

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

ПРЕПРИНТ

Б.В. ЧИРИКОВ.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЧАСТИЧНО КОМПЕНСИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОННОГО

ПУЧКА .

г. Новосибирск
1964

А н н о т а ц и я .

В работе рассмотрены условия устойчивости частично компенсированного электронного пучка по отношению к изгибанию (образование "змеек"). Показано, что в случае непрерывного спектра волновых векторов возмущений всегда существует область сильной (с относительно большим инкрементом) неустойчивости. В случае дискретного спектра (например, при конечной длине пучка в ускорителе) неустойчивость появляется лишь при токах пучка, больших некоторого критического. Затухание Ландау и радиационное трение не стабилизируют неустойчивость.

Обнаружена слабая диссипативная неустойчивость, вызываемая радиационным трением. В некоторых случаях затухание Ландау стабилизирует эту неустойчивость, однако, может и усиливать ее.

Исследование проведено для модели пучка в виде двух шнуров (электронного и ионного) неизменных размеров и с однородными плотностями.

A B S T R A C T

Conditions of sinuous (bending) instability of partly neutralised electron beam are considered. It is shown that there is always a domain of strong (with relatively large increment) instability for continuous spectrum of perturbation wave numbers. In the case of line spectrum (for instance due to finite beam length in accelerators) the instability takes place only for the beam current more the certain critical value. Radiation and Landau's dampings don't suppress the instability.

The weak instability of the dissipative type due to radiation damping was discovered. In some cases Landau's damping suppresses this instability, however in other cases may intensify it.

The investigation was carried out for the beam model having the shape of two threads (electron and ion) of fixed dimensions and uniform densities.

Обычно при исследовании устойчивости пучка частиц в ускорителе ограничиваются одночастичным приближением, т.е. рассматривают движение одной частицы во внешних полях. Проблема устойчивости в этом случае может быть решена практически однозначно и сводится к соответствующему выбору внешних полей.^{х)} Взаимодействие частиц в первом приближении может быть учтено как электростатическое расталкивание, что позволяет оценить предельный ток. В действительности, однако, пучок в ускорителе, частично или полностью компенсированный, представляет из себя своеобразную плазму. Как хорошо известно, в плазме возможно возникновение целого ряда неустойчивостей, связанных с взаимодействием большого числа заряженных частиц. Возникает вопрос, в какой мере эти неустойчивости могут проявиться в ускорителях? Впервые такие исследования были проделаны в работах Г.И. Будкера /3/ для так называемого стабилизированного электронного пучка. Одной из наиболее опасных плазменных неустойчивостей является неустойчивость по отношению к изгибанию пучка (неустойчивость типа "змейки"). В /3/ показано, что поляризация пучка, т.е. относительное смещение электронов и ионов, приводит к стабилизации этой неустойчивости для достаточно коротковолновых начальных возмущений; было высказано предположение, что длинноволновые возмущения могут быть стабилизированы внешними полями. Дальнейшее исследование этой неустойчивости произведено в работах /4,5/. Авторы приходят к выводу, что полной устойчивости можно добиться лишь в сильно-фокусирующем внешнем магнитном поле, в то время как токи Фуко и слабая фокусировка не обеспечивают устойчивости. Эти результаты получены путем отдельного рассмотрения стабилизации внешним полем и поляризацией и требования, чтобы обе области устойчивости перекрывались. Такое рассмотрение, вообще говоря, недостаточно, поскольку при совместном действии обеих сил возможны новые эффекты, что и оказывается в действительности. Как показано в настоящей работе, совместное действие поляризационных и внешних сил приводит к тому, что неустойчивость всегда возникает для определенного интервала длин волн.

§ I. Дисперсионное уравнение.

Следуя /3-5/, начнем изучение устойчивости с обычной простой модели: электроны и ионы образуют два цилиндрических шнура одного и того же радиуса a с равномерными плотностями n_e и n_i ; для которых мы будем использовать безразмерные значения:

х) Заметим, что в системах без затухания (например, протонные накопительные кольца) возможны тонкие нелинейные эффекты типа стохастической неустойчивости /1/ или расщепления сепаратрисы /2/, с трудом поддающиеся расчету.

$$v_e = \frac{\pi a^2 e^2 n_e}{mc^2}; \quad v_i = \frac{\pi a^2 e^2 n_i}{mc^2} \quad (\text{I.1})$$

m - масса электрона. Оба шнура могут двигаться относительно друг друга и между ними действуют поляризационные силы, равные в расчете на один электрон:

$$f_n = 2\pi e^2 n_i (y_i - y_e) = 2m v_i \left(\frac{c}{a}\right)^2 (y_i - y_e) \quad (\text{I.2})$$

y - поперечное смещение соответствующего шнура от равновесного положения. На электроны кроме того действуют внешние силы:

$$f_{вн} = -\gamma m \lambda^2 y_e \quad (\text{I.3})$$

$\gamma = W/mc^2$ - релятивистский фактор для электронов; колебания предполагаются настолько малыми, что силы можно считать чисто поперечными, так что учет релятивистских эффектов в уравнениях движения сводится к замене $m \rightarrow \gamma m$. Мы не учитываем магнитных сил (магнитной "массы" тока), поскольку при условии

$$\frac{\gamma}{v_e \ln R/a} \gg 1 \quad (\text{I.4})$$

которое обычно хорошо выполняется, магнитная "масса" пучка много меньше механической $1/3$ (R - радиус орбиты пучка). Наконец, примем, что ионы совершают только поперечные колебания (колебания ионного шнура), а их продольная скорость равна нулю. При указанных предположениях уравнения движения имеют вид $1/3$:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_e + \lambda^2 y_e &= \Omega^2 (y_i - y_e) \\ \ddot{y}_i &= \xi \Omega^2 (y_e - y_i) \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

где

$$\Omega^2 = 2 \left(\frac{c}{a}\right)^2 \frac{v_i}{\gamma} \quad (\text{I.6})$$

$\xi = \gamma m / \alpha M$ - отношение электронной и ионной массы пучка;

$\alpha = v_i/v_e$ - коэффициент компенсации электронного пучка; точка означает полную производную по времени: $d/dt = \partial/\partial t + v \partial/\partial x$; $v = \beta c$ - продольная скорость электронов в положительном направлении оси x . Как обычно, задачу об устойчивости будем рассматривать в линейном приближении для возмущений вида $y \sim \exp i(kx - \omega t)$. Подстановка в (I.5) приводит к дисперсионному уравнению, полученному в /3/, которое, однако, удобно записать в другой форме /7/:

$$F(\omega) = \frac{\xi \Omega^2}{\omega^2} + \frac{\Omega^2}{(kv - \omega)^2 - \lambda^2} = 1 \quad (\text{I.7})$$

§ 2. Неустойчивость.

