ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

В.М.Галицкий, В.П.Яковлев

УГЛОВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ЭЛЕКТРОНОМ

Новосибирск 1964

I. В последнее время появился ряд работ /I,2,3,4/, в которых рассматриваются различные эффекты, возникающие при взаимодействии сильной электромагнитной волны с электроном. При этом под сильной понимается волна, содержащая большое число квантов с одинаковыми $\vec{k}$. Интерес к этому кругу явлений вызван получением лазерных пучков большой интенсивности и открывающимися при этом новыми экспериментальными возможностями.

При взаимодействии сильной электромагнитной волны с электроном существенную роль играют нелинейные эффекты, связанные с поглощением из волны или испусканием в волну нескольких квантов одновременно. При этом сечения начинают зависеть от интенсивности падающей волны. Наличие таких процессов приводит также к изменению угловых и спектральных распределений в различных физических процессах.

В настоящей работе рассмотрены угловые и спектральные распределения при рассеянии сильной электромагнитной волны на электроне. Падающая волна рассматривается как классическое электромагнитное поле. Действие этого поля на электрон учитывается точно, т.к. существует точное решение уравнения Дирака в поле плоской волны. Излучение конечных квантов рассматривается по теории возмущений. Получены угловые и спектральные распределения рассеянных квантов в случае плоской, круговой и эллиптической поляризаций падающей волны в предельном случае большой интенсивности

$$\xi = \frac{e A_0}{m} \gg 1 .$$

Найдено также дифференциальное сечение процесса для неполяризованной волны. Показано, что основное рассеяние идет в область малых углов

$$\vartheta \sim \frac{1}{\xi}$$

Интегрированием по углам получены спектральные распределения. Найдены полные сечения, совпадающие в соответствующих предельных случаях с результатами работы /2/.

2. Решение уравнения Дирака для электрона в поле плоской электромагнитной волны, полученное Волковым /5/, можно записать в следующем виде ($\hbar = c = 1$):

$$\psi = \left(1 + \frac{e}{2 f k}\hat{k}\hat{A}\right) u^{(r)}(f)\, e^{iS} \tag{I}$$

За ось z выбрано направление распространения волны с 4-х импульсом k_μ, её векторный потенциал имеет две компоненты A_x и A_y, являющиеся периодическими функциями $u = z - t$. f_μ - 4-х импульс электрона при $t \to -\infty$

когда взаимодействия не было. Для дальнейшего удобно ввести 4-х импульс электрона в волне

$$p_\mu = f_\mu - \frac{1}{2}\xi^2 \frac{m^2}{f_\cdot k} k_\mu ,$$

$$\xi^2 = \frac{e^2 \overline{\vec{A}^2}}{m^2} ,$$

который удовлетворяет условию

$$p^2 = -m^{*2},$$

где $m^* = m(1+\xi^2)^{1/2}$ - эффективная масса электрона.

Функция

$$S = fx + \frac{e\omega}{fk}\int \vec{f}\vec{A}\,du - \frac{e^2\omega}{2fk}\int \vec{A}^2\,du \qquad (2)$$

представляет собой (с точностью до h) классическое действие для движения электрона в поле плоской электромагнитной волны /6/. В случае монохроматической волны, поляризованной по эллипсу в плоскости x , y , классическая траектория электрона в системе координат, где он в среднем покоится ($\bar{p} = 0$), представляет собой пространственную кривую, проекция которой на плоскость x , y является эллипсом, а на плоскость x, z симметричной 8-образной кривой. Для круговой и линейной поляризаций происходит вырождение этой кривой, соответственно, либо в окружность, либо в 8-образную кривую.

Рассмотрим излучение электрона для случая монохроматической волны, поляризованной по эллипсу

$$A_x = A_1 \cos\omega_1 u , \quad A_y = A_2 \sin\omega_1 u \qquad (3)$$

В первом порядке теории возмущений по полю излучения дифференциальное сечение имеет вид:

$$d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} d\sigma_n \qquad (4)$$

$$d\sigma_n = r_0^2 \frac{\omega_2^2}{(f_1 k_1)^2} \frac{1}{4\xi^2 n} \left\{ \left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1} \right) \left[4e^2 \left(A_1^2 |R_1|^2 + A_2^2 |R_2|^2 \right) - \right. \right. \qquad (5)$$

$$\left. \left. - 2e^2 (A_1^2 + A_2^2) |R_0|^2 - 2e^2 (A_1^2 - A_2^2)(R_0^* R_3 + R_0 R_3^*) \right] - 8m^2 |R_0|^2 \right\} dO ,$$

