ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

В.И.Карпман

Квазилинейная теория распространения монохроматической волны в плазме

НОВОСИБИРСК 1965

ABSTRACT

Quasilinear equations for monochromatic wave excited in a plasma by external source are derived. Approximate solution of these equations is obtained.

I. В связи с недавними экспериментами Уонга, Д'Анжело и Мотли по изучению коллективного затухания ионно-акустических волн /I/, представляет интерес теоретическое исследование колебаний, возбуждаемых в плазме внешними источниками. Линейная теория такого рода впервые рассматривалась Л.Д.Ландау в работе /2/, где изучаются электронные колебания плазмы в полупространстве, возбуждаемые внешним электрическим полем вида $E_0 e^{-i\omega t}$ (см.также /3,4/). Недавно появилась работа Гулда /5/, в которой развита подробная теория возбуждения ионно-акустических колебаний. При этом, в соответствии с условиями эксперимента, плазма предполагается неограниченной, а внешний источник, возбуждающий колебания, берется в виде двух идеальных сеток (свободно пропускающих частиц), на которые подаётся "внешний" заряд с плотностью

$$\rho_e(x)=\sigma_0\left[\delta(x+\tfrac{1}{2}x_0)-\delta(x-\tfrac{1}{2}x_0)\right]\cos\omega t\approx\sigma_0 x_0\,\delta'(x)\cos\omega t \qquad (I)$$

(начало координат выбрано посредине между сетками; x_0 - расстояние между ними, которое, для простоты предполагается малым по сравнению с длиной волны). Все упомянутые теоретические работы рассматривают колебания в линейном приближении.

В настоящем сообщении рассматривается нелинейная теория распространения продольных колебаний в плазме, возбуждаемых внешним источником вида (I), учитывающая обратное влияние волны на функцию распределения частиц плазмы (квазилинейное приближение). Так как колебания источника предполагаются монохроматическими, то соответствующая задача выходит за пределы применимости известной квазилинейной теории /6,7/, основанной на приближении хаотических фаз и поэтому применимой лишь к достаточно широким волновым пакетам[1]).

2. Основные уравнения, описывающие колебания, имеют вид

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + v\frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{e_j}{m_j} E \frac{\partial F_j}{\partial v} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \sum_j 4\pi N e_j \int_{-\infty}^{\infty} dv F_j(t,x,v) + \sigma_0 x_0 \delta'(x) \cos \omega t \qquad (3)$$

где j - индекс, указывающий на сорт частиц: $j = e, i$ (электроны, ионы). Чтобы не загромождать формул , этот индекс будет опускаться там, где это несущественно.

Разложим функцию распределения и поле в ряд Фурье по времени

$$F(t,x,v) = \Phi(x,v) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} F_n(x,v) e^{-in\omega t},$$
$$E(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(x) e^{-in\omega t} \qquad (4)$$

где $E_{-n} = E_n^*$, $F_{-n} = F_n^*$. В разложении для $F(t,x,v)$ мы выделили компоненту с $n = 0$, обозначив её через $\Phi(x,v)$. Эта функция будет играть основную роль, определяя интересующие нас нелинейные эффекты. Подставляя (4) в (2), получаем

$$-i\omega n F_n(x,v) + v\frac{\partial F_n}{\partial x} = -\frac{e}{m}\sum_{r=-\infty}^{\infty} E_r \frac{\partial F_{n-r}}{\partial v}, \qquad (5)$$

$$v\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{e}{m}\sum_{r=-\infty}^{\infty} E_r \frac{\partial F_{-r}}{\partial v}, \quad F_0 = \Phi(x,v) \qquad (6)$$

---

1) Условие применимости этого приближения имеет вид /6/: $\Delta c \gg \left|\frac{e\varphi}{m}\right|^{1/2}$, где Δc - разброс фазовых скоростей в пакете волн, а φ - средний потенциал электрического поля. Это условие становится особенно жестким для ионно-акустических колебаний, где дисперсия невелика; в этом случае из него следует $\frac{\Delta\omega}{\omega} \gg \left|\frac{e\varphi}{T_e}\right|^{1/2} (k r_D)^{-2}$, где $\Delta\omega$ - ширина частотного спектра возбуждаемых волн.