Благодаря наличию особенностей у функции $F(\omega)$, качественный анализ устойчивости по дисперсионному уравнению (I.7) существенно облегчается. Очевидно, возможны два типа расположения линий $F(\omega)$, которые схематически изображены на рисунке для $kv > 0$; случай $kv < 0$ сводится к изменению знака ω . При $kv < \lambda$ все четыре корня действительны (устойчивость). При $kv > \lambda$, наоборот, всегда найдутся такие k , для которых линия $F = 1$ попадет как раз в "зазор" между максимумом и минимумом $F(\omega)$, что соответствует паре комплексно-сопряженных корней и, следовательно, неустойчивости. Действительно, при изменении kv от λ до ∞ минимум $F(\omega)$ изменяется от ∞ до 0 и при каком-то k_2 равняется 1. С другой стороны, максимум $F(\omega)$ уменьшается от некоторого значения $F(\omega_1)$ при $kv \rightarrow \lambda$ до $-\Omega^2/\lambda^2$ при $kv \rightarrow \infty$. Если $F(\omega_1) < 1$ (малые ξ), то волновые вектора неустойчивых возмущений лежат в интервале: $\lambda/v < k < k_2$; если же $F(\omega_1) > 1$ (большие ξ), то в интервале: $k_1 < k < k_2$, где k_1 такое значение k , при котором максимум $F(\omega)$ равен 1. Очевидно, что $k_2 > k_1$, так как в противном случае (отсутствие "зазора") уравнение (I.7) имело бы два лишних корня. Следовательно, мы приходим к выводу, что всегда существует интервал длин волн возмущений, которые являются неустойчивыми. Этот вывод качественно отличается от результатов /4,5/ и имеет следующий фактический смысл. Если учесть только поляризационные силы ($\lambda = 0$), то критерий устойчивости имеет вид /3,6/:

$$kv > \Omega \left(1 + \xi^{1/3}\right)^{3/2} \quad (\text{2.1})$$

С учетом только внешних сил (1.3) ($\Omega \rightarrow \infty$) дисперсионное соотношение (1.7) принимает вид:

$$(\omega - kv)^2 - \lambda^2 + \omega^2/\xi = 0 \quad (2.2)$$

откуда

$$\omega = kv \frac{\xi}{1 + \xi} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2(1 + \xi) - (kv)^2}{(1 + \xi)(1 + 1/\xi)}} \quad (2.3)$$

и критерий устойчивости

$$kv < \lambda \sqrt{1 + \xi} \quad (2.4)$$

Казалось бы, что если выбрать $\Omega < \lambda$ ($\xi \gg 1$ или $\xi \ll 1$), то области (2.1) и (2.4) перекрываются и обеспечивают полную устойчивость пучка /4,5/. Однако совместное действие обоих стабилизирующих факторов приводит к тому, что они мешают друг другу, в результате чего всегда остается область неустойчивости. Мешающее действие связано с тем, что внешние силы, уменьшая амплитуду колебаний электронов, одновременно уменьшают и разделение шнуров, т.е. ослабляют поляризационные силы.

§ 3. Зоны неустойчивости и инкременты.

Рассмотрим вначале случай $\xi \ll 1$, который имеет место уже при сравнительно небольшой компенсации $\alpha \gg \delta^m/\mu \ll 1$. Как отмечено выше, зона неустойчивости в этом случае соответствует $\lambda/v < k < k_2$, так как максимум $F'(\omega)$ для всех $k > \lambda/v$ остается меньше нуля. Величина k_2 находится в Дополнении; в результате получаем область неустойчивости:

$$\lambda^2 < (kv)^2 < \lambda^2 + \Omega^2 \left[1 + 3\xi^{1/3} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \right)^{1/3} \right] \quad (3.1)$$

которая уменьшается, но не исчезает при условии перекрытия $\Omega < \lambda$.

Комплексные корни в зоне неустойчивости равны (8,9)

$$\omega \approx \xi \frac{kv \Omega^4}{\Omega^2 + \lambda^2 - (kv)^2} \pm i \sqrt{\xi \Omega^2 \frac{(kv)^2 - \lambda^2}{\Omega^2 + \lambda^2 - (kv)^2}} \quad (3.2)$$

откуда видно, что инкремент относительно мал ($\sim \sqrt{\xi}$) и неустойчивость является почти аperiodической ($\text{Re } \omega \ll \text{Im } \omega$). Наиболее опасен правый край зоны неустойчивости $(kv)^2 \rightarrow \Omega^2 + \lambda^2$. В этом случае приближенное выражение (3.2) неприменимо и заменяется (12) на:

$$\omega \approx \Omega \left(\frac{\xi \Omega}{4 \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2}} \right)^{1/3} \cdot (1 \pm i) \quad (3.3)$$

Фактически, однако, максимальное значение инкремента может определяться разбросом частот $\Delta \Omega$.^{х)} Точный учет этих флуктуаций требует отказа от принятой простой модели. Грубая оценка эффекта может быть сделана, если принять, что минимальное значение разности $\Omega^2 + \lambda^2 - (kv)^2 = 2 \Omega^2 \delta$, где $\delta = \Delta \Omega / \Omega$.

Из (3.2) получаем:

$$\omega \approx \xi \frac{\sqrt{\Omega^2 + \lambda^2}}{4 \delta^2} \pm i \sqrt{\frac{\xi \Omega^2}{2 \delta^2}} \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь противоположный предельный случай $\xi \gg 1$, который соответствует чрезвычайно слабой компенсации пучка: $\alpha \ll \frac{\gamma m}{\mu}$ и может осуществляться только если приняты специальные меры по очистке пучка от ионов. Примем, что плотность электронного пучка остается постоянной

$$\xi \Omega^2 = \omega_0^2 = 2 \left(\frac{c}{a} \right)^2 \frac{m}{\mu} v_e \quad (3.5)$$

а плотность ионов стремится к нулю. Обе границы области неустойчивости соответствуют теперь касанию $F(\omega)$ и $F=1$ и равны (см. Дополнение (18))

$$(kv)_{1,2} = \lambda + \omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^3 / \lambda \xi} \quad (3.6)$$

Если значение kv в области неустойчивости характеризовать параметром p ($-1 \leq p \leq 1$)

$$kv = \lambda + \omega_0 + p \sqrt{\omega_0^3 / \lambda \xi} \quad (3.7)$$

х) Существенно наличие непрерывного спектра частот, т.е. случайных колебаний частоты Ω , что как раз характерно для пучка, находящегося обычно в сильно неравновесном состоянии. Напротив, пространственные к медленно меняющиеся неоднородности внешних полей приводят лишь к сдвигу частоты λ и не ограничивают ω . Исключения составляют токи Фуко в качестве внешних сил, поскольку они флуктуируют пропорционально току пучка.

