ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЛАЗМЕ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ

г.Новосибирск
1965

L.M.Altshul, V.I.Karpman.

Nonlinear Oscillations in a Collisionless Plasma.

Abstract

General theory of perturbations for nonlinear oscillations in collisionless plasma is derived, without using "random phase approximation".

The summing of secular terms of the perturbation theory gives the equations for the slow processes. In a case of rather broad wave packets these equations are converted into the well-known equations of the quasi-linear theory for weakly turbulent plasma.

The opposite limit case - evolution of a single periodic wave in the quasi-linear approximation - is investigated in detail.

А Н Н О Т А Ц И Я.

Развита общая теория возмущений для нелинейных колебаний в плазме без столкновений, не ограниченная какими-либо предположениями о хаотичности фаз. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для "медленных" процессов. В случае достаточно широких волновых пакетов эти уравнения переходят в известные уравнения квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы. Подробно исследован противоположный предельный случай - эволюция периодической волны в квазилинейном приближении.

I. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные колебания в плазме без столкновений, описываемые уравнениями [I)]

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \bar{v}\frac{\partial F_j}{\partial \bar{z}} - \frac{e_j}{m_j}\nabla\varphi\frac{\partial F_j}{\partial \bar{v}} = 0 \qquad (I.I)$$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\sum_j e_j N_j \int F_j\, dv \qquad (I.2)$$

(j - индекс, указывающий сорт частиц) рассматривались в ряде работ (см.обзоры /I,2 /, где приведена подробная библиография, а также более поздние работы /3-I0/). Характерной особенностью методов, развиваемых в этих работах, является использование в той или иной форме,так называемого приближения хаотических фаз, так что их результаты применимы лишь к турбулентной плазме, где ширина пакета волн достаточно велика. Между тем, в ряде случаев (например, в ограниченной плазме) возникает задача исследования динамики нелинейных периодических волн, характеризующихся дискретным набором волновых чисел K; естественно,что в этом случае приближение хаотических фаз уже неприменимо.

В настоящей работе развивается общая теория возмущений для плазменных колебаний,не ограниченная какими-либо предположениями о хаотичности фаз. Формальное разложение проводится по степеням поля колебаний; затем в общих рядах теории возмущений выделяются и суммируются последовательности секулярных членов, аналогично тому, как это делается в работах Ван Хова / II /, Пригожина / I2 /, Балеску / I3 / при получении кинетического уравнения для слабо-неидеальных систем. Суммирование "главных" последовательностей секулярных членов приводит к квазилинейным уравнениям, описывающим обратное влияние колебаний на функцию распределения частиц плазмы. Применимость этих уравнений,однако, не ограничена какими-либо условиями относительно ширины волнового пакета. Если эта ширина достаточно велика,то упомянутые уравнения переходят в известные уравнения квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы,полученные в работах / I4,I5 /. В противоположном предельном случае получают-

---

I)Для простоты,мы будем рассматривать потенциальные колебания без магнитного поля, хотя все результаты без принципиальных трудностей распространяются на общий случай.

ся квазилинейные уравнения для периодической волны. Решение этих уравнений, найденное в настоящей работе, описывает эволюцию функции распределения плазмы и поля периодической волны в квазилинейном приближении.

Развитая в настоящей работе теория возмущений позволяет также получить уравнения, описывающие взаимодействие волн с учётом обратного влияния колебаний на функцию распределения частиц в любом приближении. Мы, однако, не останавливаемся на этом, так как соответствующие уравнения оказываются очень громоздкими и не приводят к каким-либо существенно новым результатам по сравнению с полученными в работах / I-9 /.

2. Общие выражения для членов ряда теории возмущений.

Будем искать решение уравнений (I.I), (I.2) при начальном условии[2)]

$$F_j(0,\vec{r},\vec{v}) = f_j(\vec{v}) + \sum_{k\neq 0} g_{jk}(\vec{v}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad (2.I)$$

Для получения хорошо обозримых выражений теории возмущений запишем, следуя / 7 /, уравнение (I.I) с помощью скобок Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial t} + [\mathcal{H}^{\circ}, F] = -[\mathcal{H}^{int}, F] \qquad (2.2)$$

где $F(t,\vec{r},\vec{v})$ -функция распределения, $\mathcal{H}^{\circ}$ - гамильтониан свободной частицы, $\mathcal{H}^{int}$ - часть гамильтониана, описывающая взаимодействие частицы с полем колебаний.

$$\mathcal{H}^{\circ} = \frac{p^2}{2m}, \qquad \mathcal{H}^{int}(t) = \int \rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t)\,d\vec{r},$$

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta(\vec{r} - r(t)) \qquad (2.3)$$

$\rho(\vec{r},t)$ -микроплотность заряда, а $\vec{r}(t)$ -радиус-вектор частицы; здесь и всюду в дальнейшем мы для упрощения записи формул будем опус-

---

2) Нормировочный объем всюду принят равным единице.

кать индекс, указывающий сорт частиц и суммирование по этому индексу. Заметим тут же, для обобщения полученных ниже общих выражений теории возмущений на случай потенциальных колебаний в стационарном магнитном поле, нужно заменить $\mathcal{H}^0$ в (2.3) на $(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}_0)^2/2m$, где $\vec{A}_0$ -векторный потенциал этого поля. При этом все выражения, записанные в терминах скобок Пуассона, остаются в силе (ср. с работой / 7 /).

В скобках Пуассона (2.2) дифференцирование производится по координатам и импульсам частицы $\vec{r}, \vec{p}$, от которых зависит гамильтониан и функция распределения. Перейдем теперь к лагранжевым переменным $\vec{r}_0, \vec{p}_0$, отвечающим движению частиц при отсутствии поля колебаний, т.е. к переменным, определяемым соотношениями:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}}{m}t \quad , \qquad \vec{p} = \vec{p}_0$$

Тогда $F(t, \vec{r}_0, \vec{p}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,\vec{r}_0,\vec{p}_0)}{\partial t} = -\left[\mathcal{H}^{int}(t,\vec{r}_0,\vec{p}_0), F(t,\vec{r}_0,\vec{p}_0)\right] \qquad (2.4)$$

где скобки Пуассона теперь (и всюду в дальнейшем) берутся по отношению к лагранжевым переменным

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_0}\frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}_0} - \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}_0} \qquad (2.4а)$$

Разлагая $\varphi(\vec{r},t)$ в ряд Фурье

$$\varphi(\vec{r},t) = \sum_k \varphi_k(t)\, e^{i\vec{k}\vec{r}} \qquad (2.5)$$

и применяя преобразование Лапласа к величинам, зависящим от времени

$$F(\omega,\vec{r}_0,\vec{v}) = \int_0^\infty F(t,\vec{r}_0,\vec{v})\, e^{i\omega t}\, dt$$
$$\varphi_k(\omega) = \int_0^\infty \varphi_k(t)\, e^{i\omega t}\, dt \quad , \quad \mathrm{Im}\,\omega > 0 \qquad (2.6)$$