где $r_0 = e^2/4\pi m$ – классический "радиус" электрона, индексы I и 2 относятся, соответственно, к начальному и конечному состояниям, звездочка означает комплексное сопряжение.

$$\{R_0; R_1; R_2; R_3\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{1; \cos x; \sin x; \tfrac{1}{2}\cos 2x\}\exp\{i n g(x)\}\,dx \qquad (6)$$

$$g(x) = x + \alpha\sin x + \beta\cos x + \gamma\sin 2x\,, \qquad (7)$$

$$\alpha = \frac{eA_1}{n}\left(\frac{f_{2x}}{f_2 k_1} - \frac{f_{1x}}{f_1 k_1}\right);\ \beta = \frac{eA_2}{n}\left(\frac{f_{2y}}{f_2 k_1} - \frac{f_{1y}}{f_1 k_1}\right);\ \gamma = \frac{e^2}{8}(A_1^2 - A_2^2)\left(\frac{1}{f_1 k_1} - \frac{1}{f_2 k_1}\right).$$

В выражениях (4) и (5) произведено усреднение и суммирование по соответствующим поляризациям /7/ электрона и кванта. Амплитуда волны нормирована таким образом, что

$$A_1^2 + A_2^2 = \frac{2}{\omega_1}\rho\,,$$

где ρ – плотность фотонов.

Закон сохранения имеет вид:

$$p_1 + nk_1 = p_2 + k_2\,,$$

т.е. такой, как если бы на электроне с 4-х импульсом p_1 рассеивался квант с частотой $n\omega_1$.

Функции R_1, R_2, R_3 могут быть выражены через R_0 /I,2/, однако, сама R_0 в общем случае не может быть вычислена в конечном виде.

3. В случае циркулярно поляризованной волны

$$A_1 = A_2 \equiv A_0\,,$$

рассеивающейся на покоящемся электроне ($\vec{f}_1 = 0$) функция $g(x)$ имеет вид:

$$g(x) = x + z\sin(x + \varphi)\,, \qquad (8)$$

где

$$z = \frac{\xi\sin\vartheta}{1 + \frac{1}{2}\xi^2(1 - \cos\vartheta)}\,, \qquad (9)$$

ϑ – угол между $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$, φ – азимутальный угол.

В этом случае интегралы (6) сводятся к бесселевым функциям /8/ и n-ая гармоника сечения принимает вид /I/:

$$d\sigma_n = r_0^2 n \left(\frac{\omega_2}{n\omega_1}\right)^2 \left\{\left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1}\right)\left[J_n'^2(nz) + \frac{1-z^2}{z^2} J_n^2(nz)\right] - \right.$$ (I0)

$$\left. - \frac{2}{\xi^2} J_n^2(nz)\right\} dO_2 ,$$

где частота излученного кванта

$$\omega_2 = \frac{n\omega_1}{1 + \left(\frac{n\omega_1}{m} + \frac{1}{2}\xi^2\right)(1-\cos\vartheta)} \qquad (II)$$

Слагаемое с $n\omega_1/m$ в знаменателе формулы (II) приводит к квантовым эффектам. Поэтому, когда им можно пренебречь по сравнению с $\xi^2/2$, квантовые эффекты будут несущественны.

Выражение (I0) упрощается в некоторых предельных случаях: I) $\xi \ll 1$; 2) $\omega_1/m \ll 1$, $(\omega_1/m)^{1/2} \ll \xi \ll m/\omega_1$; 3) $\xi \gg 1$.