то комплексно-сопряженные корни равны (17)

$$\omega \approx \omega_0 \left\{ 1 + \frac{3\rho}{2} \sqrt{\frac{\omega_0}{\lambda \xi}} \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\omega_0(1-\rho^2)}{\lambda \xi}} \right\} \quad (3.8)$$

Максимальный инкремент соответствует середине области ($\rho = 0$).

Вследствие разброса частоты $\Delta \omega_0$ значение инкремента может быть существенно меньше, так как при $\xi \rightarrow \infty$ ширина области неустойчивости стремится к нулю. Грубую оценку эффекта можно сделать, снова вводя величину $\delta = \Delta \omega_0 / \omega_0$ и усреднив инкремент по области флуктуаций $\omega_0 \delta$. При $\delta \gg 2 \sqrt{\omega_0 / \lambda \xi}$ получаем:

$$\overline{\gamma_m \omega} \approx \frac{2}{\omega_0 \delta} \int_0^1 \gamma_m \omega \cdot d\left(\rho \sqrt{\frac{\omega_0^3}{\lambda \xi}}\right) = \frac{\pi}{4\delta} \cdot \frac{\omega_0^2}{\lambda \xi} \quad (3.9)$$

В обратном предельном случае нужно пользоваться формулой (3.8).

Заметим, что во всех случаях инкременты неустойчивости возрастают с увеличением компенсации пучка α ($\Omega \sim \alpha$; $\xi \sim 1/\alpha$).

§ 4. Устойчивые случаи.

В некоторых случаях обнаруженная в § 2 "универсальная" неустойчивость все же не имеет места. Это связано с конечной длиной ($2\pi R$) пучка в кольцевом ускорителе и, следовательно, дискретным спектром возмущений: $k_l = l R^{-1}$, где l - целое число. Отсюда возникает две возможности избежать неустойчивости: во-первых, если наименьшее значение $k = R^{-1} x$ окажется больше k_2 - правого края области неустойчивости и, во-вторых, если вся область неустойчивости окажется между возможными значениями k_l .

Для $\xi \ll 1$ существенны, вообще говоря, обе возможности. Первая приводит к требованию $\omega_H^2 > \lambda^2 + \Omega^2$; $\omega_H = v/R$. Если в качестве внешней силы рассмотреть ведущее поле ускорителя, то $\lambda = \omega_H \sqrt{n_{\text{эф}}}$, где $\sqrt{n_{\text{эф}}}$ - число бетатронных колебаний на оборот. Тогда имеем:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_H}\right)^2 < 1 - n_{\text{эф}} \quad (4.1)$$

х) Мы не рассматриваем значение $\lambda = 0$, которое всегда удовлетворяет условию устойчивости $k v < \lambda$ (§ 2).

Подчеркнем, что это выражение, как и все последующие, справедливы и для сильной фокусировки ($n_{эф} > 1$), где оно соответствует так называемому "сглаженному" приближению. Высшие гармоники, характеризующие "искажение" траектории, всегда неподвижны, не влияют на локальную частоту колебаний пучка (ω) и потому не изменяют условий устойчивости. ^{х)} Из (4.1) видно, что первая возможность стабилизации реализуется только при слабой фокусировке и приводит к следующему ограничению на ток пучка:

$$V_e < \frac{\gamma \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{a}{R}\right)^2 (1 - n_{max}) \quad (4.2)$$

где n_{max} наибольшее из чисел n ; $1 - n$, n - показатель спада магнитного поля ускорителя.

Вторая возможность стабилизации осуществляется, если $\sqrt{n_{эф} + \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} - \sqrt{n_{эф}} < 1 - \left\{ \sqrt{n_{эф}} \right\}$, где символ $\left\{ \right\}$ означает дробную часть аргумента ($\sqrt{n_{эф}} - \left\{ \sqrt{n_{эф}} \right\} = E(\sqrt{n_{эф}})$). Отличие от только что рассмотренного случая возникает, очевидно, лишь для жесткой фокусировки. Предельный ток равен:

$$V_e < \frac{\gamma \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \left(\left[1 + E(\sqrt{n_{эф}}) \right]^2 - n_{эф} \right) \quad (4.3)$$

что приблизительно в $\sqrt{n_{эф}}$ раз больше, чем для слабой фокусировки, и во столько же раз меньше, чем по оценке в /5/.

Для $\xi \gg 1$ достаточно рассмотреть лишь вторую возможность стабилизации, ввиду относительно узкой области неустойчивости. Имеем:

$$2 \sqrt{\frac{\omega_0^3}{\lambda \xi \omega_n^2}} < 1 - \left\{ \sqrt{n_{эф}} + \frac{\omega_0}{\omega_n} - \sqrt{\frac{\omega_0^3}{\xi \lambda \omega_n^2}} \right\} \quad (4.4)$$

Наивыгоднейшие условия соответствуют такому выбору рабочей точки, чтобы $\left\{ \dots \right\} = 0$, тогда предельный ток равен:

$$V_e < \frac{\gamma \beta^2}{2\alpha} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \left(\frac{n_{эф}}{16\xi}\right)^{1/3} \quad (4.5)$$

Это значение хотя и кажется меньшим, чем (4.3) ($\xi \gg 1$), на самом деле весьма велико, из-за малой величины $\alpha \ll \gamma m / \mu$.

х) Осюда следует, в частности, что первый способ стабилизации, предложенный в /5/, не проходит.

§ 5. Силы трения.

