \right) \frac{\partial \Phi_{\mu'}^*}{\partial d_{\mu'}^*} \quad (9.25)$$

Эта величина определяет тензор упругости для малых колебаний. Отметим, что правая часть (9.25) обладает нужной симметрией, так как тензор $\partial \Phi_\mu / \partial d_\mu^*$ симметричен по μ и μ' . Действительно, легко убедиться путем прямого вычисления (используя (9.19)), что Q_μ равно производной по d_μ^* от инвариантной функции

$$Q_\mu = -\frac{1}{x} \frac{\partial W}{\partial d_\mu^*} \quad (9.26)$$

$$W = \lambda N - \frac{1}{2} S_P \{ \hat{S}^0 \hat{p}^0 \} + \frac{\Delta^2}{2G} \quad (9.26)$$

Приведем явное выражение для

$$K_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial Q_\mu}{\partial d_\nu^*} = -\frac{1}{2} S_P \left\{ \hat{q}_\mu^* \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial d_\nu^*} \right\}, \quad (9.27)$$

определяющего тензор упругости (9.25)

$$K_{\mu\nu} = 2 \sum_{12} \frac{1}{E_{12}} (\chi_1^+ \hat{q}_\mu^* \Phi_2) (\chi_2^+ \frac{\partial \hat{S}^0}{\partial d_\nu^*} \Phi_1) = K'_{\mu\nu} + K''_{\mu\nu},$$

$$K'_{\mu\nu} = 2x \sum_{12} \frac{\eta_{12}^{(4)2}}{E_{12}} \langle 2|q_\mu|1 \rangle \langle 1|q_\nu|2 \rangle, \quad (9.28)$$

$$K_{\mu\nu}'' = 2\lambda \left(t_{\mu} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{\nu}} + \tau_{\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{\mu}} \right) =$$

$$= - \frac{4\lambda \Delta}{t^2 + \tau^2} \left\{ t(t_{\mu} t_{\nu}'' - \tau_{\mu} \tau_{\nu}'') + \tau(t_{\mu} \tau_{\nu}'' + \tau_{\mu}' t_{\nu}'') \right\}$$

Выражения (9.21) и (9.28) совпадают с результатами, получаемыми в методе функций Грина (или эквивалентных "микроскопических методах") при использовании адиабатического приближения.

Потенциальная энергия V является функцией лишь двух инвариантов (8.1). Введем две инвариантные комбинации компонент Q_{μ}

$$Q_{\rho} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\rho}} Q_{\mu} = \frac{t_{\mu}}{\rho} Q_{\mu},$$

$$\text{div} \mathcal{L} \cdot Q_{\rho} = -\rho \cdot \text{div} \mathcal{L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{\rho}} Q_{\mu} = \left(\frac{5t_{\mu}^2}{\rho^2} - \frac{4t_{\mu}^2}{\rho} \cos \alpha \right) Q_{\mu} \quad (9.29)$$

Тогда производные от $V(p_{\mu})$ можно представить в виде

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = x(\rho - Q_{\rho}) \frac{\partial Q_{\rho}}{\partial \rho} - \frac{1}{2} x \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} Q_{\rho}^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = x(\rho - Q_{\rho}) \frac{\partial Q_{\rho}}{\partial \beta} + x Q_{\rho} \left(\rho - \frac{\partial Q_{\rho}}{\partial \beta} \right) \quad (9.30)$$

Производные от Q_{ρ} и Q_{β} вследствие соотношения (9.26) связаны условием

$$\frac{\partial Q_{\rho}}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho Q_{\beta}) = 0 \quad (9.31)$$

Для практического определения функции $V(p_{\mu})$ необходимо вычислить две функции Q_{ρ} и Q_{β} . Соотношение (9.31) можно использовать для контроля результатов вычислений.

10. Критика и способы улучшения модели "спаривание + + квадрупольное взаимодействие".

К достоинствам модели, рассмотренной в предыдущем разделе, безусловно относится простота, позволяющая получить явное выражение коллективного гамильтониана через ограниченное число сумм по одночастичным состояниям (9.20). При этом используются лишь два параметра взаимодействия (G, x). Однако простота этой модели оплачена вполне определенной ценой.