легко получить для функции распределения $F(\omega,\vec{r}_0,\vec{v})$ следующее формальное разложение в виде ряда по степеням начального возмущения:

$$F(\omega,\vec{r}_o,\vec{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\omega,\vec{r}_o,\vec{v}) \qquad (2.7)$$

$$F^{(n)}(\omega,\vec{r}_o,\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\sum_{\kappa}\frac{1}{\omega}\int d\omega_1 d\omega_1' \, [\rho_{-\kappa}(\omega_1'), F^{(n-1)}(\omega-\omega_1'-\omega_1,\vec{r}_o,\vec{v})]\varphi_\kappa(\omega_1)$$

$$n = 2,3,\ldots$$

$$(2.8)$$

$$F^{\circ}(\omega) = \frac{i f(\vec{v})}{\omega}, \quad F^{(1)}(\omega) = \sum_{\kappa}\left\{\frac{i g_\kappa(\vec{v})}{\omega} e^{i\vec{\kappa}\vec{r}_o} + \frac{1}{(2\pi)^2\omega}\int\frac{[\rho_{-\kappa}(\omega_1'), f(\vec{v})]}{\omega-\omega_1-\omega_1'}\varphi_\kappa(\omega_1)d\omega_1 d\omega_1'\right.$$

$$F^{(n)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{2n} i^{n-1}}\sum_{\kappa_1,\ldots,\kappa_n}\left\{\frac{1}{\omega}\int\frac{[\rho_{-\kappa_1}(\omega_1')[\ldots[\rho_{-\kappa_n}(\omega_n'), f(\vec{v})]\ldots]]}{(\omega-\omega_1-\omega_1')\ldots(\omega-\sum\limits_{s=1}^{n}\omega_s-\sum\limits_{s=1}^{n}\omega_s')}\varphi_{\kappa_1}(\omega_1)\ldots\varphi_{\kappa_n}(\omega_n)d\omega_1 d\omega_1'\ldots d\omega_n d\omega_n' + \right.$$

$$(2.9)$$

$$\left. + (2\pi)^2 i\,\frac{1}{\omega}\int\frac{[\rho_{-\kappa_1}(\omega_1')[\ldots[\rho_{-\kappa_{n-1}}(\omega_{n-1}'), g_{\kappa_n}(\vec{v})e^{i\vec{\kappa}_n\vec{r}_o}]\ldots]}{(\omega-\omega_1-\omega_1')\ldots(\omega-\sum\limits_{s=1}^{n-1}\omega_s-\sum\limits_{s=1}^{n-1}\omega_s')}\varphi_{\kappa_1}(\omega_1)\ldots\varphi_{\kappa_{n-1}}(\omega_{n-1})d\omega_1 d\omega_1'\ldots d\omega_{n-1}d\omega_{n-1}'\right\}$$

где $\rho_\kappa(\omega)$ – лапласовское отображение $\vec{\kappa}$ – компоненты Фурье микроплотности заряда (2.3):[3)]

---

3) В (2.7)- (2.9) и всюду в дальнейшем интегрирование по ω_i, ω_i' проводится по производным прямым, параллельным вещественной оси и лежащим в верхней полуплоскости, но ниже точки ω. $Jm\omega > Jm\omega_i + Jm\omega_i'$ Соответствующие обозначения линий интегрирования в дальнейшем будут опускаться.

Для дальнейшего также полезно иметь в виду соотношение свертки

$$\int_0^\infty \{F_1(t)\cdot F_2(t)\}\, e^{i\omega t}dt = \frac{1}{(2\pi)}\int d\omega' \, F_1(\omega')F_2(\omega-\omega') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2 i}\int\frac{d\omega' d\omega''}{\omega'+\omega''-\omega}F_1(\omega')F_2(\omega'')$$

$$Jm\omega > Jm\omega' + Jm\omega''$$

$$\rho_k(\omega) = ie\frac{\exp(-i\vec{k}\vec{r}_0)}{\omega - \vec{k}\vec{v}} \qquad (2.10)$$

Далее из уравнения Пуассона (I.2) нетрудно получить следующее нелинейное уравнение для $\varphi_k(\omega)$:

$$k^2\varphi_k(\omega) = 4\pi eN\sum_{n=1}^{\infty}\int d\vec{v}d\vec{r}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}_0} F^{(n)}(\omega-\vec{k}\vec{v},\vec{r}_0,\vec{v}) \qquad (2.11)$$

где N – плотность частиц, $F^{(n)}(\omega-\vec{k}\vec{v},\vec{r}_0,\vec{v})$ определяется формулами (2.8) – (2.10). В линейном приближении после подстановки $F^{(1)}$ из (2.8) в (2.11) и несложных вычислений, получается известное выражение Л.Д. Ландау / I6 /

$$\varepsilon_k(\omega)\varphi_k(\omega) = \tau_k(\omega) \equiv \frac{4\pi eN}{k^2}\int\frac{g_k(\vec{v})}{\omega-\vec{k}\vec{v}}d\vec{v} \qquad (2.12)$$

$$\varepsilon_k(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{k^2}\int\frac{d\vec{v}}{\omega-\vec{k}\vec{v}}\vec{k}\frac{df}{d\vec{v}} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e^2N}{m} \qquad (2.13)$$

Из которого следует,что

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\tau_k(\omega)}{\varepsilon_k(\omega)}e^{-i\omega t}d\omega \simeq \varphi_k^0 e^{-i\omega_k t} \qquad (2.14)$$

$$\varphi_k^0 = \left[\frac{\tau_k(\omega)}{d\varepsilon_k/d\omega}\right]_{\omega=\omega_k} \qquad (2.15)$$

где ω_k – корень линейного дисперсионного уравнения с наибольшей мнимой частью:

$$\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k \qquad (2.16)$$

Всюду в дальнейшем предполагается,что

$$\frac{\gamma_k}{\omega_k} \ll 1 \qquad (2.17)$$

Без этого условия излагаемые ниже результаты несправедливы.

В формальных разложениях (2.9), (2.11) не все члены являются действительно малыми (в том смысле,что после перехода к t - представлению они могут стать большими при достаточно больших t). Для получения правильной асимптотики при больших t такие члены должны быть выделены и просуммированы.

Для выявления "больших" членов подставим,сначала, в (2.9) вместо $\varphi_{k_i}(\omega_i)$ их значения из линейного приближения (2.14), причем пренебрежем мнимыми частями частот γ_{k_i} и учтем только главный полюс $\varphi_k(\omega)$:

$$\varphi_k(\omega) = \frac{i\varphi_k}{\omega - \omega_k^o} \qquad (2.18)$$

Тогда в (2.9) можно провести интегрирование по всем ω_i , что приведет к замене в знаменателях, стоящих под интегралом в (2.9) всех ω_i на $\omega_{k_i}^o$. Далее заметим, что поскольку $\rho_{-k}(\omega)$ имеет полюс при $\omega = -\vec{k}\vec{v}$ (см. (2.10)), то интегрирование по ω_i' приведет к замене ω_i' на $\vec{k}_i\vec{v}$. После выполнения этих операций нетрудно убедиться, что некоторые из членов, входящих в общее выражение (2.9), будут иметь кратные полюса по отношению к переменной ω . В t - представлении эти члены окажутся секулярными,т.е. будут пропорциональны t^s , где $s+1$ - кратность полюса в лапласовском представлении. Рассмотрим,например, те члены в (2.9) где $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$ и $\omega_{k_1} = -\omega_{k_2}$. После интегрирования по ω_1', ω_2', ω_1, ω_2 вторая скобка в знаменателе станет равной ω, так что эти члены будут иметь более высокий порядок полюса при $\omega = 0$, чем те, где $\vec{k}_1 \neq -\vec{k}_2$. Если от секулярного члена перейти к следующему приближению по формуле (2.7), то степень секулярности не уменьшится. Поэтому секулярными будут также члены, которые содержат сопряженные пары φ_{k_i} , $\varphi_{k_{i+1}}$ при $i > 1$. (Важно только,чтобы сопряженными были рядом стоящие φ_{k_i} и, соответственно, ρ_{k_i}).

Выше предполагалось,что вместо $\varphi_k(\omega)$ подставляются выражения (2.18). Если подставить точные $\varphi_k(\omega)$ или (2.18),но с комплексной частотой $\omega_k = \omega_k^o + i\gamma_k$, то после перехода к t - представлению секулярные множители не будут появляться,но если $|\varphi_k(t)|$ медленно зависит от времени, то члены, содержащие сопряжение пары рядом стоящих $\rho_{-k}\varphi_k$, будут,хотя и не секулярными,но большими при достаточно больших t , так что их нельзя рассматривать по теории возмущений[4].