В дальнейшем предполагается, что амплитуда колебаний достаточно мала, так, что гармоники E_n при $|n|\neq 1$ являются величинами высшего порядка малости по отношению к основной гармонике E_1. Ограничиваясь главными по амплитуде E_1 членами, получаем из (5), (6)

$$-i\omega F_1(x,v)+v\frac{\partial F_1}{\partial x}=-\frac{e}{m}E_1(x)\frac{\partial \Phi(x,v)}{\partial v}, \tag{7}$$

$$v\frac{\partial \Phi}{\partial x}=-\frac{e}{m}\left(E_1\frac{\partial F_{-1}}{\partial v}+E_{-1}\frac{\partial F_1}{\partial v}\right). \tag{8}$$

Уравнение (7) определяет F_1 через E_1 и $\Phi(x,v)$ с точностью до произвольной функции скорости. Для устранения неоднозначности мы будем считать, следуя /2/, что ω имеет малую положительную мнимую добавку. (Это условие соответствует предположению об адиабатическом включении источника при $t=-\infty$). Тогда решение уравнения (7), конечное при $x\to\pm\infty$ и всех v, имеет вид

$$F_1(x,v)=-\frac{e}{m}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,v)E_1(\xi)\frac{\partial \Phi(\xi,v)}{\partial v}d\xi \tag{9}$$

$$K(x,v)=\frac{1}{|v|}\theta\left(x\frac{v}{|v|}\right)e^{\frac{i\omega x}{v}}, \quad \theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{I0}$$

Подставляя (9) в (8), а также в Фурье-компоненту уравнения (3), отвечающую n = I, получим

$$v\frac{\partial \Phi}{\partial x}=2\left(\frac{e}{m}\right)^2 Re\left[E_1^*(x)\frac{\partial}{\partial v}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,v)E_1(\xi)\frac{\partial \Phi(\xi,v)}{\partial v}d\xi\right], \tag{II}$$

$$\frac{\partial E_1(x)}{\partial x}+\sum_j \omega_{0j}^2\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}dv\,K(x-\xi,v)E_1(\xi)\frac{\partial \Phi_j(\xi,v)}{\partial v}=\sigma_0 x_0\delta'(x) \tag{I2}$$

где $\omega_{0j}^2=\frac{4\pi ne^2}{m_j}$. Уравнения (II) и (I2) представляют собой полную систему уравнений квазилинейного приближения для монохроматической волны.

3. Прежде чем решать эту систему, рассмотрим коротко линейное приближение по $E_1(x)$. В этом приближении следует положить $\phi(x,v)=f(v)$, где $f(v)$ — невозмущенная волной функция распределения частиц. Подставляя это в уравнение (I2) и решая его с помощью Фурье-преобразования по x , получим

$$E_1(x)=\frac{\sigma_0 x_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipx}\,dp}{\varepsilon(\omega,p)}\,, \tag{I3}$$

где $\varepsilon(\omega,p)$ - диэлектрическая проницаемость плазмы

$$\varepsilon(\omega,p)=1+\sum_j{}'\frac{\omega_{0j}^2}{p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_j'(v)\,dv}{\omega-pv}\,. \tag{I4}$$

При вычислении интеграла в (I3) необходимо предполагать, как уже указывалось выше, что ω лежит в верхней полуплоскости. Это обстоятельство приводит к тому, что $\varepsilon(\omega,p)$ при $p\gtrless 0$ изображается двумя различными аналитическими функциями p , что значительно усложняет вычисление поля.

Мы воспользуемся исследованиями выражения типа (I3), проведенными в работах /2,4,5/, из которых вытекает следующий результат: выражение (I3) при не слишком малых $/x/$ имеет вид

$$E_1(x)\approx i\sigma_0 x_0\left[\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial k}\right]^{-1}e^{-ikx-\Gamma x}\;(x>0),\quad E_1(-x)=-E_1(x), \tag{I5}$$

где k и Γ удовлетворяют уравнениям

$$\varepsilon^2(\omega,k)=0,\quad \Gamma=-\varepsilon^i(\omega,k)\left[\frac{\partial\varepsilon^2(\omega,k)}{\partial k}\right]^{-1};$$
$$\varepsilon^2(\omega,k)=\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega,k)\,,\quad \varepsilon^i(\omega,k)=\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega,k)\,. \tag{I6}$$

Решение вида (I5) описывает затухающую (с декрементом Γ) плоскую волну, распространяющуюся по обе стороны от источника. Разумеется, оно справедливо только в том случае, когда $\Gamma \ll k$. Заметим также, что (I5) теряет силу при $x \gg \Gamma$, так как опущенные члены, имея очень малый предэкспоненциальный множитель, затухают медленнее, чем $\exp(-\Gamma x)$.