В предельном случае малой амплитуды волны $\xi \ll 1$ не исчезающая при $\xi \to 0$ гармоника с $n = 1$ дает обычную формулу Клейна – Нишины для комптоновского рассеяния /7/ неполяризованного кванта на покоящемся электроне. Области 2) и 3) перекрываются. Рассмотрим второй предельный случай

$$\frac{\omega_1}{m} \ll 1 \qquad (I2)$$

(Например, для рубинового лазера $\omega_1/m \sim 10^{-6}$).
Покажем, что для ξ в интервале

$$\left(\frac{\omega_1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \xi \ll \frac{m}{\omega_1} \qquad (I3)$$

Членом с $n\omega_1/m$ в знаменателе формулы (II) можно пренебречь. Действительно, для малых ξ существенны гармоники с $n \sim 1$ и тем самым очевидна левая часть неравенства (I3); ниже будет показано, что для $\xi \gg 1$ эффективное число гармоник $n_0 \sim \xi^3$, т.е. $n\omega_1/m \sim \xi^3\omega_1/m \ll \xi^2$.

Дифференциальное сечение (I0) принимает вид:

$$d\sigma_n = 2r_0^2 \frac{n(1-a^2)}{a^2 \sin^2\vartheta} \left\{z^2 J_n'^2(nz) + \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) J_n^2(nz)\right\} dO , \qquad (I4)$$

где

$$a^2 = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} .$$

Воспользовавшись некоторыми соотношениями для бесселевых функций /9/ можно показать, что для $0 \le z < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, J_n^2(nz) = \frac{1}{4}\frac{z^2}{(1-z^2)^2}\left(1-\frac{z^2}{4}-\frac{z^4}{96}-\dots\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, J_n'^2(nz) \cong \frac{6-z^2(1-z^2)}{16(1-z^2)}+\frac{1}{8z^2}\ln(1-z^2). \tag{15}$$

С помощью этих формул получаем для дифференциального сечения, просуммированного по всем гармоникам, выражение

$$\frac{d\sigma}{do}=\frac{1}{8}r_0^2\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^2\left[\frac{6}{1-z^2}+\left(1-\frac{z^2}{\alpha^2}\right)\frac{4-z^2}{(1-z^2)^2}+2\frac{\ln(1-z^2)}{z^2}-z^2\right]. \tag{16}$$

Здесь z^2, определяемое формулой (9), можно записать в виде

$$z^2=\alpha^2\frac{(1-\alpha^2)\sin^2\vartheta}{\left(1-\alpha^2\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}.$$

При $\xi \gg 1$, $\alpha^2\approx 1$ дифференциальное сечение (16) имеет резкий максимум при $\vartheta=\vartheta$

$$ctg\frac{\vartheta_0}{2}=(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Для интегрирования по углам удобно сделать замену переменного

$$\sin\vartheta=\frac{(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta}{1+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos\theta)};\quad \cos\vartheta=\frac{\cos\theta+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos\theta)}{1+\frac{1}{2}\xi^2(1+\cos\theta)}$$

$$ctg\frac{\vartheta}{2}=(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}\,ctg\frac{\theta}{2};\quad z^2=\alpha^2\sin^2\theta. \tag{18}$$

Угол θ имеет физический смысл угла рассеяния в системе координат, движущейся вдоль $\vec{k}_1$ со скоростью

$$V=\frac{1}{2}\xi^2\Big/\left(1+\frac{1}{2}\xi^2\right).$$

В этой системе координат $\vec{p}_1=0$ и классическая траектория электрона есть окружность, причем величина α^2 играет роль отношения v^2/c^2. Интегрирование дает:

$$\sigma=\frac{\pi r_0^2}{4}\left\{\frac{arctg\,\xi}{\xi}\left(15+\frac{1}{\xi^2}\right)-4\left(\frac{arctg\,\xi}{\xi}\right)^2-\frac{1}{\xi^2}\left[1+\frac{4}{3}\left(\frac{\xi^2}{1+\xi^2}\right)^2\right]\right\}. \tag{19}$$

Если $\xi \ll 1$, формула (I9) переходит в классическую формулу Томсона /7/

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 .$$

При $\xi \gg 1$ главный член в (I9) приводит к выражению

$$\sigma \approx \frac{15\pi^2}{8} r_0^2 \frac{1}{\xi} \tag{20}$$

Рассмотрим угловое и спектральное распределение для волны большой интенсивности

$$\xi \gg 1 \tag{21}$$

Это соответствует $1-\alpha^2 \ll 1$, т.е. движение электрона в волне является ультрарелятивистским и в излучении существенны большие n. При этом, как это видно из (9) или (I8), основное рассеяние идет под углом, определяемым формулой (I7) /I/.