Можно дать простое наглядное представление структуры членов (2.9),если изображать их с помощью диаграмм (рис.I-3). Вертикальные линии изображают $\prod_i \rho_{-k_i}(\omega_i')\varphi_{k_i}(\omega_i)$. Горизонтальным линиям отвечают величины $(\omega-\sum_{s=1}^{i}\omega_s'-\sum_{s=1}\omega_s)^{-1}$. Функция $f(\vec{v})$ изображается кружком в правом конце диаграммы. Функция $g_k(v)\exp(i\vec{k}\vec{z}_0)$ изображается вертикальной пунктирной линией. Линии, отвечающие рядом стоящим сопряженным $\rho_{-k_i}(\omega_i')\varphi_{k_i}(\omega_i)$, замыкаются (спариваются),как это показано на рис.I.

Нетрудно убедиться,что величина,изображаемая диаграммой с S вертикальными линиями, отвечающими волновым вектором $\vec{k}_{i_1},\dots,\vec{k}_{i_s}$ пропорциональна множителю $\exp i(\vec{k}_{i_1}+\dots+\vec{k}_{i_s})\vec{z}$. При заданном порядке члена n показатель "секулярности" (т.е. степень t , содержащаяся в этом члене в t-представлении, если в него вместо $\varphi_k(\omega)$ подставить выражение (2.I8) будет тем больше, чем больше число спаренных линий. Диаграммы,содержащие максимальное число спаренных линий при заданном порядке n , будем называть главными. Этим диаграммам отвечают самые "большие" члены данного порядка Диаграммы, у которых нет вертикальных линий слева, а также между спаренными линиями, будем называть неприводимыми. Примеры неприводимых диаграмм изображены на рис.2а. Исследование простейших последовательностей неприводимых диаграмм производится в разделе 3.

3. Квазилинейное уравнение.

Простейшими неприводимыми диаграммами являются диаграммы без вертикальных линий (Рис.2а). Этим диаграммам соответствуют выражения

$$\varphi_0=\frac{if(\vec{v})}{\omega},\quad \varphi_2=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\sum_q\frac{1}{\omega}\int\frac{[\rho_q(\omega_1')[\rho_{-q}(\omega_2'),f(\vec{v})]]}{(\omega-\omega_1-\omega_1')(\omega-\omega_1-\omega_1'-\omega_2-\omega_2')}\varphi_{-q}(\omega_1)\varphi_q(\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_1' d\omega_2 d\omega_2'$$

$$\varphi_{2n}=\frac{1}{(2\pi)^4 i^2}\sum_q\frac{1}{\omega}\int\frac{[\rho_q(\omega_1')[\rho_{-q}(\omega_2'),\varphi_{2n-2}(\omega-\omega_1'-\omega_1-\omega_2'-\omega_2)]]}{\omega-\omega_1-\omega_1'}\varphi_{-q}(\omega_1)\varphi_q(\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_1' d\omega_2 d\omega_2' \qquad (3.I)$$

---

4) Если вместо $\varphi_k(\omega)$ подставлять (2.I8) с комплексным ω_k ,то,как нетрудно убедиться,вместо секулярного множителя будет стоять $\omega_k^0/\gamma_k \gg 1$, так,что соответствующие члены попрежнему следует считать большими при достаточно малых γ_k . Основное отличие результатов настоящей работы от результатов работы / I7 / связано с тем, что в теории возмущений,развиваемой в /I7/,указанные большие члены не суммируются.

Эти члены, очевидно, не зависят от $\vec{z}_0$. Нетрудно убедидиться, что их сумма

$$\Phi(\omega,\vec{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}(\omega,\vec{v}) \qquad (3.1а)$$

удовлетворяет уравнению

$$-i\omega\Phi(\omega,\vec{v}) = f(\vec{v}) + \frac{i}{(2\pi)^4}\sum_q \int \frac{[\rho_q(\omega_1')[\rho_{-q}(\omega_2'),\Phi(\omega-\omega_1-\omega_1'-\omega_2-\omega_2',\vec{v})]]}{\omega-\omega_1-\omega_1'} \varphi_{-q}(\omega_1)\varphi_q(\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_1' d\omega_2 d\omega_2' \qquad (3.2)$$

Подставляя в (3.2.) ρ_q из (2.10), раскрывая скобки Пуассона и учитывая, что $\partial\Phi/\partial\vec{z}_0 = 0$, получаем

$$-i\omega\Phi(\omega,\vec{v}) = f(\vec{v}) + \frac{i}{(2\pi)^4}\sum_q \vec{q}\,\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\int \frac{1}{\omega-\vec{q}\vec{v}-\omega_1}\,\vec{q}\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega_1-\omega_2,\vec{v})}{\partial\vec{v}}\,\varphi_{-q}(\omega_1)\varphi_q(\omega_2)\,d\omega_1 d\omega_2 \qquad (3.3)$$

Как будет видно из дальнейшего, уравнение (3.3) при некоторых частных предположениях переходит в известное квазилинейное уравнение для слаботурбулентной плазмы /14,15/, так что $\Phi(\omega,\vec{v})$ является квазилинейной функцией распределения в лапласовском представлении. Условия, при которых это имеет место, состоят в том, что ширина спектра колебаний плазмы должна быть достаточно большой. В другом предельном случае, когда спектр является очень узким, например, когда в плазме возбуждается "монохроматическая" (точнее- периодическая) волна, уравнение (3.3), сохраняя тот же смысл, что и для слаботурбулентной плазмы (учёт обратного влияния волны на функцию распределения) имеет совершенно другие свойства и, соответственно, решения.

Приступим теперь к исследованию уравнения (3.3). Подставим сначала в правую часть $\varphi_q(\omega)$ в виде (2.18) (это означает, что мы пренебрегаем зависимостью амплитуд поля $|\varphi_q(t)| = \varphi_q^0(t)$ от времени). Тогда, проводя интегрирование по ω_1 и ω_2, получаем

$$-i\omega\Phi(\omega,\vec{v}) = f(\vec{v}) + i\left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_q |\varphi_q|^2\,\vec{q}\,\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\,\frac{1}{\omega+\omega_q-\vec{q}\vec{v}}\,\vec{q}\,\frac{\partial\Phi(\omega,\vec{v})}{\partial\vec{v}} \qquad (3.4)$$

Область значений ω, где $\Phi(\omega,\vec{v})$ велика, связана с характерным временем τ изменения функции $\Phi(t,\vec{v})$ соотношением $|\omega| \sim \tau^{-1}$. Предположим сначала,что выполнено условие

$$\tau^{-1} \ll |\omega_q^0 - \vec{q}\vec{v}| \tag{3.5}$$

где усреднение проводится по $\vec{q}$. Тогда в знаменателе правой части (3.4) можно пренебречь ω ; однако поскольку ω лежит в верхней полуплоскости,нужно положить $\omega \longrightarrow i0$. После этого в уравнении (3.5) можно сразу перейти к t -представлению, и мы получаем квазилинейное уравнение для слаботурбулентной плазмы

$$\frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial t} = i\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d\vec{q}\, |\varphi_q|^2 \vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{1}{\omega_q^0 - \vec{q}\vec{v} + i0} \vec{q} \frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial \vec{v}} = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d\vec{q}\, |\varphi_q|^2 \vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta(\omega_q^0 - \vec{q}\vec{v}) \vec{q} \frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial \vec{v}} \tag{3.6}$$

