

М 13

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

В.В.Мазепус, Б.В.Чириков

**Когерентная неустойчивость пучка
в камере с непроводящими стенками**



НОВОСИБИРСК 1965

Beam coherent instability inside a chamber
with nonconducting walls

Instability due to particle coherent scattering in the magnetic field induced by the beam in walls of accelerator's chamber is investigated in linear approximation. The case of two parallel thick enough walls separated by the distance $2b$ and made of laminated iron is considered. Effective coefficients for laminated iron are introduced as follows

$$\mu = \frac{\delta + \mu_0 \Delta_0}{\delta + d} + i \frac{\mu_0 \Delta_0}{\delta + d}; \quad \varepsilon = \frac{\delta + d}{\delta} \quad (1)$$

Here $\Delta_0 = c(2\pi\omega\sigma\mu_0)^{-1/2}$ stands for skindepth in iron, μ_0, σ are magnetic coefficient and conductivity of iron itself, d - thickness of iron sheet, δ - separation between sheets.

Without any damping the increment of instability is equal to

$$\text{Im} \omega = \Omega_0 \frac{2\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} |\mu|^{\pm 1} \cdot \ln |\mu|^{\mp 1}; \quad \Omega_0 = \frac{e^2 N_1 \beta^2}{2\gamma m \omega_0 b^2}; \quad \varphi = \frac{J_m \mu}{Re \mu} \quad (2)$$

where Ω_0 is betatron frequency (ω_0) shift due to so-called mirror current; N_1 stands for linear beam density; $v = \beta c$ - particle velocity; $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$; upper signs are for $|\mu| \ll 1$ and lower - for $|\mu| \gg 1$. Wall thickness D should be $\gg b$, otherwise the estimation becomes as follows

$$\text{Im} \omega \sim \Omega_0 \varphi \left(|\mu| \frac{D}{b} \right)^{\pm 1} \quad (3)$$

Necessary condition of stabilisation due to Landau's damping has a form

$$\Delta(kv - \omega_0) \geq \Omega_n \times \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{\gamma a}{b}\right)^2; \quad \mu \geq 1 \\ 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2; \quad |\mu| \ll 1 \end{array} \right\}; \quad \Omega_n = \frac{e^2 N_1}{\gamma^3 m \omega_0 a^2} \quad (4)$$

Here a stands for beam radius, Δ denotes dispersion from velocity (Δv) or due to nonlinearity ($\Delta \omega_0$); ω, k are frequency and wave number of beam perturbation; Ω_n stands for betatron frequency shift due to beam space-charge.

The main condition of validity has a form

$$\frac{\omega b}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \ll 1 \quad (5)$$

В работах /1,2/ теоретически исследована так называемая когерентная неустойчивость циркулирующего пучка частиц в ускорителе. Эта неустойчивость возникает под действием токов, наведенных пучком в стенках камеры ускорителя (так называемые отраженные токи). При наличии потерь в стенках, фаза отраженных токов оказывается сдвинутой по отношению к фазе колебаний пучка, что и приводит к неустойчивости, т.е. к раскачке когерентных поперечных колебаний за счет продольной энергии частиц. Иными словами, происходит рассеяние пучка магнитном поле отраженных токов. Насколько нам известно, во всех работах по когерентной неустойчивости рассматривались стенки с высокой проводимостью, когда толщина скинслоя много меньше характерных размеров задачи. При этом для нахождения полей пучка в камере решались уравнения Максвелла с использованием граничных условий Леонтовича. Между тем представляет интерес рассмотреть обратный предельный случай, когда скинэффект практически отсутствует, т.е. магнитное поле пучка может свободно проникать в стенки камеры. Это может быть, например, в том случае, когда стенками камеры служат полюса магнита ускорителя, изготовленные из шихтованного железа. В настоящей работе произведены оценки инкремента нарастания и условий стабилизации когерентной неустойчивости для подобного ускорителя.

§ I. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛЕЙ ПУЧКА

Вначале рассмотрим случай бесконечно толстых и широких стенок с зазором $2b$ между ними (рис.1). Свойства материала стенок будем характеризовать некоторым эффективным μ вообще говоря, комплексным, мнимая часть которого описывает потери в стенках. Связь этого μ с реальными параметрами шихтованного железа будет установлена в § 2.