1. Прежде всего результаты довольно чувствительны к численному значению параметра x . Это особенно относится к коэффициентам упругости (например для β и γ - колебаний /16/). Между тем в рамках рассмотренной модели нет какого-либо критерия для однозначного выбора x . Далее, для получения окончательных результатов нужно провести вычисление сумм (9.20). Для этого необходимо использовать определенную схему одночастичных уровней и соответствующий набор волновых функций. Если быть строго последовательным, то их следует определять из решения уравнения Шредингера с гамильтонианом $\hat{\mathcal{L}} = x \hat{q}_{\mu}^2 q_{\mu}$ (см. (9.1)). Обычно же для определения одночастичных уровней и волновых функций используют известные модели ядерного потенциала (осцилляторную, Нильссона и т.п.). Подобная процедура, когда для получения общих формул (9.21) и (9.24) и для их вычисления привлекаются две различные модели, может приводить к разумным количественным результатам. Однако следует иметь в виду, что при этом некоторые точные соотношения между параметрами могут быть нарушены. Так, например, соотношение (8.6), связывающее момент инерции \mathcal{L} и тензор масс $B_{\mu\nu}$, вообще говоря, не будет выполняться, если \mathcal{L} вычислять независимо из (6.7). Действительно, справедливости (8.6) обеспечивается связь (5.7) между одночастичными матричными элементами, но последняя существует лишь в согласованной схеме, когда одночастичные матричные элементы вычисляются по собственным функциям \hat{S}^0 . Мы попытаемся ниже устранить отмеченные недостатки, не внося при этом заметных усложнений.

Как уже указывалось, в нашем методе допустима определенная свобода в выборе вспомогательного гамильтониана \hat{S}^0 . Необходимо только, чтобы разность между \hat{S}^0 и самосогласованным гамильтонианом $\hat{S}^0(p^0)$ была достаточно мала. Пользуясь этой свободой мы можем с самого начала считать, что \hat{S}^0 имеет вид (ср. 9.1)

$$\hat{S}^0 = \epsilon \sigma^z - \Delta \sigma^y \quad (10.1)$$

где ϵ - одночастичный гамильтониан, описывающий нуклон в некоторой деформированной яме (например, потенциале Нильссона). Что можно сказать теперь о разности $\Delta S^0 = S^0(\rho^0) - S^0$? Ясно, что если мы попрежнему ограничимся только квадрупольным взаимодействием, то разность ΔS^0 отнюдь не будет малой, поэтому следует включить в рассмотрение остальные части взаимодействия G_{12} . При этом сразу возникают нежелательные вопросы о виде взаимодействия, новых параметрах и т.д. Можно, однако, пойти другим путем. Если выбранная потенциальная яма хорошо воспроизводит свойства одночастичных состояний, то можно допустить, что S^0 близко к истинному самосогласованному гамильтониану $S^0(\rho^0)$. Поэтому, не уточняя явный вид можно просто считать, что реальное взаимодействие таково, что в равновесном состоянии $\Delta S^0 = 0$. Грубо говоря, в отличие от (9.1), где S^0 подбирались под взаимодействие, теперь, наоборот, взаимодействие будем подбирать под S^0 . Рассмотрим более детально, насколько последовательна такая операция.

Модельный потенциал $V = \epsilon - \epsilon$ (входящий в S^0) в общем случае можно представить в виде разложения по степеням деформации

$$V = V^{(0)} + V^{(2)} q_{\mu}^* q_{\mu} + \frac{1}{2} V^{(4)} q_{\mu}^* q_{\mu}^2 + \frac{1}{2} \bar{V}^{(2)} q_{\mu}^* q_{\mu} + \dots \quad (10.2)$$

где $V^{(n)}$ являются функциями только $|r|$ и не зависят от деформации α_{μ} . Для представления в аналогичном виде самосогласованного потенциала разложим угловую часть взаимодействия G_{12} (спаривания не рассматриваем) по сферическим тензорным операторам

$$G_{12} = G_{12}^{(0)} + G_{12}^{(2)} q_{\mu}^*(1) q_{\mu}(2) + \dots \quad (10.3)$$

где $G_{12}^{(n)}$ зависят только от $|r_1|$ и $|r_2|$, а опущенные члены содержат только высшие мультиполи. Для самосогласованного потенциала из (10.2) следует

$$V_1(\rho^0) = \langle G_{12}^{(0)} \rangle_2 + q_{\mu}^*(1) \langle G_{12}^{(2)} q_{\mu}(2) \rangle_2 + \dots \quad (10.4)$$