Выясним смысл условия (3.5).Поскольку правая часть (3.5) будет минимальной,когда V лежит в резонансной области скоростей, положим $V \sim \omega_q/q$. Рассматривая для простоты случай ленгмюровских колебаний, для которых $\omega_q \sim \omega_0$, и полагая $V = \omega_0/q_0$, где q_0 - среднее волновое число, получим вместо (3.5)

$$\tau^{-1} \ll \omega_0 \frac{\Delta q}{q_0} \tag{3.7}$$

Δq - ширина волнового пакета.Величина τ здесь имеет смысл характерного времени релаксации функции распределения в резонансной области скоростей и определяется условием

$$\tau \sim \frac{D}{(\Delta V)^2}, \qquad D \sim \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{q^2 \varphi^2}{\Delta q \cdot V} \qquad \Delta V = \Delta\left(\frac{\omega_q}{q}\right) \sim \frac{\omega_0}{q^2} \Delta q \tag{3.8}$$

где D - коэффициент квазилинейной диффузии в пространстве скоростей, а φ - средний потенциал электрического поля волны $|\varphi|^2 = \int |\varphi_q|^2 dq \sim |\varphi_{q_0}|^2 \Delta q$. Подставляя (3.8) в (3.7), получаем, что условие, при котором уравнение (3.3) переходит в квазилинейное уравнение, имеет вид

$$\Delta V = \Delta\left(\frac{\omega_q}{q}\right) \gg \sqrt{\frac{e\varphi}{m}} \tag{3.9}$$

что совпадает с условием применимости квазилинейного уравнения, полученным в / 14 / из других соображений. Физический смысл (3.9) состоит в том, что ширина разброса фазовых скоростей волн должна значительно превышать скорость колебаний частиц в потенциальной яме поля волны с амплитудой φ . С другой стороны (3.9) можно рассматривать, как критерий того, что плазма является турбулентной. Уравнение (3.6) не содержит членов, описывающих "адиабатическое" изменение функции распределения в нерезонансной области. Для получения этих членов обратимся к интегралу в правой части (3.3) и учтём эффекты, связанные со слабым изменением амплитуды поля. Поскольку $\varphi_q(\omega)$ становится особенно большим при $\omega = \omega_q$, то основной вклад в интеграле в (3.3) вносят области, где $\omega_2 \sim \omega_q$, $\omega_1 \sim \omega_{-q} = -\omega_q$. Поэтому представим знаменатель подинтегрального выражения в виде ($\omega - \omega_1 - \omega_q^\circ + \omega_q^\circ - qv$) и разложим ($\omega - qv - \omega_1$)$^{-1}$ в ряд по степеням $\omega - \omega_1 - \omega_q^\circ$, ограничиваясь двумя членами разложения

$$(\omega - qv - \omega_1)^{-1} \simeq (\omega_q^\circ - qv + i0)^{-1} - \frac{\omega - \omega_1 - \omega_q^\circ}{(\omega - qv + i0)^2} \qquad (3.10)$$

Подставляя это в (3.3) и воспользовавшись соотношением свертки (см. прим. 3), получаем в t - представлении

$$\frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial t} = \pi\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d\vec{q}\, |\varphi_q(t)|^2 \vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \delta(\omega_q^\circ - \vec{q}\vec{v})\, q \frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial \vec{v}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \int d\vec{q}\, \vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left\{ (\omega_q^\circ - \vec{q}\vec{v})^{-2} \left[\frac{d|\varphi_q(t)|^2}{dt} \vec{q} \frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial \vec{v}} + 2|\varphi_q(t)|^2 \vec{q} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \frac{\partial \Phi(t,\vec{v})}{\partial t} \right] \right\} \qquad (3.11)$$

где второй интеграл берется в смысле главного значения. Членом с $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в правой части, очевидно, можно пренебречь. После этого (3.II) будет полностью совпадать с квазилинейным уравнением, учитывающим адиабатическое изменение функции распределения в нерезонансной области. Условия применимости этого уравнения по-прежнему определяются соотношением (3.9).

Применим теперь уравнение (3.3) к противоположному предельному случаю - чисто периодической волне. Сумма в (3.3) относится теперь к дискретному набору волновых чисел $q = nk$, $n = \pm1, 2, ...$, где $2\pi/k$ - длина волны, причем амплитуды кратных гармоник будут иметь более высокий порядок малости по сравнению с амплитудой первой гармоники, так что ими можно пренебречь. Пренебрегая также в уравнении (3.3) зависимостью амплитуды волны от времени[5)], мы приходим к уравнению (3.4), в котором сумма состоит из двух слагаемых с $q = \pm k$. Вводя более удобные для этого случая обозначения

$$d^2 = \sqrt{2}\, k^2 \frac{e\varphi_0}{m}\,, \quad \varphi_0 = |\varphi_k^\circ|\,; \qquad u = v - \frac{\omega_k}{k} \quad ; \qquad x = \frac{ku}{d} \qquad (3.12)$$

5) Как будет показано в разд.4 это законно при выполнении условия (4.29).

получаем основное уравнение в виде

$$\varphi(\omega,x) = \frac{i}{\omega} f(x) - \alpha^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\omega^2-\alpha^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\omega,x) \qquad (3.13)$$

Для решения этого уравнения введем функцию

$$\Psi(\omega,x) = \frac{\alpha^2}{\omega^2-\alpha^2 x^2} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(\omega,x) \qquad (3.14)$$

Дифференцируя обе части уравнения (3.13) по x и подставляя туда (3.14), получаем

$$\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(\omega,x) - (\omega^2-\alpha^2 x^2)\Psi(\omega,x) = \frac{i\alpha^2}{\omega}\frac{df}{dx} \qquad (3.15)$$

Решение уравнения (3.15) может быть представлено в виде разложения по нормированным функциям параболического цилиндра $\psi_n(x)$, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n+1-x^2)\psi_n(x) = 0 \quad , \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1 \qquad (3.16)$$

Полагая

$$\frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \psi_n(x) \quad , \qquad \beta_n = \int \psi_n(x) \frac{df}{dx}\,dx \qquad (3.17)$$

Из (3.14), (3.15) находим

$$\frac{\partial \varphi(\omega,x)}{\partial x} = i\frac{\omega^2-\alpha^2 x^2}{\omega} \sum_n \frac{\beta_n \psi_n(x)}{\omega^2-(2n+1)\alpha^2} = \qquad (3.18)$$

$$= \frac{i}{\omega}\frac{df}{dx} + \frac{i\alpha^2}{\omega} \sum \frac{\beta_n (2n+1-x^2)}{\omega^2-(2n+1)\alpha^2}\psi_n(x)$$

Переходя к t - представлению, получаем

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = \frac{df}{dx} - \sum_n \frac{2n+1-x^2}{2n+1} \beta_n \psi_n(x)\left[1-\cos \alpha t\sqrt{2n+1}\right] \qquad (3.19)$$

Для вычисления функции распределения $\Phi(t,x)$,заменим в (3.I9) $(x^2-2n-1)\psi_n(x)$ на $\frac{d^2\psi_n(x)}{dx^2}$, после чего интегрирование проводится элементарно. Возвращаясь к переменной u согласно (3.I2), получаем

$$\Phi(t,u)=f(u)+\frac{\alpha}{K}\sum_n\frac{\beta_n}{2n+1}\frac{d}{du}\psi_n\left(\frac{Ku}{\alpha}\right)\left(1-\cos\alpha t\sqrt{2n+1}\right)\quad(3.20)$$

Из (3.20) видно, что $\Phi(t,u)$ мало отличается от своего начального значения $f(u)$ при $t \ll \alpha^{-1}\sim\left(K\sqrt{\frac{e\varphi_0}{m}}\right)^{-1}$,где φ_0 – амплитуда волны. При $t>\alpha^{-1}$ второй член в (3.20) осциллирует с изменением t , причём можно показать, что он быстро убывает при $u=v-\frac{\omega_K}{K}\gg\frac{\alpha}{K}\sim\sqrt{\frac{e\varphi_0}{m}}$ т.е. квазилинейная функция распределения искажается только вблизи резонансной скорости $v=\frac{\omega_K}{K}$ в интервале скоростей порядка скорости колебаний частиц , "захваченных" волной. Частота, осцилляций функции распределения вблизи фазовой скорости,как видно из (3.20), порядка α , что совпадает с частотой колебаний частиц в потенциальной яме волны.