4. Перейдем теперь к решению квазилинейного уравнения (II). Нетрудно убедиться, что при значениях v, лежащих достаточно далеко от фазовой скорости волны $c = \frac{\omega}{k}$, отличие $\Phi(x,v)$ от невозмущенной фукнции распределения мало (имеет порядок $|E_1|^2$) и может быть найдено по теории возмущений. Последняя, однако, перестает быть применимой в области $v \sim c$, где и становится существенным резонансное взаимодействие между волной и частицами, имеющими скорость, близкую к c. Эта область значений в дальнейшем будет называться резонансной (её ширина будет определена ниже).

В дальнейшем мы будем пренебрегать отличием $\Phi(x,v)$ от $f(v)$ вне резонансной области. Отсюда следует, что рассматривая, для определенности, $\Phi(x,v)$ при $x > 0$, мы можем пренебречь влиянием поля при $x < 0$ на $\Phi(x,v)$ при $x > 0$, так как волна при $x < 0$ имеет фазовую скорость $-c$ и поэтому не взаимодействует резонансным образом с частицами, имеющими скорости $v \sim c$. Поэтому в уравнении (II) мы можем заменить нижний предел интегрирования по ξ на нуль. По этой же причине уравнение для $\Phi(x,v)$ можно решать при следующем граничном условии

$$\Phi(x,v) \to f(v) \qquad x \to 0. \tag{I7}$$

Далее мы будем предполагать, что решение квазилинейных уравнений (II), (I2) приводит к выражению для поля вида $E_1(x) = \mathcal{E}(x) e^{ikx}$ $(x > 0)$ с амплитудой $\mathcal{E}(x)$, мало меняющейся в достаточном большом интервале значений x, так что в уравнении (II) изменением величины $\xi(x)$ можно пренебречь (условие законности такой аппроксимации будет получено ниже; см.(34). После этого уравнение (II), с учётом (I0), приводится к виду

$$(u+c)\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{k^2\eta^4}{u+c}\int_0^x\cos\left[\frac{ku(x-\xi)}{c}\right]\frac{\partial\Phi(\xi,u)}{\partial u}d\xi, \qquad (18)$$

где обозначено

$$\eta=2^{1/4}\left(\frac{e\xi}{mk}\right)^{1/2},\quad u=v-c,\quad c=\frac{\omega}{k} \qquad (19)$$

Поскольку нас интересует решение в окрестности резонансной области, ширина которой значительно меньше c, мы можем заменить уравнение (I8) следующим более простым уравнением

$$c\,\frac{\partial\Phi(x,u)}{\partial x}=\frac{k^2\eta^4}{c}\frac{\partial}{\partial u}\int_0^x\cos\frac{ku(x-\xi)}{c}\,\frac{\partial\Phi(\xi,u)}{\partial u}d\xi. \qquad (20)$$

Как будет видно из полученного ниже решения уравнения (20), отличие последнего от $f(u)$ быстро исчезает при $|u|\gg\eta$ (величина η, равная по порядку скорости частиц, захваченных потенциальной ямой волны ($\eta\sim(\frac{e\varphi}{m})^{1/2}$), как раз и определяет ширину резонансной области). Таким образом, уравнения (I8) и (20) содержат, по-существу, одинаковую информацию.

Уравнение (20) легко сводится к дифференциальному путём применения преобразования Лапласа по x к обеим его частям; после этого оно оказывается совпадающим (с точностью до обозначений) с полученным в работах [8,9] квазилинейным уравнением для монохроматической волны в задаче с начальными (по времени) условиями[I)] (см., наприм., /9/, уравнение (3.I)). Соответственно, мы можем воспользоваться полученным в /9/ решением и написать следующее выражение для $\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ (выражение для Φ нам не понадобится):

I) В /8,9/ это уравнение получено более сложным методом суммирования главных секулярных членов в общем ряду теории возмущений.

$$\frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u} = \frac{df}{du} - \frac{2}{\eta^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n+1)\eta^2 - u^2]}{2n+1}\beta_n \psi_n\left(\frac{u}{\eta}\right)\sin^2\frac{\sqrt{2n+1}\,x}{\lambda}, \qquad (2I)$$