Результаты предыдущего параграфа приводят к относительно малым предельным токам закомпенсированного пучка. Поэтому желательно проанализировать другие методы стабилизации неустойчивости. В этом параграфе рассмотрим силы трения. Под силой трения будем понимать любую силу, направленную против скорости электрона. Учитывая, что $y_e \sim \exp i(kx - \omega t)$ можем написать ($\lambda_1 > 0$):

$$f_T = -\gamma m \lambda, \dot{y}_e = -i\gamma m \lambda, (kv - \omega) y_e \quad (5.1)$$

Сила трения эквивалентна мнимой добавке к внешней силе:

$$\lambda^2 \rightarrow \lambda^2 + i\lambda, (kv - \omega) \quad (5.2)$$

Предполагая, что эта добавка достаточно мала ($\lambda_1 \rightarrow 0$), можем найти поправки к частотам ($\Delta\omega$) по формуле:

$$\frac{\partial F(\omega, \lambda^2)}{\partial \lambda^2} \Delta\lambda^2 + \frac{\partial F(\omega, \lambda^2)}{\partial \omega} \Delta\omega + \frac{\partial^2 F(\omega, \lambda^2)}{\partial \omega^2} \frac{(\Delta\omega)^2}{2} = 0 \quad (5.3)$$

где $\Delta\lambda^2 = i\lambda, (kv - \omega)$, а в качестве ω подставляются значения корней дисперсионного уравнения (1.7).

В случае $\xi \ll 1$, находим для мнимой части $\Delta\omega$, используя формулы Дополнения (9,10), следующее значение:

$$\text{Im}(\Delta\omega) = - \frac{(kv)^2}{[(kv)^2 - \lambda^2]^4} \cdot \frac{\xi^6 \lambda_1}{2\xi^2} \quad (5.4)$$

где $\xi = |\text{Im}(\omega)|$ в области неустойчивости (3.2). Знак минус в (5.4) указывает на затухание ($\lambda_1 > 0$), однако декремент затухания меньше инкремента (ξ) за исключением самого левого края области неустойчивости ($kv \rightarrow \lambda$), так что стабилизации не происходит: $|\text{Im}(\Delta\omega)|/\xi \sim \lambda, \xi^5/\xi^2 \sim \lambda, \sqrt{\xi} \ll 1$.

В случае $\xi \gg 1$ аналогичным образом получаем (23):

$$\text{Im}(\Delta\omega) = - \frac{\lambda_1 (kv - \omega)}{4\lambda} \approx - \frac{\lambda_1}{4} \quad (5.5)$$

Согласно (3.8) максимальный инкремент неустойчивости равен $(\omega_0^3 / 4\lambda\zeta)^{1/2}$,
 поэтому условие стабилизации имеет вид:

$$\lambda_1^2 > \frac{4\omega_0^3}{\lambda\zeta} \quad (5.6)$$

Если в качестве силы трения взять радиационное трение, то в ультрарелятивистском случае

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \omega_H \gamma^3 \frac{\tau_0}{R} \quad (5.7)$$

где $\tau_0 = e^2 / mc^2 \approx 2.8 \cdot 10^{-13}$ см и предельный ток, соответствующий условию стабилизации, очень мал:

$$I_e < 0.12 \frac{M}{m} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \gamma^4 n_{\text{эф}}^{1/3} \zeta^{2/3} \left(\frac{\tau_0}{R}\right)^{4/3} \quad (5.8)$$

например, для $\gamma \sim 100$; $M/m \sim 10^4$; $R \sim 30$ см; $a \sim 1$ см; $n_{\text{эф}} \sim \zeta \sim 1$;
 $I_e \sim 10^{-11} \sim 2 \cdot 10^{-7}$ ампера. Следовательно, практически стабилизация радиационным трением не работает.

Этим, однако, не исчерпывается роль сил трения. При определенных условиях они не только не демпфируют колебания, но, напротив, сами вызывают неустойчивость. Рассмотрим выражение для поправки к частоте в линейном приближении (5.3):

$$\Delta\omega = -i\lambda_1 (k\nu - \omega) \frac{\partial F / \partial \lambda^2}{\partial F / \partial \omega} \quad (5.9)$$

Так как $\partial F / \partial \lambda^2 = \Omega^2 / [(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2]^2 > 0$, то знак $\text{Im}(\Delta\omega)$ определяется знаками $(k\nu - \omega)$ и $\partial F / \partial \omega$ и может быть как отрицательным (затухание), так и положительным (неустойчивость). Действительно, взглянув на рисунок, можно легко заметить, что если линия $F = I$ лежит выше минимума $F(\omega)$, т.е. $k > k_2$ (§ 2), то второй слева корень дисперсионного уравнения является неустойчивым. Если же линия $F = I$ лежит ниже максимума $F(\omega)$, т.е. $\zeta \gg 1$ и $k < k_1$ (§ 2), то неустойчивым является третий корень (слева) при дополнительном условии $\omega < k\nu$. Поскольку $\text{Im}(\Delta\omega) \sim (\partial F / \partial \omega)^{-1}$, то ясно, что наиболее сильная неустойчивость соответствует как раз максимуму и минимуму $F(\omega)$. В этом случае из (5.3) имеем:

$$\Delta\omega = \pm \sqrt{-i\lambda_1 (k\nu - \omega) \frac{\partial F / \partial \lambda^2}{\partial^2 F / \partial \omega^2}} \quad (5.10)$$

Для $\xi \ll 1$ из (25) и (5.7) находим, что этот максимальный инкремент равен:

$$|\gamma_{\text{т}} \omega| \approx \frac{\omega_H}{3} \left(\frac{v_i}{2}\right)^{1/4} \gamma^{5/4} \sqrt{\frac{r_0}{a}} \frac{\xi^{1/6}}{(1 + \lambda^2 / \Omega^2)^{1/12}} \quad (5.11)$$

Аналогичным образом для $\xi \gg 1$ получаем (26):

$$|\gamma_{\text{т}} \omega| \approx \frac{\omega_H}{2\sqrt{6}} \sqrt{\gamma^3 \frac{r_0}{a}} \left(2 \frac{m}{M} v_e\right)^{3/8} \left(\frac{R}{\xi a \sqrt{n_{\text{эф}}}}\right)^{1/4} \quad (5.12)$$

Максимальный инкремент соответствует вполне определенным значениям "к". В циклическом ускорителе, где значения "к" дискретны максимальный инкремент имеет место при вполне определенных критических значениях тока. В случае $\xi \ll 1$ имеется один критический ток J_1 . При $J < J_1$ инкремент быстро падает с уменьшением тока, а при $J > J_1$ неустойчивость переходит в слабое затухание (5.4). В случае $\xi \gg 1$ имеются два близких по величине критических тока J_1, J_2 . Затухание (5.5) имеет место в интервале $J_1 < J < J_2$, неустойчивость - вне этого интервала.