Для интегрирования (I0) по углам сделаем замену переменного (I8), воспользуемся асимптотическими выражениями для бесселевых функций через функции Эйри /8/ и, учитывая быструю сходимость интегралов, распространим пределы интегрирования по $d\cos\theta$ до бесконечности, полагая, где это возможно, $\cos\theta = 0$:

$$\sigma_n \cong 8\cdot 2^{\frac{1}{3}} r_0^2 \frac{1-a^2}{n^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{1}{\eta^2}\int_0^\infty \Big\{\Big(\eta+\frac{1}{\eta}\Big)\Big[\Phi'^2(u)+u\,\Phi^2(u)\Big] - 2\Big(\frac{n}{2}\Big)^{\frac{2}{3}}(1-a^2)\,\Phi^2(u)\Big\}\,dx \tag{22}$$

где

$$u = \Big(\frac{n}{2}\Big)^{\frac{2}{3}}(1-a^2+x^2) \tag{23}$$

$$\eta = 1 + \frac{n\omega_1}{m\xi^2} .$$

Если

$$1 \ll n \ll \xi^3 , \tag{24}$$

$$\sigma_n \approx 3{,}26\, r_0^2 \frac{1}{\xi^2 n^{2/3}} \quad \frac{1+\eta^2}{\eta^3} . \tag{25}$$

В другом предельном случае

$$n \gg \xi^3 , \tag{26}$$

для функций Эйри воспользуемся асимптотическим выражением:

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right), \quad x \gg 1 \tag{27}$$

и оценим интегралы по методу Лапласа /IO/. Сечение экспоненциально мало:

$$\sigma_n \approx 2\pi^{\frac{1}{2}} r_0^2 \frac{1}{n^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\eta^2 - \eta + 1}{\eta^3} \exp\left(-\frac{2}{3} \frac{n}{\xi^3}\right) \tag{28}$$

Таким образом, эффективное число гармоник

$$n_0 \sim \xi^3 . \tag{29}$$

Для получения полного сечения суммирование по n можно заменить интегрированием, учитывая, что эффективное число гармоник велико. Тогда

$$\sigma = \frac{12}{\pi} r_0^2 (1-a^2)^{\frac{1}{2}} F(s)$$

$$F(s) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^\infty dy \cdot y \left(1 + \frac{3}{2} s x^3 y\right)^{-2} \left\{ \left[1 + \frac{3}{2} s x^3 y + \right.\right. \tag{30}$$

$$\left.\left. + \left(1 + \frac{3}{2} s x^3 y\right)^{-1}\right] \left[K_{\frac{1}{3}}^2(y) + K_{\frac{2}{3}}^2(y)\right] - 2x^2 K_{\frac{1}{3}}^2(y) \right\}, \quad s = \frac{\xi \omega_1}{m},$$

где $K_{\frac{1}{3}}$ и $K_{\frac{2}{3}}$ - цилиндрические функции /8/.
В случае $s \ll 1$ получаем выражение (20), а при $s \gg 1$

$$\sigma \approx 7\pi r_0^2 / \xi s^{\frac{1}{3}} . \tag{31}$$

Выражения (30) и (3I) совпадают с результатами Никишова и Ритуса /2/.

4. Для линейно поляризованной волны

$$A_1 = A_0 , \quad A_2 = 0 ,$$

рассеивающейся на покоящемся электроне ($\vec{f}_1 = 0$), функция $g(x)$ принимает вид:

$$g(x) = x + \sqrt{2} \frac{\xi \sin\vartheta \cos\varphi}{1 + \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\vartheta)} \sin x + \frac{1}{4} \frac{\xi^2(1-\cos\vartheta)}{1 + \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\vartheta)} \sin 2x . \tag{32}$$

Дифференциальное сечение (5) определяется выражением /2/:

$$d\sigma_n = r_0^2 n \left(\frac{\omega_2}{n\omega_1}\right)^2 \left\{ \left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1} \right) (2R_1^2 - R_0^2 - 2R_0 R_3) - 2\frac{1}{\xi^2} R_0^2 \right\} do . \quad (33)$$

Функции (6) R_0, R_1, R_3 являются действительными, но не могут быть вычислены в конечном виде.

Для малой амплитуды волны

$$\xi \ll 1$$

не исчезающая при $\xi \to 0$ гармоника с n = I представляет собой обычное выражение /7/ для комптоновского рассеяния поляризованного кванта на покоящемся электроне.