($\langle \rangle_2$ означает суммирование по занятым состояниям второй частицы, т.е. фактически операцию $-\frac{1}{2} \text{Sp}_2 \{ \dots \rho_2^0 \}$). На первый взгляд кажется, что для сопоставления с (10.2) следует просто разложить (10.4) по α_{μ} (входящим в ρ^0), а затем отождествить члены одинаковой структуры. Однако это было бы неправильно. Усредненные величины в (10.4) имеют следующую

структуру

$$\langle F \rangle \sim \sum_{\nu} \langle \nu | F | \nu \rangle \rho(\nu) \quad (10.5)$$

Здесь от α_{μ} зависят, во-первых, одночастичные волновые функции (и, следовательно, матричный элемент $\langle \nu | F | \nu \rangle$), а, во-вторых, распределение нуклонов по состояниям ($\rho(\nu) = \epsilon_{\nu} / E_{\nu}$). Причем чувствительность этих факторов к деформации совершенно различна. Величина $\langle \nu | F | \nu \rangle$ существенно меняется при таких деформациях, при которых расщепление оболочечных уровней ($V^{(2)} q_{\mu}^* q_{\mu}$ в (10.2)) сравнивается с энергией ферми ϵ_F (т.е. при деформациях радиуса ядра $\delta R \sim R$). Существенное же изменение $\rho(\nu)$ наступает уже при $V^{(2)} q_{\mu}^* q_{\mu} \sim \Delta$, т.к. $\rho(\nu)$ резко меняется вблизи ферми-границы на ширине энергии спаривания Δ . Таким образом, разложение $\langle \nu | F | \nu \rangle$ по степеням α_{μ} означает фактически разложение по малому параметру $\delta R/R$, в то время как для $\rho(\nu)$ возможно лишь разложение по степеням $\frac{\epsilon_F}{\Delta} (\delta R/R) \sim A^{2/3} \delta R/R$. Однако, хотя деформация сильно меняет $\rho(\nu)$, но лишь в узкой области шириной Δ вблизи ферми-границы. Поэтому если в (10.5) суммирование эффективно проходит по широкой области ($\sim \epsilon_F$), то вся сумма будет плавно зависеть от деформации ($\sim \delta R/R$). Это справедливо для функций одних радиальных переменных, но не для квадрупольного момента $Q_{\mu} = \langle q_{\mu} \rangle$, в которой область вблизи ферми-границы дает существенный вклад. Мы можем теперь осуществить выбор взаимодействия, отождествив члены в (10.2) и (10.4), не чувствительные к распределению нуклонов. Для членов же, содержащих q_{μ} , это принципиально невозможно, ввиду их качественно различной зависимости от α_{μ} . Последний член в (10.4) с точностью до $\delta R/R$ пропорционален

$$q_{\mu}^* Q_{\mu} = -\frac{1}{2} q_{\mu}^* \text{Sp} \{ \hat{q}_{\mu} \rho^0 \} \quad (10.6)$$

Квадрупольный момент Q_{μ} схематически можно представить в виде суммы $Q_{\mu}^{(1)} + Q_{\mu}^{(2)}$, где первый член определяется только нуклонами вблизи поверхности ферми и поэтому чувствителен к их распределению, а вклад во второй член дает равномерно все нуклоны ядра, причем с точностью до $\delta R/R$

$$Q_{\mu}^{(2)} = \text{const} \cdot \alpha_{\mu} \quad (10.7)$$

Естественно, что модельный потенциал (10.2) может воспроизвести в (10.5) только часть $q_{\mu}^* Q_{\mu}^{(1)}$, не зависящую от заполнения нуклонов. Соответствующую

шим выбором масштаба измерения деформации d_μ коэффициент пропорциональности в (10.7) можно обратить в единицу. Тогда с учетом всего сказанного, найдем из (10.2) и (10.4)

$$\Delta S^0 = \sigma^z [V(\rho^0) - V] \approx V^{(1)} \hat{q}_\mu^* (Q_\mu - d_\mu) =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial d_\mu} \right)_{d=0} (Q_\mu - d_\mu) \sigma^z \quad (10.8)$$