Для решения задачи воспользуемся методом отраженных токов. Предположим, что искомое поле между стенками создается бесконечным набором токов, J_n , текущих в вакууме, а поле внутри стенок генерируется наборами токов J'_n для верхнего полупространства и J''_n для нижнего, причем токи J'_n и J''_n текут соответственно в нижнем и верхнем полупространствах. Используя равенство тангенциальных компонент магнитного поля H на поверхностях стенок, а также тот факт, что отношение нормальных компонент равно μ , получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \frac{b - z_n}{(b - z_n)^2 + y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} J'_{-n} \frac{b + z'_n}{(b + z'_n)^2 + y^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n}{(b - z_n)^2 + y^2} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J'_{-n}}{(b + z'_n)^2 + y^2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n \frac{b + z_n}{(b + z_n)^2 + y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} J'_n \frac{b - z'_n}{(b - z'_n)^2 + y^2} \quad (I.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n}{(b + z_n)^2 + y^2} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J'_n}{(b - z'_n)^2 + y^2}$$

где z_n и z'_n - координаты соответственно J_n и J'_n . Уравнения (I.1) удовлетворяются, если

$$z'_n = -z_{-n}; \quad z'_{-n} = -z_n \quad (I.2)$$

$$2b + z_n = -z_{-n+1}; \quad z_{-n} = 2b - z_{n+1} \quad (I.3)$$

$$J_{-n} - J'_{-n} = J_{n+1}; \quad J_{-n} - \mu J'_{-n} + J_{n+1} = 0 \quad (I.4)$$

$$J_n - \mu J'_n + J_{-n+1} = 0; \quad J_n - J'_n = J_{-n+1} \quad (I.5)$$

Из (I.3) получаем, исключая z_{-n} и z_{-n+1} :

$$z_{n+2} - z_n = 4b$$

Это неоднородное конечноразностное уравнение 2-го порядка. Обычным методом находим его общее решение

$$z_n = 2bn + C_1 + C_2(-1)^n; \quad z_{-n} = -2bn - C_1 + C_2(-1)^n$$

Принимая во внимание граничные условия $z_n|_{n \rightarrow 0} = z_{-n}|_{n \rightarrow 0} = \langle z \rangle$, имеем

окончательно ($z < b$):

$$z_n = 2bn + \langle z \rangle \cdot (-1)^n; \quad z_{-n} = -2bn + \langle z \rangle \cdot (-1)^n \quad (I.6)$$

Из (I.4) и (I.5), исключая $J_{-n}, J'_{-n}, J'_n, J_{-n+1}$, находим уравнение $J_{n+2} = \alpha^2 J_n$. Решая его известным методом с условиями $J_n|_{n \rightarrow 0} = J'_{-n}|_{n \rightarrow 0} = J_0$ получаем:

$$J_n = J_{-n} = J_0 \alpha^{|n|}; \quad \alpha = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \quad (I.7)$$

где J_0 - ток пучка. Магнитное поле пучка с учетом стенок дается теперь выражением:

$$H_y = \frac{2J_0}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} \frac{z_n - z}{(z_n - z)^2 + y^2} \quad (I.8)$$

$$H_z = \frac{2J_0}{c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^{|n|} \frac{y}{(z_n - z)^2 + y^2}$$

Выделим из этой суммы член с $n=0$, соответствующий собственному полю тока J_0 вне пучка:

$$H_y^0 = \frac{2J_0}{c} \cdot \frac{\langle z \rangle - z}{(\langle z \rangle - z)^2 + y^2} \quad (I.9)$$

$$H_z^0 = \frac{2J_0}{c} \frac{y}{(\langle z \rangle - z)^2 + y^2}$$

Внутри пучка собственное поле равно:

$$H_y^0 = \frac{2J_0}{ca^2} (\langle z \rangle - z) \quad (I.10)$$

$$H_z^0 = \frac{2J_0}{ca^2} \cdot y$$

где a - радиус пучка, который мы считаем цилиндрическим и однородным. Несимметрия формул (I.10) объясняется тем, что точка $z=0$ соответствует середине между стенками, а $y=0$ оси пучка, в дальнейшем мы заменим $y \rightarrow y - \langle y \rangle$, где $\langle y \rangle, \langle z \rangle$ координаты оси пучка. В случае эллипсоидального сечения пучка с полуосями a, l все формулы остаются справедливыми, если заменить $|a|$: $a^2 \rightarrow a(l+a)/2$ или $a^2 \rightarrow l(l+a)/2$ для z, y соответственно.