где $\psi_n(z)$ - нормированные функции параболического цилиндра $\psi_n(z) = C_n e^{-z^2} H_n(z)$, ($H_n(z)$ - полиномы Эрмита, C_n - нормирующие множители), а β_n коэффициенты разложения $f'(u)$ по ψ_n

$$f'(u) = \eta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n \psi_n\left(\frac{u}{\eta}\right); \qquad \beta_n = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(z) f'(\eta z)\,dz. \qquad (22)$$

Величина определяется соотношением

$$\lambda = \frac{c}{\eta k} \sim \frac{c}{k}\left(\frac{e\,\mathcal{E}}{km}\right)^{-1}. \qquad (23)$$

Из (2I) следует, что отличие $\Phi'_u(x,u)$ от $f'(u)$ мало при $x \ll \lambda$ и становится существенным при $x \gtrsim \lambda$. Таким образом λ - характерная длина, на которой начинает сказываться обратное влияние волны на функцию распределения в резонансной области. Замечая, что $(\eta k)^{-1}$ имеет порядок периода колебания захваченных частиц в потенциальной яме волны, мы можем сказать, что квазилинейная длина λ по порядку величины равна пути, который проходит фаза за период колебаний захваченных частиц в потенциальной яме волны.

Как показано в Приложении, среднее по x от величины $\Phi'_u(x,u)$ имеет следующую асимптотику при больших u :

$$\frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u} \approx f'(u)\left[1 - 2\left(\frac{\eta}{u}\right)^4\right], \quad u \gg \eta \qquad (24)$$

Таким образом, величина $\Phi'_u(x,u)$ вне резонансной области $|u| \lesssim \eta$ достаточно быстро стремится к невозмущенной функции $f'(u)$. Отсюда, в частности, следует возможность замены уравнения (I8) более простым уравнением (20).

Все эти вычисления относились к функции распределения $\Phi(x,\sigma)$ при $x>0$. Вид $\Phi(x,\sigma)$ при $x<0$ определяется соотношением $\Phi(x,\sigma) = \Phi(-x,-\sigma)$. Соответственно, при $x<0$ квазилинейная функция распределения существенно отличается от равновесной при $v \sim -c$.

5. Перейдем теперь к решению уравнения (I2) для основной гармоники поля $E_1(x)$. Запишем (I2) в виде

$$\frac{\partial E_1(x)}{\partial x} + \sum_j \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dv\, K(x-\xi, v) E_1(\xi) f_j'(v) =$$

$$= -\sum_j \omega_{0j}^2 \int_{\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} du\, K(x-\xi, u+c) E_1(\xi) \Psi_j(\xi, u), \quad (x>0), \quad (25)$$

где $\Psi(\xi,u)$ – второй член в правой части (2I).

Мы ищем решение этого уравнения в виде $E_1(x) = \mathcal{E}(x) e^{ikx}$, где k удовлетворяет первому из уравнений (I6), а $\mathcal{E}(x)$ – медленно меняющаяся функция (это значит, что в её разложение Фурье $\mathcal{E}(p)$ входят лишь компоненты с $p \ll k$). Если подставить в левую часть (25) $E_1(x)$ в виде $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \mathcal{E}(p) \exp[i(p+k)x]$, использовать (I0) и (I4) и удержать лишь первые неисчезающие члены разложения по степеням $\frac{p}{k}$, то левая часть уравнения (25) примет вид

$$k \frac{\partial \varepsilon^2(\omega, k)}{\partial k} \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik + \Gamma \right) \mathcal{E}(x), \qquad (26)$$

где k и Γ удовлетворяют соотношениям (I6), (При получении (26), мнимую часть диэлектрической проницаемости следует считать величиной первого порядка малости: $\varepsilon^i \sim \frac{p}{k}$

Что касается правой части уравнения (25), то если учесть, что $\Psi(\xi,u)$ быстро исчезает при $u \gg \eta$ (см.(24)) и ограничиться первыми неисчезающими членами разложения по степеням $\frac{\eta}{c}$, то двойной интеграл в правой части (25) нетрудно привести к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_n}{2n+1}\int_0^x d\xi\, E(\xi)\, e^{ik(x-\xi)}\left(1-\cos\frac{\sqrt{2n+1}\,\xi}{\lambda}\right)\cdot$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\,(2n+1-z^2)\,\psi_n(z)\exp\frac{i(x-\xi)z}{\lambda}. \qquad (27)$$