Для полной определенности выражения (10.8) следует более точно сформулировать способ нормировки d_μ . Для этого заметим, что член $Q_\mu(\rho^0)$ исчезает в гидродинамическом пределе (когда на ширине $\Delta \rightarrow \infty^x$) происходит полное усреднение одночастичных матричных элементов $\langle v | q_\mu | v \rangle$. Поэтому нормировку d_μ можно проводить из предельного условия

$$Q_\mu \xrightarrow{\Delta \rightarrow \infty} d_\mu \quad (10.9)$$

Выражение (10.8) по форме совпадает с (9.23), но вместо постоянного коэффициента α теперь входит $-V^{(1)}$, т.е. вообще говоря, функция $|F|$. Это отличие, однако, не является существенным, т.к. $V^{(1)}$ с хорошей точностью можно заменить некоторым средним значением $\langle V^{(1)} \rangle$. Формула (9.24), определяющая потенциальную энергию U , остается тогда справедливой, если под α понимать

$$\alpha = - \langle V^{(1)} \rangle \quad (10.10)$$

С учетом (10.10) формально все основные результаты предыдущего раздела остаются без изменений за исключением окончательных выражений для $B_{\mu\nu}$ (9.21) и $K_{\mu\nu}$ (9.28), в которых использован явный вид \hat{S}^0 (9.1). Теперь в \hat{S}^0 входит дополнительный член из (10.2) $\frac{1}{2} V^{(2)} d_\mu^* d_\mu$, поэтому вместо (9.19) следует использовать при вычислении $B_{\mu\nu}$ и $K_{\mu\nu}$

$$\frac{\partial \hat{S}^0}{\partial d_\mu} = - \alpha \hat{q}_\mu^* - \sigma^z \frac{\partial V}{\partial d_\mu} - \sigma^z \frac{\partial V}{\partial d_\mu} + V^{(2)} d_\mu^* \quad (10.11)$$

что приведет к дополнительным слагаемым в (9.21) и (9.28). Отметим также,

x) Предел $\Delta \rightarrow \infty$ практически означает, что Δ велико по сравнению с расстоянием между оболочками, но попрежнему мало по сравнению с ϵ_A .

что для справедливости (9.26) необходимо переопределить скалярную функцию W . Вместо (9.26) с точностью до $\delta R/R$ следует положить (см. (10.2))

$$W = \lambda N - \frac{1}{2} S_P \{ \hat{S}^0 \hat{\rho}^0 \} + \frac{\Delta^2}{2G} + \frac{1}{4} S_P \{ V^{(2)} \sigma^z \hat{\rho}^0 \} d_\mu^* d_\mu =$$

$$= - \frac{1}{2} S_P \left\{ \left(\epsilon^0 + V - \frac{1}{2} V^{(2)} d_\mu^* d_\mu \right) \sigma^z \hat{\rho}^0 \right\} - \frac{\Delta^2}{2G} \quad (10.12)$$

П. Другой дефект рассмотренной модели является более глубоким и связан с градиентной инвариантностью спаривательного взаимодействия (9.5''). Этот факт проявляется, в частности, в отсутствии предельного перехода к гидродинамическому значению для тензора масс B (9.21). Использование вместо (9.5) градиентно инвариантного взаимодействия приводит к дополнительным слагаемым в B [10, 16]. Для момента инерции это видно из (6.7), где член $\mathcal{I}^{(2)}$, обеспечивающий правильный гидродинамический предел, для взаимодействия (9.5'') обращается в нуль (см. (9.17)).

Основная трудность рассмотрения вместо (9.5'') более реального взаимодействия связана с решением уравнения интегрального типа (4.10). Для упрощения задачи полезно сформулировать эквивалентный вариационный метод. Для кинетической энергии \mathcal{T} было получено два эквивалентных (с учетом (4.10)) выражения (4.18) и (4.19'). Запишем \mathcal{T} через их комбинацию в виде

$$\mathcal{T} = 2 \sum_{11'} R(11') Z(11') - \sum_{11'} E_{11'} Z(11') Z(11') -$$

$$- 4 \sum_{122'} (\chi_1^+ \chi_2^+ G_{12}^{(H)} \varphi_1 \varphi_2) Z(2'2) Z(1'1) \quad (10.13)$$

Величина \mathcal{T} , записанная в форме (10.13), обладает свойством стационарности относительно малых изменений Z , т.к. вариационная производная от (10.13) по Z обращается в нуль в силу уравнения (4.10). Таким образом, (10.13) можно использовать для вычисления \mathcal{T} вариационным методом.