4. Уравнение для поля волны.

Рассмотрим точное нелинейное уравнение для потенциала в формуле (2.II).Выделив линейные члены этого уравнения, запишем его в виде

$$\varepsilon_K(\omega)\varphi_K(\omega)=\tau_K(\omega)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4\pi e N}{K^2}\int d\vec v\, d\vec r_0\, F^{(n)}(\omega-\vec K\vec v,\vec r_0,\vec v)e^{-i\vec K\vec r_0}\qquad(4.I)$$

где $\varepsilon_K(\omega),\tau_K(\omega)$ определены в (2.I2), (2.I3); величина ω_K ,определенная в (2.I6) является частотой поля в линейном приближении.

Как отмечалось в разд.2,некоторые из нелинейных членов в уравнении (4.I) являются секулярными. Именно эти члены, в первую очередь определяют нелинейные эффекты. Как и при выводе уравнения (3.2) для квазилинейной функции распределения $\Phi(\omega,\vec v)$, мы ограничимся учётом в (4.I) членов, которые имеют при данном n наибольшую степень секулярности (т.е.максимальную кратность полюса, если в них вместо $\varphi_K(\omega)$ подставить (2.I8). Нетрудно убедиться, что эти члены изображаются диаграммами, приведенными на рис. 2б, причем после подстановки их в (4.I) и выполнения интегрирования по $\vec v$, $\vec r_0$, соответствующие полюса будут лежать в точке $\omega=\omega_K$. Обозначим их сумму через $\Phi_K(\omega,\vec r_0,\vec v)$.

Из общего вида диаграмм на рис.2б и формулы (2,7) следует, что вся сумма может быть представлена в виде

$$\Phi_k(\omega,\vec{z}_0,\vec{v}) = \frac{1}{(2\pi)^2 i}\sum_q \frac{1}{\omega}\int\left[\rho_{-q}(\omega_1'),\Phi(\omega-\omega_1-\omega_1',\vec{v})\right]\varphi_q(\omega_1)\,d\omega_1\,d\omega_1' \qquad (4.2)$$

где $\Phi(\omega,\vec{v})$ - лапласовское изображение квазилинейной функции распределения, удовлетворяющей уравнению (3.3). Таким образом, если ограничиться учётом только самых "больших", в указанном выше смысле, нелинейных членов, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F^n$ в уравнении (2.II) следует заменить на $\Phi_k(\omega-\vec{k}\vec{v},\vec{z}_0,\vec{v})$. Подставляя (4.2) в (2.II), получим следующее уравнение для $\varphi_k(\omega)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int \varepsilon_k(\omega,\omega')\,\varphi_k(\omega')\,d\omega' = z_k(\omega) \qquad (4.3)$$

$$\varepsilon_k(\omega,\omega') = \frac{i}{\omega-\omega'} + \frac{\omega_0^2}{k^2}\int\frac{d\vec{v}}{\omega-\vec{k}\vec{v}}\,\vec{k}\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec{v})}{\partial\vec{v}} \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) отличается от линейного уравнения (2.I2) тем, что вместо диэлектрической проницаемости $\varepsilon_k(\omega)$ в нём стоит интегральный оператор с ядром $\varepsilon_k(\omega,\omega')$, выражающимся через квазилинейную функцию распределения $\Phi(\omega,\vec{v})$. Если пренебречь зависимостью функции $\Phi(t,\vec{v})$ от времени, т.е. положить $\Phi(\omega,\vec{v}) = \frac{i f(\vec{v})}{\omega}$, то это приведет к замене

$$\varepsilon_k(\omega,\omega') \longrightarrow \frac{i\varepsilon_k(\omega)}{\omega-\omega'}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\varepsilon_k(\omega,\omega')\varphi_k(\omega')\,d\omega' \longrightarrow \varepsilon_k(\omega)\varphi_k(\omega)$$

Уравнения (3.3) и (4.4) представляют собой полную систему уравнения квазилинейного приближения, полученную путем суммирования главных секулярных членов теории возмущений в пренебрежении всеми остальными членами [6]. Как и в предыдущем разделе мы исследуем (4.3) в двух предельных случаях: для турбулентной плазмы и строго периодических колебаний.

Рассмотрим сначала первый случай, когда выполняется условие (3.9). Принимая во внимание изменение функции распределения только в резонансной области, положим вне этой области $\Phi(\omega,\vec{v}) = \frac{i f(\vec{v})}{\omega}$ Тогда ядро $\varepsilon_k(\omega,\omega')$ можно представить в виде

6) Учёт членов, имеющих меньшую степень секулярности (главными из них являются члены, изображенные на рис.3), приводит к уравнениям, описывающим взаимодействие волн. (Подробнее этот вопрос рассмотрен в /I8/.

$$\varepsilon_k(\omega,\omega') = \frac{i\,\varepsilon_{ok}(\omega)}{\omega-\omega'} + \frac{\omega_o^2}{K^2}\int_{\Delta v}\frac{d\vec v}{\omega-\vec K\vec v}\,\vec K\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec v)}{\partial\vec v} \qquad (4.5)$$

$$\varepsilon_{ok} = 1 + \frac{\omega_o^2}{K^2}\int\frac{d\vec v}{\omega-\vec K\vec v}\;\vec K\,\frac{df}{d\vec v} \qquad (4.6)$$

где $\int_{\Delta v}$ обозначает интегрирование по резонансной области, а $\int$ по нерезонансной (при $\omega = Re\,\omega_k = \omega_k^o$ интеграл в (4.6) можно понимать в смысле главного значения, если резонансная область является достаточной узкой). Подставляя (4.5) в (4.3), получаем

$$\varphi_k(\omega) = \frac{\tau_k(\omega)}{\varepsilon_k(\omega)} + \frac{\omega_o^2}{\varepsilon_k(\omega)K^2}\int_{\Delta v}\frac{d\vec v}{\omega-\vec K\vec v}\int d\omega'\,\vec K\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec v)}{\partial\vec v}\,\varphi_k(\omega') \qquad (4.7)$$

Учитывая, что $\varepsilon_{ok}(\omega_k^o) = 0$ и пренебрегая всеми остальными нулями $\varepsilon_{ok}(\omega)$ (которые находятся в нижней полуплоскости), с помощью (4.7) нетрудно получить уравнение

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} + i\omega_k^o\varphi_k(t) = \frac{4\pi eN}{\varepsilon'_{ok}}\int d\vec v\, g_k(\vec v)\, e^{-i\vec k\vec v t} - \qquad (4.8)$$

$$-\frac{i}{(2\pi)^2}\frac{\omega_o^2}{\varepsilon'_{ok}K^2}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\Delta v}\frac{dv}{\omega-\vec k\vec v}\int d\omega'\,\vec K\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec v)}{\partial\vec v}\,\varphi_k(\omega')$$

где

$$\varepsilon'_{ok} = [\, d\varepsilon_{ok}(\omega)/d\omega\,]_{\omega=\omega_k^o}$$

При этом мы использовали выражение для $\tau_k(\omega)$ (см. (2.I2)) . Интеграл,содержащий $g_k(\vec v)$ убывает с ростом t благодаря быстро осциллирующему при больших t множителю $\exp(-i\vec k\vec v t)$. Характерное время этого убывания равно $(KV_g)^{-1}$,где V_g – эффективная "ширина" функции $g_k(\vec v)$. Мы будем предполагать, что это время мало по сравнению с другими характерными временами, определяющими изменение амплитуды $\varphi_k(t)$,так что первым членом в правой части (4,8) можно пренебречь (Заметим,что аналогичное предположение: $KV_g \gg Jm\,\omega_k$–существенно и в линейной теории).