Рассмотрим угловое и спектральное распределение излучения для поля большой интенсивности

$$\xi \gg 1, \quad 1 - a^2 \ll 1, \quad a^2 = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}, \quad (34)$$

когда основную роль играют высокие гармоники $n \gg 1$.

Для вычисления функций (6) воспользуемся следующим приемом. В ультрарелятивистском случае основной вклад в излучение в данном направлении $\vec{k}_2/|\vec{k}_2|$ дают те участки траектории частицы, на которых направление ее скорости $\vec{v}$ близко к $\vec{k}_2/|\vec{k}_2|$. Угловое расстояние между $\vec{k}_2$ и $\vec{v}$ определяется первой производной функции $g(x)$ (32), поэтому надо найти точки минимума функции $g'(x) > 0$, т.е. решения уравнения

$$g''(x_0) = 0 . \quad (35)$$

Эти решения имеют вид

$$\cos x_0 = - \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\varphi}{\sqrt{2}\,\xi\,(1-\cos\vartheta)}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \pi \quad (36)$$

Решение x_0 существует при определенных ограничениях на углы ϑ и φ

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,|\cos\varphi| \le \xi\sqrt{2} \qquad \text{или} \qquad \vartheta \ge \vartheta_0(\varphi), \quad (37)$$

что приводит для $\varphi = 0, \pi$ к условию

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} \le \operatorname{ctg}\frac{\vartheta_0}{2} = \xi\sqrt{2}, \quad \vartheta \ge 2\operatorname{arcctg}\xi\sqrt{2} = \vartheta_0 . \quad (38)$$

Возникновение этого условия становится ясным из рассмотрения классической траектории электрона, которая такова, что вектор скорости частицы не может быть направлен внутрь угла $\vartheta < \vartheta_0$. На границах области (37) $\cos x_0 = \pm 1$ и это решение переходит в два других – x_1 и x_2. Поэтому для вычислений в области $\vartheta > \vartheta_0$ можно разложить функцию $g(x)$ в ряд в окрестности x_0, а для углов $\vartheta < \vartheta_0$ разложение следует проводить в окрестностях точек x_1 и x_2. Можно показать, что сечение в области углов $\vartheta < \vartheta_0$ мало.

Отметим, что этот метод может быть использован для определения излучения ультрарелятивистской частицы, двигающейся по произвольной траектории

Разлагаем $g(x)$ в ряд в окрестности x_0 до членов третьего порядка и, учитывая быструю сходимость интегралов (6) при больших n, распространяем пределы интегрирования до бесконечности.

Тогда

$$d\sigma_n = \frac{2}{\pi} r_0^2 n^{\frac{1}{3}} (1-a^2)\left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\sin^2\varphi\right)\left[\frac{1-a^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2a^2\sin^2\frac{\vartheta}{2} - (1-a^2)\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\varphi}\right]^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\times\left(\frac{\omega_2}{n\omega_1}\right)^2 \left\{\left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1}\right)\left[2\cos^2 ng(x_0)\,\Phi^2(u) + 2\sin^2 ng(x_0)\frac{1}{u}\,\Phi'^2(u)\right] - \right. \tag{39}$$

$$\left. - 2\cos^2 ng(x_0)\frac{2}{1+\mathrm{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\varphi}\,\Phi^2(u)\right\} do\,,$$

где Φ – функция Эйри

$$u = n^{\frac{2}{3}}(1-a^2)\frac{\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\varphi}{\left(1-a^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{2/3}\left[2a^2\sin^2\frac{\vartheta}{2} - (1-a^2)\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\varphi\right]^{1/3}} \tag{40}$$

Это выражение имеет смысл в области углов (37). Из-за множителей $\sin^2 ng(x_0)$ и $\cos^2 ng(x_0)$ сечение представляет собой сумму плавных и быстро осциллирующих членов; возникновение последних связано с интерференцией излучения от окрестностей двух точек траектории частицы, в которых касательные к траектории близки к направлению излучения.

Выражение (39) согласуется с результатом Никишова и Ритуса /2/ (подинтегральная функция (26) работы /2/).