Оставшиеся члены в (I.8) группируем парами:

$$\frac{z_n - z}{(z_n - z)^2 + y^2} + \frac{z_{-n} - z}{(z_{-n} - z)^2 + y^2} \approx \frac{z - (-1)^n \langle z \rangle}{2(\nu n)^2} \quad (I.II)$$

$$\frac{1}{(z_n - z)^2 + y^2} + \frac{1}{(z_{-n} - z)^2 + y^2} \approx \frac{1}{2(\nu n)^2}$$

Считая $z, y, \langle z \rangle \ll \nu$, ограничиваемся только линейными членами. Получаем из (I.8, II):

$$H_y = \frac{J_0}{c\nu^2} \left\{ z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^2} - \langle z \rangle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n^2} \right\} \quad (I.I2)$$

$$H_z = \frac{J_0}{c\nu^2} y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^2}$$

Сумму в (I.I2)

$$S(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^2} \quad (I.I3)$$

можно заменить интегралом, дифференцируя её два раза по α :

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\alpha \frac{dS}{d\alpha} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} = \frac{1}{1-\alpha}$$

откуда

$$S(\alpha) = - \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1-x)}{x} dx \quad (I.I4)$$

Сумма (I.I3) может быть приближенно вычислена в следующих предельных случаях:

а) $|\alpha| \ll 1$; $\mu \approx 1$. Непосредственно из (I.I3) имеем:

$$S'(\alpha) \approx \alpha = \frac{\mu-1}{\mu+1} \approx \frac{|\mu|-1}{2} + \frac{i\varphi}{2}; \quad \varphi = \frac{\text{Im}\mu}{\text{Re}\mu} \quad (I.I5)$$

б) $\alpha \approx 1$; $|\mu| \gg 1$. Разбиваем интеграл (I.I4) на две части:

$$S(\alpha) = - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx + \int_{\alpha}^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$$

Первая часть равна сумме [3]:

$$S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (I.I6)$$

во второй производим замену переменных $1-x=y$ и получаем приближенно

$$\int_0^{1-\alpha} \frac{\ln y dy}{1-y} \approx \int_0^{1-\alpha} \ln y dy \approx (1-\alpha) \ln(1-\alpha) \quad (I.I7)$$

Окончательно имеем:

$$S(\alpha) \approx \frac{\pi^2}{6} - \frac{2}{\mu} \ln \mu = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{1-i\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \frac{\ln |\mu|}{|\mu|} \quad (I.I8)$$

Это же приближение можно использовать для нахождения $S(-\alpha)$ при $|\mu| \ll 1$, так что $-\alpha \approx 1-2\mu$. Получаем:

$$S(-\alpha) \approx \frac{\pi^2}{6} - 2\mu \ln \frac{1}{\mu} = \frac{\pi^2}{6} - 2 \frac{1+i\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} |\mu| \ln \frac{1}{|\mu|} \quad (I.I9)$$

в) $\alpha \approx -1$; $|\mu| \ll 1$. В этом случае совершенно аналогично предыдущему имеем:

$$S(\alpha) = - \int_0^{-1} \frac{\ln(1-x)}{x} dx + \int_{\alpha}^{-1} \frac{\ln(1-x)}{x} dx \approx$$

$$\approx -\frac{\pi^2}{12} + (1+\alpha) \ln 2 \approx -\frac{\pi^2}{12} + 2 \frac{1+i\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} |\mu| \ln 2$$

и для $|\mu| \gg 1$:

$$S(-\alpha) \approx -\frac{\pi^2}{12} + \frac{2 \ln 2}{|\mu|} \frac{1-i\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \quad (I.I10)$$

Найдем теперь электрическое поле пучка. Имея в виду дальнейшее приложение к шихтованной стенке можем положить диэлектрическую проницаемость среды $\epsilon_1 = \infty$, так как составляющая \vec{E} , перпендикулярная поверхности и параллельная слоям железа практически не проникает вглубь стенки (см. рис. 2). В этом приближении электрическое поле может быть найдено просто из выражения:

$$\vec{H} = \vec{v} \times \vec{E} \quad (I.I11)$$

где \vec{H} определяется формулами (I.I0, I2) для $\alpha = -1$ ($\mu = 0$).