Для простоты учтем в $G_{12}^{(H)}$ только член, связанный с куперовским спариванием (последний в (1.33)), для которого

$$(\chi_1^+ \chi_2^+ G_{12}^{(H)} \varphi_1 \varphi_2) = \frac{1}{2} \langle \hat{H}' | G | \hat{H} \rangle \hat{z}_{11}^H \hat{z}_{22}^H \quad (10.14)$$

Основываясь на (9.16) и (10.14), естественно искать Z в виде

$$Z(H) = \frac{R(H)}{E_H} + \frac{Z_{H1}^{(1)}}{E_{H1}} \langle 1|q_{\mu}^*|1' \rangle \Lambda_{\mu}, \quad (10.15)$$

где Λ_{μ} - вариационный параметр. Подставляя (10.15) в (10.13) и варьируя по Λ_{μ} , получаем уравнение

$$\sum_{H1} \langle 1|q_{\mu}^*|1' \rangle \frac{Z_{H1}^{(1)}}{E_{H1}} \left\{ \langle 1|q_{\mu}^*|1' \rangle + 2 \sum_{221} \langle 1\tilde{1}|G|2'2 \rangle \frac{Z_{221}^{(1)}}{E_{221}} \right. \\ \left. + \langle 2|q_{\mu}^*|2' \rangle \right\} \Lambda_{\mu} = -2 \sum_{H1} \langle 1|q_{\mu}^*|1' \rangle \frac{Z_{H1}^{(1)}}{E_{H1}} \langle 1\tilde{1}|G|2'2 \rangle \frac{Z_{221}^{(1)}}{E_{221}} R(221) \quad (10.16)$$

Выражение для кинетической энергии с учетом (10.16) представляется в виде

$$T = \sum_{H1} \frac{1}{E_{H1}} R(H)R(H') - \\ - 2 \sum_{H1221} \frac{Z_{H1}^{(1)}}{E_{H1}} \langle 1\tilde{1}|G|2'2 \rangle \frac{Z_{221}^{(1)}}{E_{221}} R(221) \quad (10.17) \\ - 2 \Lambda_{\mu} \sum_{H1221} R(H) \frac{Z_{H1}^{(1)}}{E_{H1}} \langle 1\tilde{1}|G|2'2 \rangle \frac{Z_{221}^{(1)}}{E_{221}} \langle 2|q_{\mu}^*|2' \rangle$$

Два последних члена в (10.17) определяют дополнительный вклад в тензор масс. Для взаимодействия (9.5) они обращаются в нуль в силу (9.15). Полученные выражения могут быть использованы для оценки роли поправочных членов.

З а к л ю ч е н и е .

Обсудим кратко качественные особенности полученного коллективного гамильтониана, возможные приближения и соответствие с гамильтонианом О.Бора.

Конкретный вид кинетической энергии (8.19) зависит от структуры тензора масс $B_{\mu\nu}(\alpha)$. Выражение (8.19) переходит в гамильтониан О.Бора

при очень жестких предположениях. (Вместо (8.5) $B_{\mu\nu} = \epsilon_1 \delta_{\mu\nu} B_0$, причем $B_0 = \text{const}$). Эти предположения являются естественными в гидродинамической модели, где при разложении T по деформации с точностью до квадратичных членов по $\delta R/R$ следует брать только значение $B_{\mu\nu}$ при $\alpha = 0$. При учете же внутренней структуры, т.е. распределения нуклонов по состояниям ρ_{ν} , разложение $B(\alpha)$ по α не эквивалентно разложению по $\delta R/R$. Полную зависимость B от деформации $\delta R/R$ можно схематически представить в виде (см.обсуждение (10.5))

$$B = B(\delta R/R; \rho(A^{1/3} \delta R/R))$$

откуда видно, что даже при малых $\delta R/R$ разложение по этой величине, вообще говоря, недопустимо. Зависимость B от ρ_{ν} исчезает лишь в гидродинамическом пределе. Для реальных ядер инерционные параметры существенно зависят от ρ_{ν} , поэтому все члены в (8.5), вообще говоря, одного порядка.