Рассмотрим случай

$$1 \ll n \ll \xi^3 \tag{41}$$

Тогда из-за экспоненциального убывания Φ при больших значениях аргумента (27) излучение сосредоточено вблизи плоскости классической траектории электрона в интервале углов

$$\Delta\varphi = |\varphi| \sim \frac{1}{\xi} \quad ; \quad \Delta\varphi = |\varphi - \pi| \sim \frac{1}{\xi} \tag{42}$$

Вблизи границы (37) $u \to \infty$ и сечение экспоненциально убывает.

Проинтегрируем (39) по углам вылета кванта, полагая, где это возможно, $\varphi = 0$ или π и распространяя пределы интегрирования по $d\varphi$ до бесконечности:

$$\sigma_n = r_0^2 \frac{1}{\xi^2 n^{2/3}} \; G(\eta) \; , \tag{43}$$

где

$$G(\eta) = \frac{4\cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{\pi} \Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)\left\{ F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) - \frac{2(\eta-1)}{2\eta-1} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}; \frac{2}{3}\frac{2(\eta-1)}{2\eta-1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{8}\frac{4\eta(2\eta+1)-1}{(2\eta-1)^2(2\eta+1)} F\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\frac{2(\eta-1)}{2\eta-1}\right) - \tag{44}$$

$$\left. - \frac{1}{8}\frac{1+2(2\eta-1)(2\eta+3)}{(2\eta-1)^2(2\eta+1)} F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\frac{2(\eta-1)}{2\eta-1}\right)\right\},$$

и F - гипергеометрическая функция.

Для практического использования выражения (44) можно входящие в него гипергеометрические функции апроксимировать рациональными, т.к. коэффициенты гипергеометрических рядов довольно быстро становятся почти постоянными.

При

$$n \gg \xi^3 \tag{45}$$

воспользуемся асимптотикой функций Эйри (27) и оценим интегралы по методу Лапласа /10/. В этом случае сечение экспоненциально убывает

$$\sigma_n \approx 4 r_0^2 \frac{1}{n\xi} \; \frac{\eta^2 - \eta + 1}{\eta^3} \; \exp\left(-\frac{2}{3}\frac{n}{\xi^3}\right), \tag{46}$$

и, следовательно, эффективное число гармоник

$$n_0 \sim \xi^3. \tag{47}$$

Если для $n \sim n_0$ параметр $\eta \approx 1$

$$\eta_0 = 1 + s \ , \quad s = \frac{\xi \omega_1}{m} \ll 1 \ , \tag{48}$$

квантовые эффекты несущественны, т.к. они в этом случае начинают играть роль, когда сама n-ая гармоника сечения экспоненциально мала. Функция $G(\eta)$ (44) превращается в константу и сечение (43) принимает вид:

$$\sigma_n \approx 6{,}5\, r_0^2 \, \frac{1}{\xi^2} \, n^{-\frac{2}{3}} \tag{49}$$

В том случае, если

$$s \gg 1 \ , \quad \eta \gg 1 \tag{50}$$

основной член в $G(\eta)$ пропорционален η^{-1} и сечение

$$\sigma_n \approx 2{,}7\, r_0^2 \, \frac{m}{\omega_1} \, n^{-\frac{5}{3}} \tag{51}$$

Для промежуточных значений s часть гармоник (43) будут "классическими", а затем начнут играть роль квантовые эффекты.

Угловая зависимость полного сечения получается в результате интегрирования (39) по dn :

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{3}{2\pi^2} r_0^2 \, \frac{\left(1 - a^2 + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{(1-a^2)\sin^2\frac{\vartheta}{2}\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\varphi\right)} \, Q(\nu) \ , \tag{52}$$

где

$$Q(\nu) = \int_0^\infty \frac{x\,dx}{\left[1 + (\nu x + \frac{1}{2}\xi^2)(1-\cos\vartheta)\right]^2} \left\{ \left[\frac{1 + (\nu x + \frac{1}{2}\xi^2)(1-\cos\vartheta)}{1 + \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\vartheta)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1 + \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\vartheta)}{1 + (\nu x + \frac{1}{2}\xi^2)(1-\cos\vartheta)} \right] \left(K_{\frac{1}{3}}^2(x) + K_{\frac{2}{3}}^2(x)\right) - \frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\varphi} K_{\frac{1}{3}}^2(x) \right\} ; \tag{53}$$

$$\nu = \frac{3}{2} \, \frac{\omega_1 \xi^3}{m} \, \frac{\left(1 - a^2 + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\left[2a^2\sin^2\frac{\vartheta}{2} - (1-a^2)\cos^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\varphi\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} .$$