так как в этом случае граничные условия также удовлетворяют (I.22) ($H_z = E_y = 0$). Имеем:

$$E_y^0 = \frac{c}{v} H_z^0 = \frac{2eN_1}{a^2} y$$

$$E_z^0 = -\frac{c}{v} H_y^0 = \frac{2eN_1}{a^2} (z - \langle z \rangle) \quad (I.23)$$

для собственного поля пучка внутри пучка и

$$E_y = -\frac{eN_1}{\beta^2} \frac{\pi^2}{12} y$$

$$E_z = \frac{eN_1}{\beta^2} \frac{\pi^2}{12} (z + 2\langle z \rangle) \quad (I.24)$$

для поля отраженных зарядов. Здесь $N_1 = J_0/ev$ - число частиц на единицу длины пучка. Результат совпадает с прямым расчетом /5/.

Выпишем теперь окончательные выражения для силы, действующей на частицу с координатами y, z за счет полей пучка (с учетом стенок), ось которого определяется координатами $\langle y \rangle, \langle z \rangle$. Силу представим в форме:

$$F_y = -\gamma m (\Omega_{ky}^2 \langle y \rangle + \Omega_{ny}^2 y)$$

$$F_z = -\gamma m (\Omega_{kz}^2 \langle z \rangle + \Omega_{nz}^2 z) \quad (I.25)$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ - релятивистский фактор частицы, а m - её масса; $\beta = v/c$. Для частот Ω получим следующие выражения:

$$\Omega_{ky}^2 = -\Omega_{ny}^2 = \frac{2e^2 N_1}{\gamma^3 m a^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma a}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{12} + \beta^2 S(\alpha) \right) \right]$$

$$\Omega_{kz}^2 = \frac{2e^2 N_1}{\gamma^3 m a^2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma a}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{6} - \beta^2 S(-\alpha) \right) \right] \quad (I.26)$$

$$\Omega_{nz}^2 = -\frac{2e^2 N_1}{\gamma^3 m a^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma a}{b} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{12} + \beta^2 S(\alpha) \right) \right]$$

Сформулируем некоторые условия применимости полученных выражений.

Основное допущение - квазистационарное приближение, т.е. пренебрежение запаздыванием электромагнитного поля. Оценим прежде всего глубину проникновения поля в стенку. Для компоненты H_y имеем внутри стенки:

$$H_y = \frac{2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} y' \frac{z_n - z}{(z_n - z)^2 + y^2} \approx \frac{4J_0}{c(\mu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} d^n \frac{z_n - z}{(z_n - z)^2 + y^2}$$

$$\approx -\frac{2J_0}{cb(\mu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ d^n \frac{n + z/2b}{(n + z/2b)^2 + (y/2b)^2} + \frac{(-d)^n \langle z \rangle}{2b} \cdot \frac{(n + z/2b)^2 - (y/2b)^2}{[(n + z/2b)^2 + (y/2b)^2]^2} \right\} \quad (I.27)$$

предполагая, как и везде в этой работе, что $\langle z \rangle \ll b$. Из последнего выражения видно, что часть поля, зависящая от когерентного смещения пучка $\langle z \rangle$, которая только и существенна для рассматриваемой задачи, убывает $\sim b^2/y^2 + z^2$. Следовательно глубина проникновения $\sim b$, независимо от d . Отметим, что стационарное поле проникает значительно глубже, $\sim b/(1-d) \sim \mu b$.

Условие квазистационарности состоит в пренебрежении запаздыванием внутри камеры:

$$\frac{\omega b}{c} \ll 1 \quad (I.28)$$

и внутри стенки

$$\frac{\omega b}{c} \sqrt{\mu \epsilon} \ll 1 \quad (I.29)$$

где ϵ - диэлектрическая проницаемость стенки, отличная от ϵ_{\perp} , поскольку она относится к направлению, перпендикулярному листам железа (см. § 2).