Физический смысл описанной диссипативной неустойчивости состоит в том, что скорость электронов ($\dot{y} \sim k\nu - \omega$) может быть направлена противоположно локальной скорости волны ($\partial y / \partial t \sim -\omega$). Тогда сила трения совпадает со скоростью волны и может приводить к ее росту. Механизм роста связан с рассеянием электронов в поле ионного шнура, который колеблется с некоторым сдвигом фаз по отношению к электронному шнуру. Отсюда ясно, что диссипативная неустойчивость на силах трения возможна только в присутствии ионов. Действительно, для неустойчивости необходимо, чтобы $k\nu > \omega$ или (1.7):

$$(k\nu)^2 > \frac{\xi \Omega^2 \lambda^2}{\Omega^2 + \lambda^2} \quad (5.13)$$

В отсутствии ионов ($\xi \rightarrow \infty$) неустойчивость не возникает.

Парадоксальный, на первый взгляд, факт возникновения неустойчивости под действием сил трения встречается в действительности довольно часто. В ускорителях такого рода неустойчивость была обнаружена экспериментально /8/ и рассмотрена теоретически /9-12/. Аналогичные неустойчивости наблюдаются и в плазме /13/. Разработан даже усилитель "медленной волны" дей-

ствующий по этому принципу /14/.

§ 6. Токи Фуко.

Токи Фуко в стенках камеры, окружающей пучок, могут употребляться наряду с внешним магнитным полем для стабилизации пучка. Силы, действующие на пучок в металлической камере, рассматривались в ряде работ (например, /11, 12, 15, 16/. Если камера представляет собой идеально проводящий прямолинейный цилиндр радиуса b , то для достаточно длинноволновых возмущений пучка имеем:

$$\lambda^2 = 2 \left(\frac{v}{b} \right)^2 \cdot \frac{v_e}{\gamma} \cdot \frac{\alpha \gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 1}; \quad \alpha = v_i / v_e \quad (6.1)$$

Это выражение справедливо при выполнении условий:

$$kb \ll 1; \quad \omega b / v \ll 1 \quad (6.2)$$

где k, ω - волновой вектор и частота колебаний возмущенного пучка. Неравенства (6.2) позволяют при вычислении полей рассматривать возмущенный пучок как прямолинейный и квазистационарный и получаются из условия Лоренца на потенциалы.

Скин-эффект в стенках трубы проще всего учесть с помощью граничных условий Леонтовича /17/; в прежних предположениях получаем вместо (6.1):

$$\lambda^2 = 2 \left(\frac{v}{b} \right)^2 \cdot \frac{v_e}{\gamma} \cdot \frac{\alpha \gamma^2 - 1}{\gamma^2 - 1} - 2i \left(\frac{v}{b} \right)^2 \cdot \frac{v_e}{\gamma} \cdot \frac{\mu \Delta(\omega)}{b} \quad (6.3)$$

где $\Delta(\omega)$ - толщина скин-слоя стенки, взятая для локальной частоты колебаний пучка ω . Согласно результатам § 5, наличие мнимой части y приводит к неустойчивости. В отличие от неустойчивости, связанной с силой радиационного трения (§ 5), рассматриваемая неустойчивость не исчезает и для чисто электронного пучка ($\alpha = 0$). Пренебрегая фокусирующей силой токов Фуко (6.1) по сравнению с внешним магнитным полем, получим инкремент нарастания неустойчивости в виде:

$$\gamma_{im} \omega = \frac{\omega_H}{\sqrt{n_{эф}}} \left(\frac{R}{b} \right)^2 \cdot \frac{v_e}{\gamma} \cdot \frac{\mu \Delta(\omega_H)}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{l - \sqrt{n_{эф}}}} \quad (6.4)$$

где $l = kR$ - номер гармоники возмущения. Формула (6.4) совпадает по порядку величины с выражениями, полученными в /10, 11/ для другой геометрии.

Наличие ионов в пучке может увеличить инкремент, наибольшего значения он достигает, когда $\partial F / \partial \omega = 0$ (см. § 5, (5.10)). При $\xi \ll 1$ получаем для максимального инкремента из (6.3), (5.3):

$$|\gamma_{\text{ин}} \omega| = \omega_{\text{н}} \cdot \frac{\xi^{1/6}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{R}{\beta} \cdot \left(\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \lambda^2} \right)^{1/3} \cdot \sqrt{\frac{\nu_e \cdot \mu \Delta(\omega)}{\gamma \beta}} \quad (6.5)$$

При $\xi \gg 1$ аналогичным образом находим:

$$|\gamma_{\text{ин}} \omega| = \frac{\omega_{\text{н}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\beta} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\lambda} \right)^{3/4} \cdot \xi^{-1/4} \sqrt{\frac{\nu_e \cdot \mu \Delta(\omega)}{\gamma \beta}} \quad (6.6)$$

§ 7. Затухание Ландау.

Учет теперь конечную температуру (разброс скоростей) электронов и ионов, что, как известно, приводит к затуханию колебаний /18/. Ограничимся рассмотрением упрощенного дисперсионного уравнения в духе /19/. Это уравнение может быть получено из выражения для поляризационной силы (1.2), в которую вместо y_e, y_i нужно подставить теперь усредненные по функции распределения значения смещений электронов и ионов:

$$\langle y_e \rangle = \int y_e(v) f_e(v) dv; \quad \langle y_i \rangle = \int y_i(u) f_i(u) du \quad (7.1)$$

Из этих выражений видно, что мы считаем распределения электронов и ионов независимыми, учитываем только продольную компоненту скорости и считаем плотность частиц постоянной по сечению пучка, иными словами, отличие от предыдущей модели сводится только к учету разброса продольных скоростей частиц. ^{х)} Амплитуды $y_e(v), y_i(u)$ найдем из решения уравнений движения для одной частицы:

$$\ddot{y}_e + \lambda^2 y_e = f_{\text{п}} / \gamma m; \quad \ddot{y}_i = -f_{\text{п}} / \mu \quad (7.2)$$

Для фурье - компоненты (ω, k) имеем:

$$y_e = \frac{f_{\text{п}} / \gamma m}{\lambda^2 - (\omega - kv)^2}; \quad y_i = \frac{f_{\text{п}} / \mu}{(\omega - ku)^2} \quad (7.3)$$

х) Ионы считаются немагнитными.

Параметр λ характеризует теперь только такие внешние силы, которые не зависят от других частиц (например, внешнее магнитное поле, но не токи Фуко). Подставляя (7.3) в (7.1), а затем в (1.2), получим дисперсионное уравнение в виде:

$$\xi \Omega^2 \int \frac{f_i du}{(\omega - ku)^2} + \Omega^2 \int \frac{f_e dv}{(\omega - kv)^2 - \lambda^2} = 1 \quad (7.4)$$

Точная теория [18] показывает, что интегрирование в (7.4) должно проводиться в комплексной плоскости переменных v, u с обходом нулей знаменателей (v_0, u_0) снизу. Затухание Ландау (ионное и электронное) пропорционально величинам $f_i(u_0)$ и $f_e(v_0)$, соответственно. Если ими можно пренебречь, то мы возвращаемся к дисперсионному уравнению (1.7).