Если $s \ll 1$, т.е. $1 \ll \xi \ll \frac{m}{\omega_1}$

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} r_0^2 \frac{1-a^2}{1-\cos\vartheta} \frac{2(1-\cos\vartheta)+3(1+\cos\vartheta)\sin^2\varphi}{\left[1-\cos\vartheta+(1+\cos\vartheta)\sin^2\varphi\right]^2} . \tag{54}$$

Это выражение имеет смысл в области углов

$$ctg^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\cos^2\varphi \leq 2\xi^2 .$$

Излучение сосредоточено вблизи плоскости поляризации волны. В области малых углов $\vartheta \sim \frac{1}{\xi}$ сечение имеет резкий максимум.

Наконец, полное сечение получается из (52) интегрированием по углам:

$$\sigma = \frac{24}{\pi^2} r_0^2 \frac{1}{\xi} F(s) , \tag{55}$$

где

$$F(s) = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{(1-x)(1-x^2)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty dz\cdot z\left[K_{\frac{1}{3}}^2(z)+K_{\frac{2}{3}}^2(z)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}}\left(u+u^3\right) - \int_0^\infty dz\cdot z\, K_{\frac{1}{3}}^2(z)\int_0^1 \frac{2y^2 dy}{(1-y^2)^{1/2}}\, u^2 \right\} ; \tag{56}$$

$$u = \left[1+3s\left(\frac{1-3x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} z\, y^3\right]^{-1} , \quad s = \frac{\xi\omega_1}{m} .$$

Рассматривая два предельных случая, получим: для $s \ll 1$

$$\sigma = 20\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} r_0^2 \frac{1}{\xi} , \tag{57}$$

для $s \gg 1$ главный член в $F(s)$ приводит к результату:

$$\sigma = 5{,}3\pi r_0^2 \frac{1}{\xi s^{1/3}} \tag{58}$$

Выражения (55) - (58) согласуются с результатами, полученными Никишовым и Ритусом /2/.

Если $s \ll 1$, т.е. $1 \ll \xi \ll \frac{m}{\omega_1}$

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{4}{\pi\sqrt{3}} r_0^2 \frac{1-a^2}{1-\cos\vartheta} \frac{2(1-\cos\vartheta)+3(1+\cos\vartheta)\sin^2\varphi}{\left[1-\cos\vartheta+(1+\cos\vartheta)\sin^2\varphi\right]^2} . \quad (54)$$

Это выражение имеет смысл в области углов

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}\cdot\cos^2\varphi \le 2\xi^2 .$$

Излучение сосредоточено вблизи плоскости поляризации волны. В области малых углов $\vartheta \sim \frac{1}{\xi}$ сечение имеет резкий максимум.

Наконец, полное сечение получается из (52) интегрированием по углам:

$$\sigma = \frac{24}{\pi^2} r_0^2 \frac{1}{\xi} F(s) , \quad (55)$$

где

$$F(s) = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{(1-x)(1-x^2)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty dz\cdot z\left[K_{\frac{1}{3}}^2(z)+K_{\frac{2}{3}}^2(z)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{1/2}} (u+u^3) - \int_0^\infty dz\cdot z\, K_{\frac{1}{3}}^2(z) \int_0^1 \frac{2y^2 dy}{(1-y^2)^{1/2}} u^2 \right\} ; \quad (56)$$

$$u = \left[1+3s\left(\frac{1-3x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} z y^3\right]^{-1} , \quad s = \frac{\xi\omega_1}{m} .$$

Рассматривая два предельных случая, получим: для $s \ll 1$

$$\sigma = 20\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} r_0^2 \frac{1}{\xi} , \quad (57)$$

для $s \gg 1$ главный член в $F(s)$ приводит к результату:

$$\sigma = 5{,}3\pi r_0^2 \frac{1}{\xi s^{1/3}} \quad (58)$$

Выражения (55) - (58) согласуются с результатами, полученными Никишовым и Ритусом /2/.