Кроме того, мы предполагали, что когерентное смещение пучка не

зависит от координаты вдоль пучка X , поэтому должно выполняться неравенство:

$$kv = \frac{\omega v}{u} \ll 1 \quad (I.30)$$

где ω, k - частота и волновой вектор возмущения пучка. Далее мы пренебрегли поперечными составляющими тока пучка, что справедливо при условии:

$$\frac{\omega v}{v} \ll 1 \quad (I.31)$$

Наиболее жестким оказывается обычно условие (I.29), которое можно переписать более аккуратно в форме:

$$\frac{\lambda}{b} \gg |\sqrt{\mu \epsilon}|; \quad \lambda = c/\omega \quad (I.32)$$

В обратном предельном случае:

$$\frac{\lambda}{b} \ll \gamma_{im} \sqrt{\epsilon \mu} \quad (I.33)$$

когда не только длина волны в стенке, но и длина затухания волны много меньше характерного размера задачи b , можно применять граничные условия Леонтовича в форме:

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (I.34)$$

Необходимость столь сильного требования (I.33) связана с тем, что для применимости граничных условий Леонтовича нужно чтобы поле в стенке имело волновой, а не квазистационарный характер. Промежуточный случай:

$$\gamma_{im} \sqrt{\mu \epsilon} \ll \frac{\lambda}{b} \ll |\sqrt{\mu \epsilon}| \quad (I.35)$$

требует специального рассмотрения.

Наконец, мы считали стенки бесконечно толстыми и широкими; для применимости полученных формул необходимо, чтобы толщина стенки была бы много больше области, занятой магнитным полем:

$$D \gg b$$

(I.36)

то же самое можно сказать и о ширине.

§ 2. СТЕНКИ ИЗ ШИХТОВАННОГО ЖЕЛЕЗА

Найдем связь эффективных значений μ, ϵ , использованных в § I, с характеристиками материала стенок. Структура шихтованной стенки показана на рис.2. Предположим, что ток течет вдоль оси X , т.е. перпендикулярно к листам железа. Тогда магнитное поле лежит целиком в плоскости листов. Предположим далее, что толщина листа $d \ll b$, а толщина скинслоя в железе $\Delta \ll d$. Эти предположения обычно хорошо выполняются. Тогда мы можем определить эффективное μ посредством:

$$\langle B \rangle = \frac{H\delta + \Phi}{\delta + d} = \mu H \quad (2.1)$$

где H - магнитное поле в зазоре между листами железа, а Φ магнитный поток, проходящий внутри железного листа. Так как $\Delta \ll d$, то при вычислении Φ можно считать, что толщина железной пластины бесконечно велика. Если, кроме того, пренебречь гистерезисом и нелинейностью в железе, то /4/:

$$\Phi = 2\mu_0 H \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\Delta}(1-i)} dx = \frac{2\mu_0 H \Delta}{1-i} \quad (2.2)$$

Откуда μ равно:

$$\mu = \frac{\delta + \mu_0 \Delta}{\delta + d} + i \frac{\mu_0 \Delta}{\delta + d} \quad (2.3)$$

где

$$\Delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma\mu_0}} \quad (2.4)$$

- толщина скинслоя в железе; μ_0, σ - магнитная проницаемость и электрическая проводимость железа, соответственно.

Диэлектрические свойства шихтованной стенки характеризуются двумя постоянными ввиду анизотропии. То же относится, конечно, и к маг-

нитным свойствам, однако, мы пренебрегаем составляющей \vec{H} , параллельной пучку, что допустимо при условии (1.31) и поэтому остается лишь одно μ (2.3). В направлении параллельном пучку (и перпендикулярном листам железа) имеем, очевидно:

$$\varepsilon = \frac{\delta + d}{\delta} \quad (2.5)$$

В направлении перпендикулярном пучку (и параллельном листам) можно принять

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{8\pi i \sigma}{\omega} \gg 1 \quad (2.6)$$

как для сплошного металла. Действительно, некоторое отклонение связано только с проникновением электрического поля в зазор между листами на глубину $\sim (\delta + 2\Delta) \ll b$, что несущественно.

Оценим величину μ при следующих типичных параметрах: $\mu_0 \sim 10^3$; $\omega \sim 10^9$ сек⁻¹; $\delta \sim d \sim 1/30$ см. Получаем $\mu \sim 2(1+i)$; $\varepsilon \sim 2$; условие применимости (1.29): $b \ll 8$ см.