Поскольку нас интересует граница устойчивости, будем считать ω в (7.4) действительным. В случае $\xi \ll 1$ ω в области неустойчивости мало (см. § 3), поэтому величиной $f_e(v_0) = f_e\left(\frac{\omega \pm \lambda}{k}\right)$ можно пренебречь; x существенно только ионная температура. Для того, чтобы ω было действительным, выберем его так, чтобы мнимая часть интеграла $\left(\frac{i\pi}{k^2} \cdot \frac{\partial f_i(\omega/k)}{\partial u}\right)$ обратилась в нуль. Будем считать, что максимум $f_i(u)$ соответствует $u=0$, следовательно, $\omega=0$. Действительную часть интеграла удобно выразить через функцию распределения $\varphi(x)$ от безразмерной скорости $x = u/\Delta u$, где Δu характеризует разброс:

$$\int \frac{f_i du}{(\omega - ku)^2} = \frac{1}{(k\Delta u)^2} \int \frac{\varphi'(x) dx}{x} = -\frac{I_i}{(k\Delta u)^2}; \quad I_i > 0 \quad (\sim 1) \quad (7.5)$$

Подставляя это выражение в (7.4), находим границу устойчивости в виде:

$$\frac{I_i \xi \Omega^2}{(k\Delta u)^2} = \frac{\Omega^2 + \lambda^2 - (k\sigma)^2}{(k\sigma)^2 - \lambda^2} \quad (7.6)$$

Это выражение имеет смысл лишь в зоне неустойчивости (3.1). В устойчивой области k невозможно удовлетворить уравнение (7.4) действительным ω , что как раз означает наличие затухания Ландау, декремент которого в области, близкой к (3.1), равен приблизительно $(k\Delta u)/\sqrt{I_i}$; (см. (7.6) и (3.2)). Из соотношения (7.6) видно, что область неустойчивых значений $(k\sigma)$ несколько сокращается:

x) Предполагается, что $k\sigma \neq \lambda$.

$$\lambda^2 + \frac{\Omega^2}{1 + \frac{\xi \Omega^2 I_i}{(k\Delta u)^2}} < (k\nu)^2 < \lambda^2 + \Omega^2 \quad (7.7)$$

но не исчезает. Сокращение области существенно при малом значении величин:

$$\frac{\xi \Omega^2 I_i}{(k\Delta u)^2} = \left(\frac{\Omega}{k\nu}\right)^2 \cdot \frac{I_i}{\alpha} \cdot \frac{\gamma_m \nu^2}{\mu(\Delta u)^2} \quad (7.8)$$

Поскольку устойчивый случай соответствует $\Omega \sim k\nu$ (см. § 4), то из (7.8) следует, что сужение области незначительно.

В случае $\xi \gg 1$ $\omega \approx k\nu - \lambda \approx \omega_0$ велико, так что можно пренебречь величиной $f_i(u_0) = f_i(\nu - \frac{\lambda}{k})$. Дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\frac{\xi \Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2/2\lambda}{\omega - k\nu - \lambda} + \frac{\Omega^2}{\lambda} \int \frac{f_e d\nu}{\omega - k\nu + \lambda} = 1 \quad (7.9)$$

В отличие от предыдущего случая мнимая часть интеграла не обращается в нуль ни при каком ω :

$$\text{Im} \frac{\Omega^2}{2\lambda} \int \frac{f_e d\nu}{\omega - k\nu + \lambda} = - \frac{\pi \Omega^2}{2\lambda k} f_e \left(\frac{\omega - \lambda}{k} \right) \quad (7.10)$$

Это значит, что границы устойчивой области вообще не существует, т.е. разброс электронных скоростей приводит к увеличению инкремента. Действительно, поправку к частоте можем определить по формуле (5.3), подставив в нее вместо первого слагаемого величину (7.10), умноженную на i . В центре области неустойчивости производная $\partial F / \partial \omega$ равна (см. Дополнение):

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} \approx - \frac{2(1+2i)}{\omega_0} \quad (7.11)$$

откуда для дополнительного инкремента, связанного с затуханием Ландау, получаем:

$$\text{Im} (\Delta \omega) = \frac{\pi}{20} \cdot \frac{\omega_0^3}{\xi k \lambda} f_e \left(\frac{\omega - \lambda}{k} \right) > 0 \quad (7.12)$$

Этот дополнительный инкремент может достигать по величине основного (3.8). Так как величина (7.10) всегда отрицательна, то затухание Ландау приводит к неустойчивости для $\partial F / \partial \omega < 0$ (5.3). Практически, однако, эта неустойчивость существенна лишь при $\omega \approx kv \pm \lambda$, так как обычно распределение электронов по скоростям является достаточно узким. Физический смысл неустойчивости такой же, как и в § 5, так как затухание Ландау связано в конечном счете со столкновениями частиц, т.е. является своеобразным трением. Важность столкновений следует из предположения /18/ о неизменности функции распределения. Роль столкновений ясно продемонстрирована в /20, 21/. Неустойчивость на затухании Ландау, по-видимому, близка по своему механизму к так называемой "универсальной" неустойчивости в плазме /22/. Сравнивая действие затухания Ландау и "обычного" трения (5.9), приходим к выводу, что они компенсируют друг друга при $\omega > kv$ и действуют в одну сторону при $\omega < kv$.

Стабилизация диссипативной неустойчивости на токах Фуко с помощью затухания Ландау подробно рассмотрена в /II/.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность Г.И.Будкеру, В.М.Галицкому, В.И.Карпману, Р.З.Сагдееву, В.В.Соколову, А.М.Стефановскому и И.Б.Хрипловичу за полезные обсуждения.

ДОПОЛНЕНИЕ.