Это выражение с точностью до обозначений совпадает со вторым членом уравнения (3.I2) работы /9/ и может быть преобразовано совершенно аналогично. Производя эти преобразования и учитывая (26), мы можем представить уравнение (25) в виде

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \left[ik - \Gamma + \alpha(x)\right]E(x), \qquad (28)$$

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial k}\right)^{-1}\sum_j \omega_{0j}^2\lambda_j\sum_m(-1)^m\beta_{2m}^j\left[\int_0^{x/\lambda} d\tau\,\psi_{2m}(\tau) - \right. \qquad (29)$$
$$\left. - \frac{\psi_{2m}(0)}{\sqrt{4m+1}}\sin\frac{\sqrt{4m+1}\,x}{\lambda}\right].$$

Интегрируя уравнение (28), получаем

$$E(x) = \mathcal{E}(0)\exp\left[ikx - \Gamma x + \int_0^x \alpha(\xi)\,d\xi\right] \qquad (30)$$

Отсюда видно, что в результате взаимодействия волны с резонансными частицами декремент Γ заменяется на

$$\Gamma(x) = \Gamma - x^{-1}\int_0^x \alpha(\xi)\,d\xi. \qquad (31)$$

Величина $\alpha(x)$ с точностью до множителя совпадает с величиной $\mathrm{Re}\,\Theta(t)$, определенной уравнением (3.I6) работы /9/ (при этом $t = \frac{kx}{\omega}$). Используя результаты этой работы, получаем, что при $x \ll \lambda$, $\alpha(x) \sim \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{7/2}$, т.е. квазилинейные поправки весьма малы. При $x \gg \frac{c}{kv_T}$ выражение для $\alpha(x)$ можно привести к виду

$$\alpha(x) = \Gamma - \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial k}\right)^{-1}\sum_j \omega_{0j}^2\lambda_j\sum_m(-1)^m\frac{\beta_{2m}^j\,\psi_{2m}(0)}{\sqrt{4m+1}}\sin\frac{\sqrt{4m+1}\,x}{\lambda_j} \qquad (32)$$

Подставляя (32) в (3I) мы видим, что эффективный декремент $\Gamma(x)$ при $x \gtrsim \lambda$ осциллируя затухает как x^{-1}. Однако амплитуда волны, определяемая выражением $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(0)\exp[x\,\Gamma(x)]$ не стремится при этом к стационарному значению, а осциллирует. Предполагая, как и всюду выше, величину изменения амплитуды малой, мы можем написать

$$\mathcal{E}(x) \approx \mathcal{E}(0)\left[1-\frac{\sqrt{8\pi}}{\omega}\left(\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial k}\right)^{-1}\sum_j \omega_{0j}^2 \lambda_j \sum_m (-1)^m \frac{\beta_{2m}^j \psi_{2m}(0)}{4m+1} \sin^2\frac{\sqrt{4m+1}\,x}{2\lambda_j}\right] \quad (33)$$

Исследуя сумму ряда (33) после усреднения по x, нетрудно убедиться, что она достаточно быстро сходится и поэтому по порядку величины равна первому члену. Используя определение коэффициентов β_n в (22), получаем $\overline{\mathcal{E}(x)-\mathcal{E}(0)} \sim \lambda \Gamma \mathcal{E}(0)$. Таким образом, условие малости изменения амплитуды, предполагавшееся выше при решении уравнений (II), (I2), имеет вид

$$\lambda \Gamma \ll 1, \qquad (34)$$

т.е. линейный декремент затухания волны должен быть мал по сравнению с обратной квазилинейной длиной. Наконец, заметим, что справедливость выражения (32) нарушается при очень больших x, так как при его получении предполагалось, что величина λ, которая зависит от амплитуды как $\mathcal{E}^{-1/2}$ постоянна. Очевидно, изменение λ станет существенным при $\Delta\left(\frac{x}{\lambda}\right) \sim 1$, откуда следует, что (32) справедливо при

$$x \ll \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \sim (\Gamma\lambda)^{-1}\lambda \quad . \qquad (35)$$