§ 3. ИНКРИМЕНТ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ

Уравнение движения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + (\omega_0^2 + \Omega_{ny}^2) y &= -\Omega_{ky}^2 \langle y \rangle \\ \ddot{z} + (\omega_0^2 + \Omega_{kz}^2) z &= -\Omega_{kz}^2 \langle z \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

где ω_0 - частота бетатронных колебаний в ведущем поле ускорителя, а частоты Ω представляют влияние полей пучка с учетом стенок и вычислены в § I (1.26). Полагая $\langle z \rangle \sim e^{i(kx - \omega t)}$, найдем из (3.1)

$$z = \frac{\Omega_{kz}^2 \langle z \rangle}{(k v - \omega)^2 - \omega_0^2 - \Omega_{kz}^2} \quad (3.2)$$

где $(\omega - kv)$ - эффективная частота внешнего поля, действующего на дви-

жущуюся частицу ($\sim e^{i(\kappa v - \omega)t}$). Учтем разброс скоростей частиц в пучке (v) с помощью функции распределения $f(v)$. Поскольку

$$\langle z \rangle = \int z f(v) dv = \langle z \rangle \int \frac{\Omega_{\kappa z}^2 f dv}{(\omega - \kappa v)^2 - \omega_0^2 - \Omega_{\kappa z}^2}$$

получаем дисперсионное уравнение:

$$\Omega_{\kappa z}^2 \int \frac{f dv}{(\omega - \kappa v)^2 - \omega_0^2 - \Omega_{\kappa z}^2} = 1 \quad (3.3)$$

Для решения этого уравнения пренебрежем вначале разбросом скоростей, считая $f(v) \sim \delta(v - v_0)$, тогда из (3.3) находим:

$$\begin{aligned} \omega &= \kappa v_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_{\kappa z}^2 + \Omega_{\kappa z}^2} \approx \\ &\approx \kappa v_0 \pm \omega_0 \pm \frac{\Omega_{\kappa z}^2 + \Omega_{\kappa z}^2}{2\omega_0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Последнее приближение связано с тем, что мы считаем собственные поля пучка достаточно малыми ($\Omega \ll \omega_0$). Наличие мнимости в частотах Ω , а, следовательно, и в (3.4) приводит к неустойчивости медленной волны ($\omega \approx \kappa v_0 - \omega_0$) инкремент неустойчивости равен:

$$\text{Im } \omega = \frac{e^2 N_1 \beta^2}{\gamma_m \omega_0 v^2} \times \begin{cases} \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \cdot \frac{\ln |M|}{|M|} ; & |M| \gg 1 \\ \frac{\varphi}{2} ; & \mu \approx 1 \\ \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \cdot |M| \ln \frac{1}{|M|} ; & |M| \ll 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Для сравнения укажем, что в случае хорошо проводящих стенок, инкремент есть /8/:

$$\text{Im } \omega = \frac{e^2 N_1 \beta^2}{\gamma_m \omega_0 v^2} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{\mu_0 \Delta}{v} \quad (3.6)$$

где μ_0 - магнитная проницаемость материала стенки, а Δ - толщина скинслоя. Из сравнения (3.5,6) видно, что для шихтованной стенки ин-

критерий неустойчивости существенно возрастает. Это связано с проникновением магнитного поля между листами железа и резким увеличением площади потерь на токи Фуко. Подставляя в (3.5) выражение для μ, φ из (2.3), получим для случая $|\mu| \ll 1$:

$$J_{\text{ин}} \omega = \frac{e^2 N_1 \beta^2}{\gamma_{\text{н}} \omega_0 v^2} \cdot \frac{\mu_0 \Delta}{\delta + d} \cdot \ln \frac{1}{|\mu|} \quad (3.7)$$

что хорошо согласуется с (3.5), если учесть увеличение площади потерь на токи Фуко в $\sim v/(\delta+d)$ раз за счет проникновения магнитного поля между листами железа на глубину $\sim v$ (§ I). Появление дополнительного множителя $\ln 1/|\mu|$ также понятно и связано с относительно медленным спаданием поля внутри стенки $H \sim (v/\rho)^2$; $\rho^2 = y^2 + z^2$, откуда эффективная площадь потерь на единицу длины пучка равна:

$$S \sim \frac{v^2}{\delta+d} \int \frac{\rho d\rho}{\rho^2} \sim \frac{v^2}{\delta+d} \ln \frac{\rho_{\text{max}}}{v} \quad (3.8)$$

Значение ρ_{max}/v определяется уменьшением множителя d^2 в (I.27) и равно: $\rho_{\text{max}}/v \sim 1/|\mu|$.

Случай $|\mu| \gg 1$ полностью аналогичен; сравнивая с (3.6), следует иметь в виду, что это соотношение справедливо при условии $(\mu_0 \Delta/v) \ll 1$, в обратном предельном случае следует произвести в (3.6) замену $(\mu_0 \Delta/v) \rightarrow (\mu_0 \Delta/v)^{-1}$.