При выполнении условия (3.9), интеграл во втором члене в (4.8) можно представить в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\Delta v} d\vec{v}\,\frac{1}{\omega-\vec{k}\vec{v}}\int d\omega'\,\vec{k}\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec{v})}{\partial\vec{v}}\,\varphi_k(\omega') \simeq$$

(4.9)

$$\simeq \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega\, e^{-i\omega t}\int_{\Delta v}\frac{d\vec{v}}{\omega_k^0-\vec{k}\vec{v}+i0}\int d\omega'\,\vec{k}\,\frac{\partial\Phi(\omega-\omega',\vec{v})}{\partial\vec{v}}\,\varphi_k(\omega') = \int_{\Delta v}\frac{d\vec{v}}{\omega_k^0-\vec{k}\vec{v}+i0}\,\vec{k}\,\frac{\partial\Phi(t,\vec{v})}{\partial\vec{v}}\,\varphi_k(t)$$

Здесь мы заменили $\omega-\vec{k}\vec{v}$ на $\omega_k^0-\vec{k}\vec{v}+i0$ аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе при упрощении квазилинейного уравнения для слаботурбулентной плазмы. Подставляя (4.9) в (4.8), получим, с учетом всех пренебрежений

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = \left[-i\omega_k^0+\gamma_k(t)\right]\varphi_k(t) \tag{4.10}$$

$$\gamma_k(t) = \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k^2}\,\frac{\partial\Phi(t,v)}{\partial v}\Big|_{v=\frac{\omega_k^0}{k}} \tag{4.11}$$

Уравнения (4.10) , (4.11) являются известным результатом квазилинейной теории для слаботурбулентной плазмы.

Перейдем теперь к исследованию уравнений (4.3), (4,4) для чисто периодической волны. Подставляя (3.20) в (4.4) получаем

$$\varepsilon_k(\omega)\varphi_k(\omega) = -\frac{i\omega_0^2}{2\pi\alpha}\sum_n \beta_n\int du\,\psi_n\!\left(\frac{ku}{\alpha}\right)\frac{(2n+1)\alpha^2-k^2u^2}{\omega-\omega_k-ku}\int\frac{d\omega'\,\varphi_k(\omega')}{(\omega-\omega')\left[(\omega-\omega')^2-(2n+1)\alpha^2\right]}+z_k(\omega) \tag{4.12}$$

Поступая так же, как при выводе уравнения (4.8) находим

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = -i\omega_k\varphi_k(t)-\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k'\alpha^3}\sum_n\frac{\beta_n}{2n+1}\int du\,\psi_n\!\left(\frac{ku}{\alpha}\right)\left[(2n+1)\alpha^2-k^2u^2\right]\times$$

$$\times\int_0^t dt_1\left(1-\cos\alpha t_1\sqrt{2n+1}\right)\varphi_k(t_1)\,e^{i(ku+\omega_k)(t_1-t)} \tag{4.13}$$

где ω_k является ближайшим к действительной оси нулём функции $\varepsilon_k(\omega)$:

$\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k$

$$\gamma_k = \frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' K^2} \frac{df}{dv}\Big|_{v=\frac{\omega_k}{k}} \tag{4.I4}$$

В уравнении (4.I3) мы опустили член,содержащий интеграл $\int d\bar{v}\, g_k(\bar{v}) e^{-i\bar{k}\bar{v}t}$ который,как отмечалось выше, предполагается быстро затухающим.Используя (3.I6) и соотношение / I9 /

$$\int \psi_n(y) e^{iyz} dy = \sqrt{2\pi}\, i^n \psi_n(z) \tag{4.I5}$$

выполним интегрирование по u во втором члене правой части (4.I3). В результате получаем

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = -i\omega_k \varphi_k(t) - \sqrt{2\pi}\frac{\omega_0^2 \alpha^2}{\varepsilon_k' K} \sum_n \frac{i^n \beta_n}{2n+1} \int_0^t dt_1 (t_1 - t)^2 \psi_n[(t_1-t)\alpha](1-\cos\alpha t_1\sqrt{2n+1}) e^{-i\omega_k(t-t_1)} \tag{4.I6}$$

Подинтегральное выражение в (4.I6) представляет собой произведение быстро изменяющегося при изменении t_1 выражения $\psi_n[\alpha(t_1-t)](1-\cos\alpha t_1\sqrt{2n+1})$ (характерное время изменения $\tau \lesssim \alpha^{-1}$) на медленно меняющуюся амплитуду поля $\varphi_k^0(t)$.Пренебрегая изменением $\varphi_k^0(t)$ за время порядка α^{-1} , мы можем вынести $\varphi_k^0(t)$ из-под интеграла. Выполняя после этого несложные преобразования ,получаем

$$\frac{d\varphi_k(t)}{dt} = [-i\omega_k + \Theta_k(t)]\varphi_k(t) \tag{4.I7}$$

$$\Theta_k(t) = -\sqrt{2\pi}\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' K\alpha}\sum_n (-1)^n \int_0^{\alpha t} d\tau \Big\{\beta_{2n}[\psi_{2n}(\tau) - \psi_{2n}(0)\cos\tau\sqrt{4n+1}\,] - i\beta_{2n+1}\Big[\psi_{2n+1}(\tau) - \frac{\psi_{2n+1}(0)}{\sqrt{4n+3}}\sin\tau\sqrt{4n+3}\,\Big]\Big\} \tag{4.I8}$$

Интегрируя это уравнение,получаем

$$\varphi_k(t) = \varphi_k(0)\exp\Big\{-it\Big[\omega_k^0 + i\gamma_k + it^{-1}\int_0^t \Theta_k(t_1)dt_1\Big]\Big\} \tag{4.I9}$$

Из (4.I8) видно, что $t^{-1}\,\mathrm{Re}\int_0^t \Theta_k(t_1)dt_1$, представляет собой изменение инкремента, $t^{-1}\,\mathrm{Im}\int \Theta_k(t)dt_1$ - действительной части частоты, обусловленное искажением функции распределения вследствие обратного влияния волны. Как отмечалось в разд.3 функция распределения искажается только в узкой области, лежащей вблизи резонансной скорости $v = \frac{\omega_k}{k}$. Отсюда следует, что изменение вещественной части частоты мало по сравнению с ω_k^0.