При $\xi \rightarrow 0$ минимум $F'(\omega)$ будет соответствовать некоторой $\omega_2 \ll 1$. Поэтому в выражении для $F'(\omega)$:

$$F'(\omega) = \left\{ \frac{\xi}{\omega^3} + \frac{\omega - kv}{[(\omega - kv)^2 - \lambda^2]^2} \right\} (-2\Omega^2) \quad (1)$$

можем пренебречь ω во втором слагаемом, в результате получаем:

$$\omega_2 \approx \left(\frac{\xi}{kv} \right)^{1/3} [(kv)^2 - \lambda^2]^{2/3} \quad (2)$$

Это выражение справедливо лишь при условии $\omega_2 \ll kv - \lambda$ или

$$kv - \lambda \gg \frac{(kv + \lambda)^2}{kv} \xi \approx 4\xi \quad (3)$$

т.е. не годится вблизи левого края зоны неустойчивости $kv \rightarrow \lambda$.

При вычислении значения минимума $F(\omega_2)$ необходимо учесть ω_2 в виде малой поправки также и во втором слагаемом $F(\omega)$ (1.7), в результате получаем:

$$F(\omega_2) \approx \frac{\xi \Omega^2}{\omega_2^2} + \frac{1 + \frac{2kv\omega_2}{(kv)^2 - \lambda^2}}{(kv)^2 - \lambda^2} \Omega^2 = 1 \quad (4)$$

Откуда

$$(kv)^2 = \lambda^2 + \Omega^2 \left[1 + 3\xi^{1/3} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \right)^{1/3} \right] \quad (5)$$

Максимум $F(\omega)$ соответствует, приблизительно, $\omega_1 \approx kv$ и равен:

$$F(\omega_1) \approx -\frac{\Omega^2}{\lambda^2} + \frac{\xi}{(kv)^2} < 0 \quad (6)$$

т.е. не играет роли в задаче (при $\xi \ll 1$).

Для нахождения комплексных корней в неустойчивой зоне, заметим, что непосредственно из вида $F(\omega)$ следует, что $|\omega| \sim \sqrt{\xi} \ll 1$. Положим $\omega \rightarrow \omega + i\zeta$ и $\lambda^2 \rightarrow \lambda^2 + i\lambda_1^2$, т.е. учтем возможное затухание. Как будет видно из дальнейшего $\omega \ll \zeta (\ll 1)$. Поэтому:

$$F(\omega) \approx -\frac{\xi \Omega^2}{\xi^2} + \frac{\Omega^2}{(k\nu)^2 - \lambda^2} + \frac{2k\nu\omega\Omega^2}{[(k\nu)^2 - \lambda^2]^2} - \frac{2i\omega\xi\Omega^2}{\xi^3} + \frac{2i(k\nu\xi + \lambda^2/2)\Omega^2}{[(k\nu)^2 - \lambda^2]^2} = 1 \quad (7)$$

В первом приближении пренебрегаем малым третьим слагаемым в левой части и получаем:

$$\xi = \pm \sqrt{\xi \Omega^2 \frac{(k\nu)^2 - \lambda^2}{\Omega^2 + \lambda^2 - (k\nu)^2}} \ll 1 \quad (8)$$

из действительной части $F(\omega)$ и

$$\omega = \frac{\xi^3}{3} \cdot \frac{k\nu\xi + \lambda^2/2}{[(k\nu)^2 - \lambda^2]^2} \quad (9)$$

Наконец, третье слагаемое в (7) дает поправку к ξ , зависящую, в частности, от λ , (затухания):

$$\Delta\xi = -\frac{k\nu\xi^3\omega}{3[(k\nu)^2 - \lambda^2]^2} \quad (10)$$

При $(k\nu)^2 \rightarrow \Omega^2 + \lambda^2$ приближение $\omega \ll \xi$ становится несправедливым. Вместо этого полагаем $(k\nu)^2 = \Omega^2 + \lambda^2$ и $\lambda_1 = 0$ и находим ω, ξ из уравнений

$$\operatorname{Re} \frac{F-1}{\Omega^2} = \xi \left[\frac{\omega^2 - \xi^2}{(\omega^2 + \xi^2)^2} + \frac{2k\nu\omega}{\Omega^4} \right] = 0$$

$$\operatorname{Im} \frac{F}{\Omega^2} = \frac{2\xi k\nu}{\Omega^4} - \frac{2\xi\omega\xi}{(\omega^2 + \xi^2)^2} = 0 \quad (11)$$

Из первого уравнения видим, что $|\omega - \xi| \sim \omega^4 / \xi \ll \omega$. Имеем:

$$\omega \approx \xi \approx \left(\frac{\xi \Omega^4}{4\sqrt{\Omega^2 + \lambda^2}} \right)^{1/3} \quad (12)$$

Из второго уравнения (11) видно, что $\omega > 0$, ξ же может иметь оба знака.

При $\xi \rightarrow \infty$ вводим $\eta = \xi^{-1}$; в дисперсионном соотношении

$$\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\eta}{(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (13)$$

главную роль играет первое слагаемое, а второе существенно лишь вблизи особенностей $\omega = \kappa v \pm \lambda$. Поэтому ищем решение в виде:

$$\omega = \kappa v - \lambda + \varepsilon; \quad |\varepsilon| \ll |\kappa v - \lambda| \quad (14)$$

Подставляя в (13), находим с точностью $\sim \sqrt{\eta}$ (см. ниже):

$$\frac{1}{(\kappa v - \lambda)^2} - \frac{2\varepsilon}{(\kappa v - \lambda)^3} - \frac{\eta}{2\varepsilon\lambda} \approx \frac{1}{\omega_0^2} \quad (15)$$

В первом приближении $\kappa v - \lambda = \omega_0$; подставляя это значение в малое второе слагаемое и обозначая $1/(\kappa v - \lambda)^2 - 1/\omega_0^2 = \alpha(\kappa)$, получаем квадратное уравнение для ε :

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \frac{\alpha \omega_0^3}{2} + \frac{\eta \omega_0^3}{4\lambda} = 0 \quad (16)$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\alpha \omega_0^3}{4} \pm i \sqrt{\frac{\eta \omega_0^3}{4\lambda} - \frac{\alpha^2 \omega_0^6}{16}} \quad (17)$$

Границы области неустойчивости соответствуют $\eta \bar{\omega} \varepsilon = 0$; $\alpha = \pm 2 \sqrt{\eta/\lambda \omega_0^3}$

$$(\kappa v)_{1,2} = \lambda + \omega_0 \pm \sqrt{\frac{\eta \omega_0^3}{\lambda}} \quad (18)$$

Максимальный инкремент соответствует центру области ($\alpha = 0$; $\kappa v = \lambda + \omega_0$):

$$\omega = \omega_0 \pm i \sqrt{\frac{\eta \omega_0^3}{4\lambda}} \quad (19)$$

Модуль

$$|\varepsilon| = \frac{\eta \omega_0^3}{4\lambda} \ll \omega_0 \quad (20)$$

так что условие (14) всегда выполняется.