6. Как отметил Драммонд /I0/, градиент радиационного давления волны должен приводить к разделению заряда и, следовательно, к появлению электростатического поля. Последнее определяется компонентой $E_0(x)$ в разложении (4) и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial E_0}{\partial x} = \sum_j 4\pi N e_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(x,v)\,dv. \qquad (36)$$

Уравнение для $\phi(x,v)$, учитывающее поле E_0, следует из (6), (9):

$$v\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{e}{m}E_0\frac{\partial \phi}{\partial v} + 2\left(\frac{e}{m}\right)^2 \mathrm{Re}\left[E_1^*(x)\frac{\partial}{\partial v}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,v)E_1(\xi)\frac{\partial \phi(\xi,v)}{\partial v}d\xi\right] \quad (37)$$

Из (36), (37) получаем следующее уравнение для $E_0(x)$:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = - E_0 \sum_j \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v} \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} +$$

$$+ 2 \sum_j \omega_{0j}^2 \frac{e_j}{m_j} Re \left[E_1^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v} \frac{\partial}{\partial v} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi K(x-\xi, v) E_1(\xi) \frac{\partial \Phi_j(\xi, v)}{\partial v} \right] \tag{38}$$

Пренебрегая малыми членами, мы можем подставить сюда Φ'_v из формулы (2I), полученной без учёта E_0. При вычислении первого члена в правой части (38), вместо $\Phi(x,v)$ можно подставить линейное приближение $f(v)$. Предполагая, что $f(v)$ - распределение Максвелла, получим

$$\sum_j \omega_{0j}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{v} \frac{\partial \Phi_j}{\partial v} \approx r_{D_e}^{-2} + r_{D_i}^{-2}, \tag{39}$$

где r_D - дебаевский радиус. Поскольку характерная длина изменения поля E_0 значительно больше дебаевских радиусов, то величиной $E_0''(x)$ в левой части (38) можно пренебречь по сравнению с первым членом в правой части.

Второй член правой части (38) вычисляется аналогично (25): $E_1(x)$ подставляется в виде разложения Фурье $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(q) e^{iqx} dq$ и удерживаются лишь первые неисчезающие члены разложения по степеням $\frac{q-k}{k}$. Используется также, что второй член в (2I) быстро исчезает при $u \gg \eta$. Результаты вычислений следующие.

В случае электронных колебаний ($\omega \sim \omega_{0e}$)

$$E_0 \approx - \frac{e}{2m_e\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} |E_1(x)|^2 \sim (k r_D)^2 \frac{\Gamma}{k} \frac{e\varphi}{T} E_1, \tag{40}$$

где $\varphi = \frac{E_1}{k}$ - потенциал поля основной гармоники. Таким образом, отношение $\frac{E_0}{E_1}$ в этом случае весьма мало.

Для ионно-звуковых колебаний получаем

$$E_0(x) \approx \frac{4\sqrt{2\pi}\, e}{m_e \omega^3} \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial k} \right)^{-1} \omega_{0e}^2 \lambda_e \sum_m (-1)^m \frac{\beta_{2m}^e \psi_{2m}(0)}{\sqrt{4m+1}} \sin \frac{\sqrt{4m+1}\, x}{\lambda_e} \tag{4I}$$

$$\sim \frac{e\varphi}{T_e} \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{T_i}{T_e} E_1 .$$

Таким образом, пространственное изменение поля E_0 в этом случае определяется только электронными членами второго слагаемого величины $\alpha(x)$ в формуле (32). При достаточно больших $\frac{T_e}{T_i}$ (для водородной плазмы при $\frac{T_e}{T_i} >$ 16) основной вклад в $\Gamma, \alpha(x)$ вносят электронные члены, так, что (41) можно представить в виде, аналогичном (40):

$$E_0 \approx \frac{ze}{m\omega^2} \frac{T_i}{T_e} \frac{\partial}{\partial x} |E_1(x)|^2 . \tag{42}$$

Из (41) следует, что пространственный масштаб изменения $E_0(x)$ равен электронной квазилинейной длине $\lambda_e \approx k^{-1} \left(\frac{m_e}{m_i} \frac{T_e}{e\varphi} \right)^{1/2}$, где - $\varphi = \frac{E_1}{k}$. Эта длина в $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}$ раз меньше квазилинейной длины изменения декремента $\Gamma(x)$, если основной вклад в Γ вносят ионы, что, как уже отмечалось выше, имеет место при не слишком больших $\frac{T_e}{T_i}$ ($\frac{T_e}{T_i} <$ 16 для водородной плазмы). Таким образом, в этом случае квазилинейные эффекты начинают проявляться в поведении поля E_0 гораздо раньше, чем начнёт существенно изменяться амплитуда основной гармоники E_1.