Рассмотрим подробнее величину

$$\Gamma_k(t) = \gamma_k + t^{-1}\,\mathrm{Re}\int_0^t \theta_k(t_1)\,dt_1$$

имеющую смысл инкремента, зависящего от времени. Исследуем сначала $\Gamma_k(t)$ при малых временах. Мы воспользуемся тем обстоятельствам, что при достаточно малых аргументах и больших порядках функции параболического цилиндра имеют следующее асимптотическое представление /I9/

$$\psi_{2n}(z) = \psi_{2n}(0)\left[\cos z\sqrt{4n+1} + O\left(\frac{z^{5/2}}{\sqrt[4]{4n+1}}\right)\right] \tag{4.21}$$

Учитывая (4.2I), находим

$$t^{-1}\int_0^t dt_1 \int_0^{\alpha t_1} d\tau\left[\psi_{2n}(\tau) - \psi_{2n}(0)\cos\tau\sqrt{4n+1}\right] < \psi_{2n}(0)\frac{(\alpha t)^{7/2}}{\sqrt[4]{4n+1}} \tag{4.22}$$

откуда видно, что при $\alpha t \ll 1$ разница между $\Gamma_k(t)$ и линейным инкрементом есть малая величина порядка $(\alpha t)^{7/2}$. Отметим, что при $\alpha t \sim 1$ левая часть соотношения (4.22) достаточно быстро убывает с ростом n, благодаря чему в выражении (4.20) для $\Gamma_k(t)$ при $t \sim \alpha^{-1}$ можно ограничиться лишь несколькими первыми членами ряда. Величина этих членов имеет следующий порядок

$$\frac{\omega_0^3}{\varepsilon_k' k^3 v_T^3}\exp\left(-\frac{\omega_0^2}{k^2 v_T^2}\right), \qquad v_T = \sqrt{\frac{2T}{m}} \tag{4.23}$$

который совпадает с величиной линейного инкремента. Таким образом, отличие $\Gamma_k(t)$ от γ_k становится существенным при $t \sim \alpha^{-1} \sim \left(k\sqrt{\frac{e\varphi}{m}}\right)^{-1}$

Исследуем теперь $\Gamma_k(t)$ при $t \gg \alpha^{-1}$. Перепишем формулу (4.20) в виде

$$\Gamma_k(t) = \gamma_k - \sqrt{2\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k\alpha}\,t^{-1}\int_0^t dt_1\left\{\sum_n (-1)^n\beta_{2n}\int_0^\infty d\tau\,\psi_{2n}(\tau) - \sum_n(-1)^n\beta_{2n}\int_{\alpha t_1}^\infty d\tau\,\psi_{2n}(\tau)\right\} +$$

$$+ \sqrt{2\pi}\,\frac{\omega_0^2}{\varepsilon_k' k\alpha^2 t}\sum_n \frac{(-1)^n\beta_{2n}}{4n+1}\,\psi_{2n}(0)\left[1 - \cos\alpha t\sqrt{4n+1}\right] \tag{4.24}$$

Используя (4.I5), (3.I7), первый член в фигурных скобках можно записать следующим образом

$$\sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_0^\infty \psi_{2n}(\tau) d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum \beta_{2n} \psi_{2n}(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k}{\alpha} \frac{df}{dv}\Big|_{v=\frac{\omega_k}{k}} \quad (4,25)$$

Подстановка (4.25) в (4.24) приводит к компенсации первого члена γ_k. Вторую сумму в фигурных скобках представим в виде

$$\sum_n (-1)^n \beta_{2n} \int_{\alpha t_1}^\infty d\tau \psi_{2n}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum \beta_{2n} \int_{\alpha t_1}^\infty d\tau \int_{-\infty}^\infty dx\, \psi_{2n}(x) e^{i\tau x} =$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty du \frac{df}{du} \cos(kut_2) \quad (4.26)$$

Последнее выражение быстро убывает при $t_1 > (kv_T)^{-1}$. Таким образом, при $t \gtrsim \alpha^{-1}$ имеем

$$\Gamma_k(t) = \frac{2\sqrt{2\pi}\,\omega_0^2}{\varepsilon_k' k \alpha^2 t} \sum_n \frac{(-1)^n \beta_{2n}}{4n+1} \psi_{2n}(0) \sin^2 \alpha t \sqrt{n+\frac{1}{4}} \quad (4.27)$$

Отсюда следует, что $\Gamma_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Итак, учёт нелинейных эффектов, обусловленных обратным влиянием волны на функцию распределения, приводит к исчезновению затухания Ландау по закону, определяемому формулой (4.27). После окончания квазилинейной релаксации, т.е. при $t \gg \alpha^{-1}$ уравнение для поля волны принимает вид

$$\varphi(t,\vec{z}) = \varphi_k(0)\, e^{t\Gamma_k(t)}\, e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{z})} \quad (4.28)$$

причём $t\Gamma_k(t)$, как видно из (4.27) является осциллирующей во времени функцией, так что амплитуда волны не стремится к стационарному значению, а совершает малые осцилляции относительно некоторой средней величины. Из (4.28) легко найти условие законности замены переменной амплитуды на постоянную в уравнении (3.4), из которого было получено выражение для квазилинейной функции распределения (3.20). Это условие имеет вид

$$t\Gamma_k(t) \sim \frac{\gamma_k}{\alpha} \sim \gamma_k \left(k\sqrt{\frac{e\varphi}{m}}\right)^{-1} \ll 1 \quad (4.29)$$

При условии (4.29) средняя амплитуда волны при $t \gg \alpha^{-1}$ определяется формулой

$$\varphi_k(t) \simeq \varphi_k(0)\left[1+\overline{t\Gamma_k(t)}\right] = \varphi_k(0)\left[1+\frac{\sqrt{2\pi}\,\omega_0^2}{\varepsilon_k' k\alpha^2}\sum_n (-1)^n \frac{\beta_{2n}\psi_{2n}(0)}{4n+1}\right] \sim \varphi_k(0)\left[1+\frac{\gamma_k}{\alpha}\right] \quad (4.30)$$

Авторы выражают благодарность Р.З. Сагдееву за стимулирующие дискуссии, а также А.А.Веденову и Б.Б.Кадомцеву за полезное обсуждение результатов.

Литература.

I. А.А.Веденов. Введение в теорию слаботурбулентной плазмы. "Вопросы теории плазмы",вып.3, стр.203,Атомиздат,I963.

2. Б.Б. Кадомцев. Турбулентность плазмы."Вопросы теории плазмы", вып.4,стр.I88, Атомиздат,I964 года.

3. E.Frieman, P. Rutherford. Ann. of Phys., 28, 134, 1964.

4. W. Drummond, D. Pines Ann. of Phys., 28, 478, 1964.

5. А.А.Галеев,В.И.Карпман,Р.З.Сагдеев.ДАН СССР,I57, I088,I964 г.

6. Л.Н.Горбунов, В.П.Силин, ЖЭТФ,47,200,I964.
Л.М.Горбунов,В.В.Пустовалов,В.П.Силин,ЖЭТФ,47,I435,I964.

7. Л.М.Альтшуль,В.И. Карпман,ЖЭТФ,47, I553,I964.

8. Ю.Л.Климонтович.ДАН СССР,I57 ,563, I964.

9. Л.М.Коврижных,В.Н.Цытович,ЖЭТФ,46, 22I2, 47 ,I454,I964.

I0. Р.Мазитов. ПМТФ (в печати).

II. L. Van Hove. Physica, 21, 517, 1955. ; 23, 441, 1957.

I2. I. Prigogine. Non-Equilibrium Statistical Mechanics, Interscience, 1962.

I3. R. Balescu. Statistical Mechanics of Charged Particles, Interscience, 1963.

I4. А.А.Веденов,Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, I,82, I96I.

I5. W. Drummond, D. Pines. Nucl. Fus. Suppl, Part 3, 1049, 1962

I6. Л.Д.Ландау.ЖЭТФ,I6,574,I946.

I7. D. Montgomery. Phys. Fluids, 6, 1109, 1963

I8. В.И.Карпман (в печати)

I9. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов,сумм, рядов и произведений.Физматгиз,I962.