Сравнение (3.6,7) дает возможность произвести оценку инкритмента для тонкой крышки, когда условие (I.36) не выполняется. В этом случае можно считать, что потери, а вместе с ними и инкритмент, уменьшаются в D/v раз и, кроме того, исчезает логарифм:

$$J_{\text{ин}} \omega \sim \frac{e^2 N_1 \beta^2}{\gamma_{\text{н}} \omega_0 v^2} \left(\frac{\mu_0 \Delta \cdot D}{\delta+d \cdot v} \right)^{7/1}; \quad |\mu| \gg 1 \quad (3.9)$$

При $D \sim \delta+d$ получаем (3.6).

Как известно, рассматриваемая неустойчивость может быть стабилизирована с помощью так называемого затухания Ландау /1/. Затухание возникает в результате резонансного взаимодействия частиц с возмущением. Резонанс соответствует обращению в нуль знаменателя в (3.3). Поэтому грубое условие стабилизации состоит в том, чтобы резонансных частиц было много, т.е. чтобы равенство

$$\omega - kv + \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_{kz}^2} = 0 \quad (3.10)$$

выполнялось в основной части функции распределения /1/. (знак в (3.10) соответствует медленной волне). Подставляя выражение для из (3.4) в (3.10), приходим к неравенству:

$$k(\Delta v) \gtrsim \frac{\Omega_{kz}^2}{2\omega_0} \quad (3.11)$$

где Δv - ширина функции распределения по скоростям. К такому же эффекту приводит и разброс частот бетатронных колебаний за счет их нелинейности. Используя выражение (1.26), можем записать условие стабилизации в виде:

$$\Delta(kv - \omega_0) \gtrsim \frac{e^2 N_1}{\gamma^3 m \omega_0 a^2} \times \begin{cases} 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \gamma a}{2\beta} \right)^2 (2 + \beta^2); & |\mu| \gg 1 \\ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi \gamma a}{2\beta} \right)^2; & \mu \approx 1 \\ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi a}{2\beta} \right)^2; & |\mu| \ll 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Необходимый разброс частот определяется, в основном, сдвигом частот бетатронных колебаний за счет собственного поля пучка:

$$\Omega_0 = \frac{e^2 N_1}{2m\gamma^3 \omega_0 a^2} \quad (3.13)$$

Влияние стенок может быть существенно в ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg \beta/a$) если $|\mu|$ не очень мало. Для хорошо проводящих стенок условие стабилизации соответствует $|\mu| \ll 1$ (3.12) /8/.

Условие (3.12) не является, вообще говоря, ни необходимым, ни достаточным. При очень малом инкременте неустойчивости, например, в случае хорошо проводящих стенок стабилизации может иметь место и при меньшем разбросе частот (на "хвосте" функции распределения). Наоборот, при большом инкременте (шихтованная стенка $\mu \sim 1$) условие (3.12) может оказаться недостаточным для стабилизации. Обычное решение вопроса в приближении невозмущенной функции распределения /1,2/ может оказаться неудовлетворительным, как это показано в /6,7/. Вследствие

искажения функции распределения затухания Ландау уменьшается. Этот вопрос требует специального исследования.

До сих пор мы рассматривали Z -колебания пучка. Что касается y -колебаний, то поскольку $\Omega_{ky}^2 + \Omega_{kz}^2 = 0$ (1.26), то в приближении (3.4) $\omega = kv_0 \pm \omega_0$ и не зависит от стенок, следовательно неустойчивости не возникает.

Нам приятно поблагодарить Г.И.Будкера, А.Н.Скринского и И.А.Шехтмана за полезные обсуждения.