В заключение автор выражает благодарность Л.Э.Гуревичу, В.И.Перелю и Р.З.Сагдееву за интерес к работе и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство соотношения (24)

Вычисляя среднее по x от обеих частей равенства (2I), получаем

$$\overline{\frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u}} = f'(u) - \eta^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n+1)\eta^2 - u^2]}{2n+1} \beta_n \psi_n\left(\frac{u}{\eta}\right). \qquad (п.I)$$

Полагая $\frac{u}{\eta} = z$ и учитывая уравнение

$$\psi_n''(z) + (2n+1-z^2)\psi_n(z) = 0, \qquad (п.2)$$

мы можем переписать (п.I) в виде

$$\overline{\frac{\partial \Phi(x,u)}{\partial u}} = \frac{df(u)}{du} + \eta^{-1} \frac{d^2 T(z)}{dz^2}, \qquad (п.3)$$

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{2n+1} \psi_n(z). \qquad (п.4)$$

Учитывая (п.2) и соотношение (22), можно написать следующее дифференциальное уравнение для $T(z)$:

$$T''(z) - z^2 T(z) = -\eta f'(\eta z). \qquad (п.5)$$

Нас интересует решение этого уравнения, исчезающее при $z \to \pm\infty$. Для того, чтобы его получить, исследуем соответствующее однородное уравнение $u''(z) - z^2 u(z) = 0$. Решение этого уравнения, исчезающее при $z \to \infty$ имеет вид

$$u(z) = 2^{-3/4} \frac{z}{\pi} K_{1/4}\left(\frac{z^2}{2}\right), \qquad (п.6)$$

где $K_{1/4}(z)$ - функция Макдональда порядка I/4. Функция $u(z)$ имеет следующую асимптотику

$$u(z) \approx 2^{-3/4} z^{-1/2} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad z \to \infty$$

$$u(z) \approx -i\, 2^{-1/4} z^{-1/2} e^{\frac{z^2}{2}} \qquad z \to -\infty \qquad (п.7)$$

(Нетрудно убедиться, что не существует решений однородного уравнения, исчезающих одновременно при $z \to \pm\infty$).

Используя $u(z)$, можно получить решение неоднородного уравнения (п.5), затухающее при $z \to \pm\infty$. Как легко проверить, оно имеет вид

$$T'(z)=\eta\left[u(z)\int_{-\infty}^{z}u(-y)f'(\eta y)dy+u(-z)\int_{z}^{\infty}u(y)f'(\eta y)dy\right]. \qquad (п.8)$$

Используя (п.7), получаем с точностью до членов высшего порядка по $\frac{\eta}{v_T}$ (v_T - тепловая скорость)

$$T(z)\approx\eta z^{-2}f'(\eta z),\ (|z|\gg 1). \qquad (п.9)$$

Подставляя (п.9) в (п.3) и ограничиваясь значениями $\eta\ll u\ll v_T^2c^{-1}$, получаем (24).

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. A.J. Wong, N. D'Angelo, R.W. Motley. Phys. Rev. Lett. 9, 415, 1962; Phys. Rev. 133, 436A, 1964.

2. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, I6, 574, I946; J. Phys. I0, 25, I946.

3. W.E. Drummond. Rev. Sci. Instr., 34, 779, 1963.

4. M. Feix. Phys. Lett., 9, 123, 1964.

5. R.W. Gould. Phys. Rev. 136, 991A, 1964.

6. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез I,82, I96I.

7. W.E. Drummond, D. Pines. Nucl. Fusion Suppl., part 3, 1049, 1962

8. В.И.Карпман. Материалы Симпозиума по проблеме многих тел. г.Новосибирск, I965.

9. Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман, ЖЭТФ, 49, 5I5, I965.

I0. W.E. Drummond. Phys. Fluids, 7, 816, 1964.

Ответственный за выпуск Карпман В.И.
Тираж 200

Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной физики
Сибирского отделения Академии Наук СССР