Если λ имеет мнимую часть ($\lambda^2 \rightarrow \lambda^2 + i\lambda_1^2$, затухание), то подстановка в (13) приводит к замене

$$\eta \rightarrow \eta \left(1 + \frac{i\lambda_1^2}{(\kappa v - \omega)^2 - \lambda^2} \right) \approx \eta \left(1 - \frac{i\lambda_1^2}{2\varepsilon\lambda} \right) \quad (21)$$

При подстановке этого выражения в (17) нас интересует лишь действительная часть η :

$$\operatorname{Re} \eta = |\eta| \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{2\lambda |\varepsilon|^2} \right) \quad (22)$$

Подставляя в (17), найдем:

$$\varepsilon = \frac{\alpha \omega_0^3}{4} \pm i \sqrt{\frac{\gamma \omega_0^3}{4\lambda} - \frac{\alpha^2 \omega_0^6}{16}} - i \frac{\lambda_1^2}{4\lambda} \quad (23)$$

Вычислим еще $F''(\omega)$ в точках экстремума. Имеем:

$$F''(\omega) = \frac{6\Omega^2 \xi}{\omega^4} - \frac{2\Omega^2}{[(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2]^2} + \frac{8\Omega^2 (k\nu - \omega)^2}{[(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2]^3} \quad (24)$$

При $\xi \ll 1$ совпадающие корни соответствуют правому краю области неустойчивости, где $(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2 \approx \Omega^2$; $\omega \approx (\xi \Omega^4 / 4 \sqrt{\Omega^2 + \lambda^2})^{1/3}$

В выражении для F'' существенен только первый член; получаем:

$$F'' \approx \frac{6}{\Omega^2 \xi^{1/3}} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\Omega^2} \right)^{2/3} \quad (25)$$

При $\xi \gg 1$ $(k\nu - \omega)^2 - \lambda^2 \approx -2\varepsilon\lambda \sim \xi^{-1/2}$, так что существенен только последний член в (24). Для F'' находим:

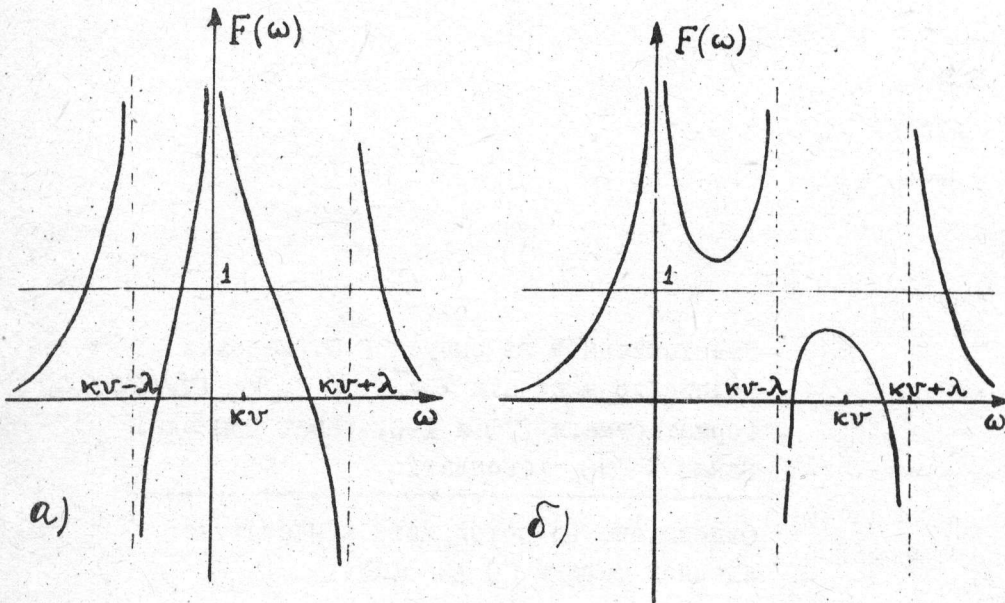
$$F'' \approx \pm \frac{8}{\lambda^2} \sqrt{\xi} \left(\frac{\lambda}{\omega_0} \right)^{5/2} \quad (26)$$

Знаки относятся к минимуму и максимуму, соответственно,

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959)
2. В.К.Мельников. ДАН, 148, 1259 (1963).
3. Г.И.Будкер. Атомная энергия, 1956, № 5, 9.
4. D.Finkelstein, P.A.Sturrock, Plasma Physics by J.E.Drummond, 1961.
5. D.Finkelstein, Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators and Instruments, Geneva, 1959, 312.
(Перевод в сб. "Накопление релятивистских частиц", Атомиздат, 1963, 171).
6. J.C.Linhart, A.Schoch, Nuclear Instruments and Methods, 4, 332, 1959.
(Перевод в сб. "Физика плазмы и магнитная гидродинамика", ИИЛ, 1961, 215).
7. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. УФН, LXXIII, в.4, 701, 1961.
8. F.E.Mills et al, . Труды международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963, 620.
9. А.А.Коломенский. Атомная энергия, 1964, № 7.
10. К.Саймон. Частное сообщение.
11. L.J.Laslett, V.K.Neil, A.W.Sessler, Transverse resistive instabilities of intense coasting beam in particle accelerators, UCRL-11090, 1963.
12. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. Атомная энергия, в печати.
13. А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. Теория устойчивости неоднородной плазмы. Атомная энергия, 15, 451 (1961).
14. J.R.Pierce, Bell System Technical Journal, 30, 626, 1951.
15. L.J.Laslett, On intensity limitations imposed by transverse space - charge effects in circular particle accelerators, Proceedings of the Brookhaven Super-High Energy Summer Study, 1963.

16. М.А.Леонтович. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т.1, ИО, 1958.
17. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
18. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 16, 574 (1946).
19. J.E.Drummond, Plasma Physics by J.E.Drummond, 1961.
20. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Nuclear Fusion, 1, 82, 1961.
21. В.Е.Захаров, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 43, 490 (1962).
22. А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ, 44, 903 (1963).



- а) $kv < \lambda$ (устойчивость)
- б) $kv > \lambda$ (неустойчивость)

Ответственный за выпуск Г.Б.Глаголев
Подписано к печати 25/Ⅷ-64, МН00610
Формат бумаги 270 x 190, тираж 250 экз.
Заказ № 040 бесплатно.

Отпечатано на ротопринтере в Институте
ядерной физики СО АН СССР.