Вясним теперь вопрос о возможности разложения B вблизи равновесных значений α_0 . Это зависит от того, насколько сильно меняется B на амплитуде колебаний $\alpha - \alpha_0$. Зависимость B от деформации, как видно из (9.21), имеет вид (см.также /16/)

$$B = B(A^{1/3} \delta R/R)$$

Поэтому критерием справедливости разложения по $\alpha - \alpha_0$ для деформированных ядер является

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_0} A^{1/3} \ll 1$$

Это условие, повидимому, выполняется для большинства деформированных ядер. Для сферических ядер соответствующее условие $A^{1/3} \delta R/R$ выполняется плохо. Это и является причиной того, что простая модель гармонических колебаний дает лишь очень грубое приближение. Все сказанное относится по существу и к параметрам потенциальной энергии.

Таким образом, можно надеяться, что для деформированных ядер гамильтониан (8.19) можно существенно упростить, что делает реально возможным решение соответствующего уравнения Шредингера. что касается сферических ядер, то прямое разложение B по деформации, повидимому, не может привести к хорошим результатам и следует использовать другие приближения.^{х)}

х) Может оказаться, что модель Давыдова - Филиппова является одним из возможных приближений.

Литература

1. A. Bohr. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 26 no 14 (1952)
2. A. Bohr, B. Mottelson. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 27, no 17 (1953)
3. G. Schanff - Goldhaber, J. Wenner. *Phys. Rev.* 98, 219 (1955)
4. А.С. Давыдов, Г.Ф. Филиппов. *ЖЭТФ*, 35, 440 (1958);
5. L. Willets, M. Lean. *Phys. Rev.* 102, 788 (1959)
T. Tamura, L. G. Komar. *Phys. Rev. Lett.* 3, 344 (1959).
T. Tamura, H. Yoshida (Preprint, 1963)
6. R. Arvieu, M. Veneroni. *Compt. Rend.* 250 992 (1960)
M. Beranger; *Phys. Rev.* 120 957 (1960)
T. Marumori. *Progr. Theor. Phys.* 24, 331 (1960)
7. С.Т. Беляев. *ЖЭТФ*, 39, 1387 (1960).
8. Е. Гринь, Д. Зарецкий. *Изв. АН СССР (сер. физич.)*, 9, 1169 (1961).
Д. Зарецкий, М. Урин. *ЖЭТФ*, 41, 898 (1961).
9. С.Т. Беляев, В.Г. Зелевинский. *Nucl. Phys.* 39 (582) 1962.
10. А.Б. Мигдал. *ЖЭТФ*, 37, 249 (1959); 13, 655 (1959).
11. S. Griffin, M. Rich. *Phys. Rev.* 118, 850 (1960)
S. G. Nilsson, O. Prior. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 32, no. 16 (1960)
12. А.К. Керман. *Ann. of. Phys.* 12, 300 (1961)
13. T. Marumori, M. Yamamura, H. Bando. *Progr. Theor. Phys.* 28. 87 (1962)
14. Н. Боголюбов. *УФН*, 67, 549 (1959).
15. S. G. Valatin. *Phys. Rev.* 122 1012 (1961)
D. J. Thouless, S. G. Valatin. *Nucl. Phys.* 31. 211 (1962)
16. С.Т. Беляев. "Selected Topics in Nuclear Theory". Int. Atomic Energy Agency Vienna 1963, p. 291.

17. С.Т. Беляев. *ЖЭТФ*, 40, 672 (1961); *Nucl. Phys.* 24, 322 (1959)
18. С.Т. Беляев. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 31, no 11 (1959)
19. W. Pauli. *Handbuch d. Physik* 24/1, 120 (1933)
20. L.S. Kisslinger, R.A. Sorenson. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* 32 no. 9 (1960)
21. D. Inglis, *Phys. Rev.* 96. 1059 (1954); 97, 801 (1955)

17. C.T. Борзенко. Учен. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. 1964, т. 66, кн. 1, с. 1-10.

18. C.T. Борзенко. Учен. зап. Казан. ун-та. Физ.-мат. науки. 1964, т. 66, кн. 1, с. 11-15.

19. W. Pauli. Handbuch der Physik, 24/1, 150 (1958).

20. L.S. Katsenelenbaum, R.A. Sokolov. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 1960, т. 62, кн. 1, с. 1-10.

21. D. Tatarskiy. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 1954, т. 56, кн. 1, с. 1-10.

Ответственный за выпуск Б.А. Румянцев
 подписано к печати 9/III-64г. № 00542
 формат бумаги 270 x 190, тираж 200
 Заказ № 37 Бесплатно

Отпечатано на роталпринте в Институте
 ядерной физики СО АН СССР.