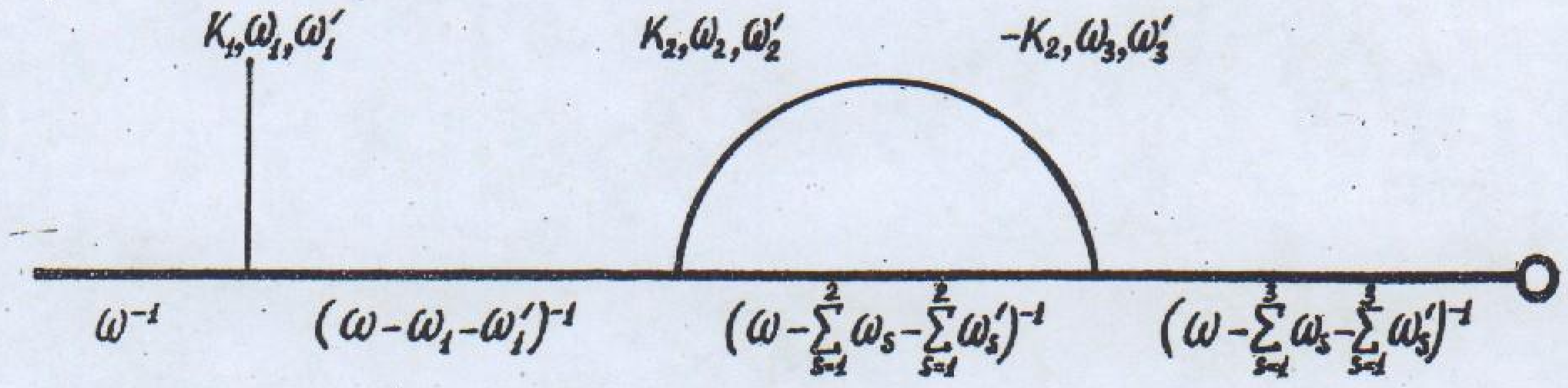

Рис.1

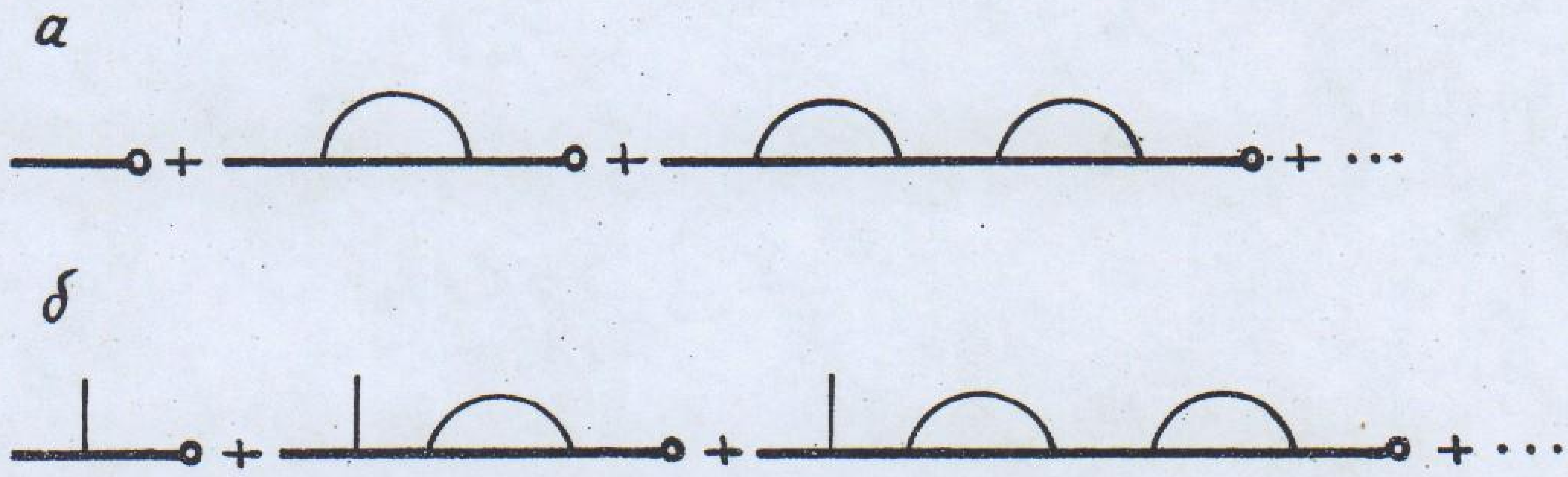

Рис.2

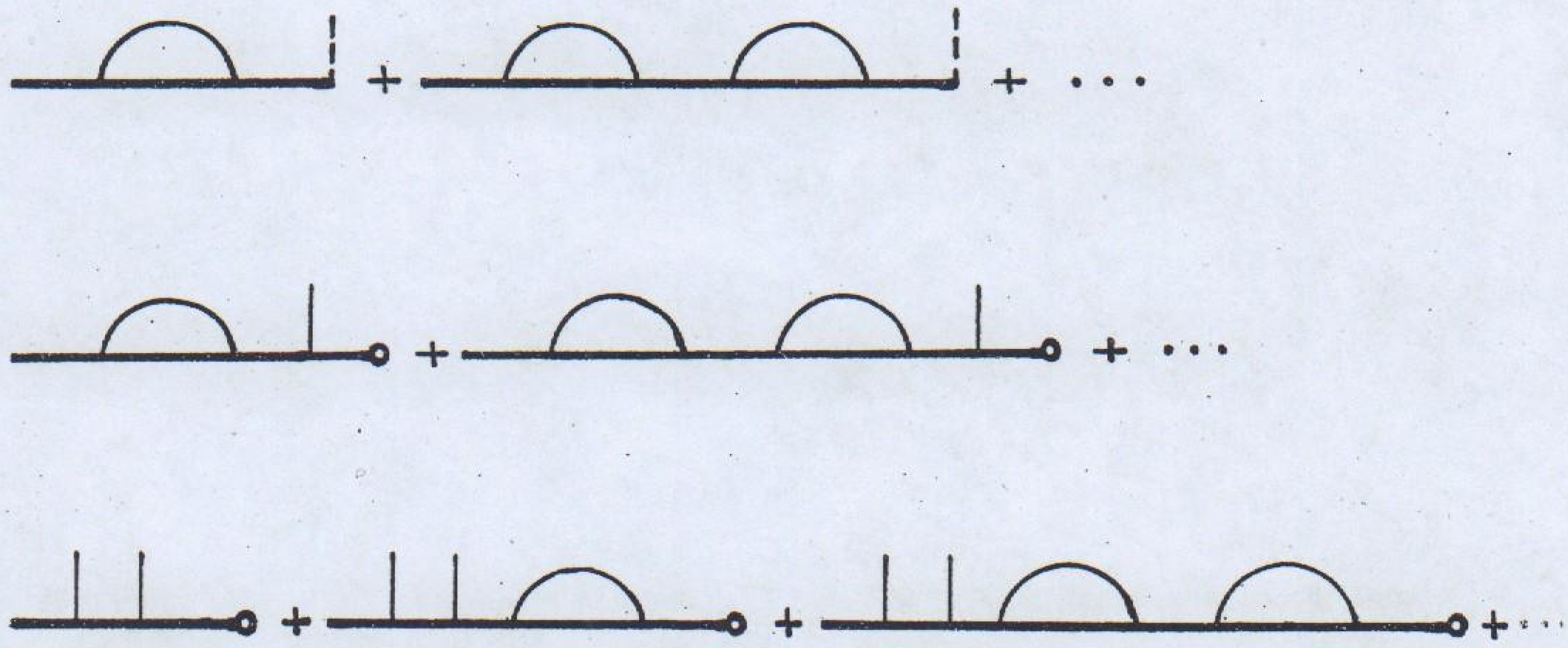

Рис.3

Ответственный за выпуск Г.М.Заславский, подписано
к печати 9.02.65г. МН 07025, тираж I50, бесплатно

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук С С С Р .