5. Представляет интерес излучение электрона в неполяризованной волне большой интенсивности ($\xi \gg 1$). Для этого надо соответствующие выражения предыдущего раздела усреднить по углу φ между плоскостью рассеяния и плоскостью поляризации волны.

Приведем результаты. n-ая гармоника дифференциального сечения имеет вид:

$$\frac{d\sigma_n}{do} = \frac{2}{\pi^2} r_0^2 \frac{1}{n(1-a^2)} \frac{\left(1-a^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^2}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}} \left(\frac{\omega_2}{n\omega_1}\right)^2 \left\{\left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1}\right) H_1(\nu) - H_2(\nu)\right\} \quad (59)$$

где

$$H_1(\nu) = \nu^{\frac{1}{2}} \int_\nu^\infty \frac{\Phi'^2(x) + x\,\Phi^2(x)}{(x-\nu)^{1/2}}\,dx$$

$$H_2(\nu) = 2\nu^{\frac{3}{2}} \int_\nu^\infty \frac{\Phi^2(x)}{(x-\nu)^{1/2}}\,dx$$

$$\nu = \frac{1}{2} n^{\frac{2}{3}} (1-a^2) \left(\frac{1-\cos\vartheta}{1-a^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (60)$$

$$\vartheta > \vartheta_0 = 2\,\mathrm{arc\,ctg}\,\xi\sqrt{2}$$

Если $n \gg \xi^3$,сечение экспоненциально убывает. Если $n \ll \xi^3$

$$\frac{d\sigma_n}{do} = \frac{6^{\frac{1}{6}}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi^2} \frac{r_0^2}{n^{2/3}(1-a^2)^{1/2}} \frac{\left(1-a^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{5}{3}}}{\sin^{\frac{7}{3}}\frac{\vartheta}{2}} \left(\frac{\omega_2}{n\omega_1}\right)^2 \left(\frac{f_1 k_1}{f_2 k_1} + \frac{f_2 k_1}{f_1 k_1}\right). \quad (61)$$

Сечение имеет резкий максимум вблизи ϑ_0 . Для $\vartheta < \vartheta_0$ сечение мало. Для $1 \ll \xi \ll m/\omega_1$ дифференциальное сечение, просуммированное по n , имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{do} = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} r_0^2 (1-a^2) \frac{4+\cos^2\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}, \quad \vartheta \geq \vartheta \quad (62)$$

Таким образом в сильной электромагнитной волне основное излучение идет в область малых углов $\vartheta \sim \frac{1}{\xi}$.

Литература

1. Goldman I.I., Phys. Letters, 8, 103 (1964); ЖЭТФ, 46, 1412 (1964).

2. Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, 776 (1964).

3. Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, 1768 (1964).

4. Lowell S. Brown and T.W.B. Kibble, Phys. Rev, 133, A705 (1964).

5. Volkov D.M., Zs. f. Phys., 94, 250 (1935); ЖЭТФ, 7, 1286 (1937).

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, Физматгиз, 1962.

7. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика; Физматгиз, 1962.

8. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

9. А.Кратцер, В.Франц. Трансцендентные функции. ИЛ. 1963.

10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958, стр.449.

Ответственный за выпуск Якимец
Подписано к печати МН00647 - 31.10.64.
Формат бумаги 270 x 190, тираж 550 экз.
Заказ №   Бесплатно

Отпечатано на ротопринте в Институте
ядерной физики СО АН СССР.

Литература

1. Goldman I.I., Phys. Letters, 8, 103 (1964); ЖЭТФ, 46, 1412 (1964).
2. Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, 776 (1964).
3. Никишов А.И., Ритус В.И. ЖЭТФ, 46, 1768 (1964).
4. Lowell S. Brown and T.W.B. Kibble, Phys. Rev, 133, A 705 (1964).
5. Volkov D.M., Zs. f. Phys., 94, 250 (1935); ЖЭТФ, 7, 1286 (1937).
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля, Физматгиз, 1962.
7. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика; Физматгиз, 1962.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.Н. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
9. А.Кратцер, В.Франц. Трансцендентные функции. ИЛ. 1963.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958, стр.449.

Ответственный за выпуск Якимец
Подписано к печати МН00647 - 31.10.64.
Формат бумаги 270 х 190, тираж 550 экз.
Заказ №   Бесплатно

Отпечатано на ротопринте в Институте
ядерной физики СО АН СССР.