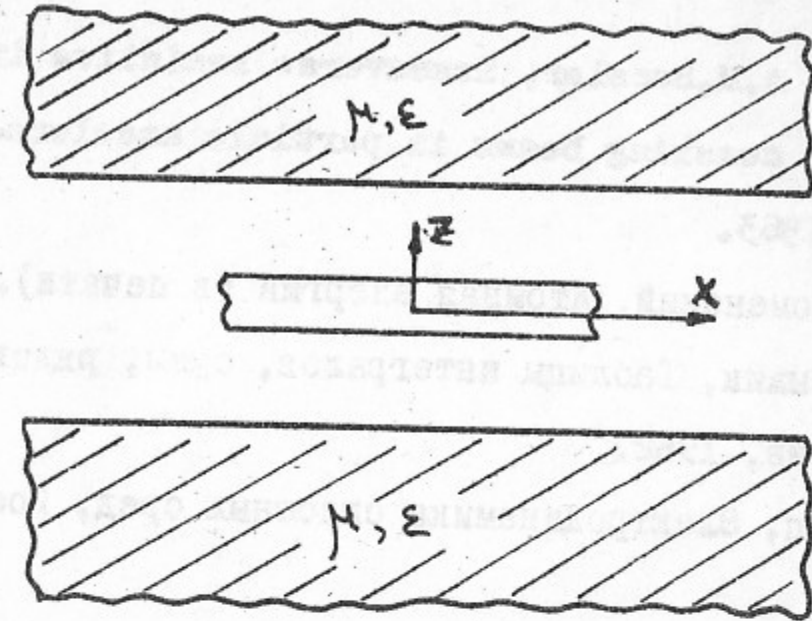


Рис.1 Геометрия задачи: пучок цилиндрический, радиуса a (или эллипсоидальный с полуосями a, b) между бесконечно толстыми и широкими параллельными стенками.

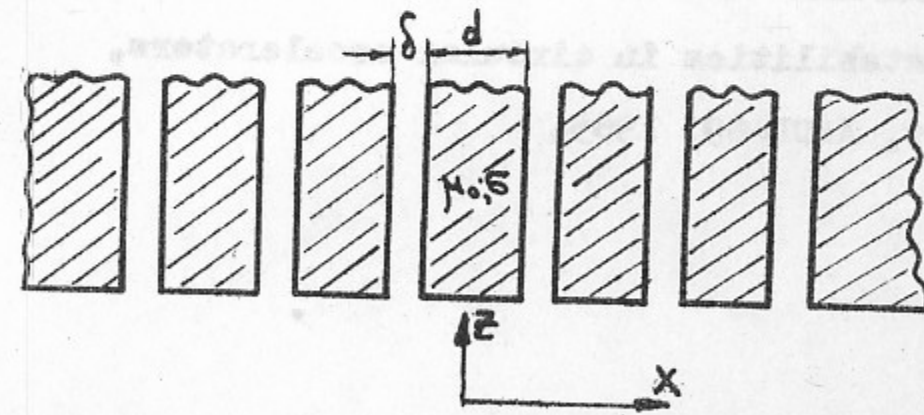


Рис. 2 Структура шихтованной стенки: d - толщина листа, δ - зазор между листами.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.J.Laslett, V.K.Neil, A.M.Sessler, *Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators*, UCRL - 11090, 1963.
2. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский, *Атомная энергия* (в печати).
3. И.С.Грандштейн, И.М.Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, 1962.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, 1957.
5. L.J.Laslett, *On intensity limitations imposed by transverse space-charge effects in circular particle accelerators*, UCRL, 1963.
6. А.А.Веденев, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, *Nuclear Fusion*, I, 82, 1961.
7. В.Е.Захаров, В.И.Кариман, *ЖЭТФ*, 43, 490, 1962.
8. А.М. Sessler , частное сообщение.
9. E.D.Courant, *Beam instabilities in circular accelerators*, Brookhaven Lab Report, AADD-69, 1965.

Ответственный за выпуск Глаголев Г.Б., тираж 250 экз.

Отпечатано на ротапинтере в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. L.J.Laslett, V.K.Neil, A.M.Sessler, *Transverse resistive instabilities of intense coasting beams in particle accelerators*, UCRL - 11090, 1963.
2. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский, *Атомная энергия* (в печати).
3. И.С.Грандштейн, И.М.Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, 1962.
4. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, 1957.
5. L.J.Laslett, *On intensity limitations imposed by transverse space-charge effects in circular particle accelerators*, UCRL, 1963.
6. А.А.Веденев, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, *Nuclear Fusion*, I, 82, 1961.
7. В.Е.Захаров, В.И.Кариман, *ЖЭТФ*, 43, 490, 1962.
8. А.М. Sessler , частное сообщение.
9. E.D.Courant, *Beam instabilities in circular accelerators*, Brookhaven Lab Report, AADD-69, 1965.

Ответственный за выпуск Глаголев Г.Б., тираж 250 экз.

Отпечатано на ротапринтере в Институте ядерной физики Сибирского отделения Академии наук СССР