ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

В.Н.Ораевский

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ

г.Новосибирск

1965

А н н о т а ц и я

Получена замкнутая система гидродинамических уравнений для ионов и электронов, описывающая движения разреженной плазмы. Учтены слабые столкновения. Для движений поперек сильного магнитного поля схема является фактически расширением модели Чу -Гольдбергера, - Лоу /1/. Учет продольных движений возможен, когда $\frac{v_T t_0}{L}$ - малый параметр (v_T - тепловая скорость, t_0 - характерное время, L - характерный масштаб изменения макровеличин вдоль магнитного поля). Система уравнений получена методом, являющимся небольшим взаимодействием метода Г.Грэда /9 /. Отличие состоит в том, что в разреженной плазме энергия не успевает перераспределиться между степенями свободы. В связи с этим наряду с вектором полного теплового потока $\vec{S}$ необходимо ввести новый вектор $\vec{S}''$ (определяемый (27)), характеризующий, фактически, поток параллельной магнитному полю температуры. Поэтому рассматриваемое приближение есть шестнадцатимоментное.

§ I. Введение.

Как известно, наиболее полно плазма описывается системой уравнений, состоящих из кинетических уравнений для частиц и уравнений Максвелла для электрического и магнитного полей. При изучении различных процессов в плазме с помощью указанной системы уравнений возникают большие трудности. Поэтому, часто, стараются заменить исходную систему уравнений более простой с тем, чтобы найти приближенное решение точных уравнений с помощью приближенных уравнений. Одним из подобного рода методов является метод исследования уравнений некоторого конечного числа моментов функции распределения. Уравнения для моментов функции распределения, обычно, называют гидродинамическими уравнениями. Несмотря на то, что в разреженной плазме велики длины свободного пробега частиц, а характерные времена малы в сравнении с временем между соударениями, широкий класс движений может быть описан системой гидродинамических уравнений.

Пусть мы интересуемся движениями плазмы поперек сильного постоянного магнитного поля H_0 ($\frac{H_0^2}{8\pi} >> p$, где p давление плазмы). Тогда, как известно (/1/, /2/), можно (при полном неучете столкновений) ограничится гидродинамическим описанием при $\frac{r_H}{R} << 1$ $\frac{\tau_H}{t_0}$ (где r_H - средний ларморовский радиус частиц, τ_H -среднее время обращения частицы по ларморовской окружности; R и t_0 - характерные пространственный и временной масштабы задачи). В гидродинамических уравнениях, полученных в /1/, /2/, помимо столкновений не учитывались "вязкие" компоненты тензора напряжений, а также эффекты, связанные с тепловыми потоками. Между тем в целом ряде задач устойчивости, а также в задачах по исследованию нелинейных движений в плазме, возникает необходимость учитывать диссипативные эффекты,

связанные со столкновениями (хотя и редкими), и "дисперсионные" эффекты, связанные с учетом высших членов в разложении по параметрам $\frac{r_H}{R}$ и $\frac{\tau_H}{t_0}$ (см. например /3/ - /7/). (В работе /8/ в рамках гидродинамического описания учтены члены первого порядка по параметрам малости).

В § 2 настоящей работы получена замкнутая система гидродинамического типа уравнений, описывающая, в частности, движения ионов и электронов поперек сильного магнитного поля. Наряду с обычными уравнениями для плотности n скорости $\vec{V}$, получены уравнения для полного тензора напряжений и векторов тепловых потоков (см.ниже). В уравнениях для моментов учтены "редкие" столкновения (малый параметр $\frac{t_0}{\tau}$, τ - время между столкновениями). Система уравнений получена методом, являющимся небольшим видоизменением метода Грэда (/9/, [redacted])[x]. Применение такого метода позволило простым способом одновременно учесть в уравнениях как "дисперсионные", так и диссипативные эффекты. С помощью уравнений для вторых и третьих моментов получены выражения для тензора "вязких" напряжений и векторов тепловых потоков для движений, у которых временная зависимость гидродинамических величин может быть выбрана в виде $e^{i\omega t}$. При этом вязкие члены, связанные со столкновениями, например, имеют коэффициент $\eta_0 \sim \frac{p}{\omega^2 \tau}$. (В обычной гидродинамике для движений замагниченной плазмы поперек магнитного поля существует коэффициент "вязкости" $\eta_0 \sim p\tau$, соответствующий член не имеет предельного перехода к бесстолкновительному случаю (см.например /   / и /   /)).

Полученная в § 2 система уравнений, наряду с движениями поперек магнитного поля, учитывает также движения вдоль магнитного поля.

[x] Метод Грэда использовался в /10/ для гидродинамических уравнений в "плотной" замагниченной плазме. (см. также [11])

Для применимости уравнений, в этом случае необходимо также выполнение неравенства $\alpha = \frac{v_T t_0}{L}$ (v_T - тепловая скорость частиц, L - характерный размер задачи в направлении, параллельном магнитному полю)[x)]. Малость параметра α означает в частности малость об"емных сил, связанных с тепловым движением частиц в сравнении с силами электромагнитными. Поэтому в нулевом по α приближении уравнение для гидродинамической скорости есть ни что иное, как умноженное на плотность частиц уравнение движения для отдельной частицы под действием электромагнитных сил.

§ 2. Шестнадцатимоментное (16 м) приближение для описания движений разреженной замагниченной плазмы.

Прежде чем перейти к получению системы уравнений сделаем несколько замечаний относительно свойств вторых и третьих моментов функции распределения частиц, для плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле H_0. Рассмотрим вначале тензор напряжений

$$P_{\alpha\beta} \equiv \int v_\alpha v_\beta f \, d\vec{v} \; ; \qquad (2.1)$$

Здесь f - функция распределения, v - хаотическая скорость частицы. Когда нет внешних полей, как хорошо известно, существует лишь один скаляр, который можно образовать из $P_{\alpha\beta}$, а именно

$$P_{\alpha\beta}\,\delta_{\beta\alpha} \equiv Sp\, P_{\alpha\beta} \; ; \qquad (2.2)$$

x) Уравнения § 2 справедливы и для плазмы без магнитного поля при условии малости α , где под L - следует понимать характерный масштаб задачи. (см также [15-17])

При наличии магнитного поля помимо (2.2) можно образовать еще один скаляр

$$p_{\parallel} \equiv P_{\alpha\beta}\, h_\beta h_\alpha = \int (v \cdot h)^2 f \, dv \; ; \qquad (2.3)$$

где h - орт вдоль H_0 ; $p_{\parallel}$ - есть давление в направлении магнитного поля. Перепишем (2.2) в виде

$$Sp\, P_{\alpha\beta} \equiv 2p_\perp + p_\parallel \; ; \qquad (2.4)$$

(2.4) с учетом (2.3) служит определением $p_\perp$ - давления в направлении, перпендикулярном магнитному полю. С помощью (2.3) и (2.4) второй момент функции распределения $P_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$P_{\alpha\beta} = p_\perp \delta_{\alpha\beta} + (p_\parallel - p_\perp) h_\alpha h_\beta + \pi_{\alpha\beta} \; ; \qquad (2.5)$$

Под $\pi_{\alpha\beta}$ будем понимать тензор вязких напряжений. В рассматриваемом формализме $\pi_{\alpha\beta}$ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} \pi_{\alpha\beta}\, h_\beta h_\alpha = 0; \\ Sp\, \pi_{\alpha\beta} = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Это означает, в частности, что продольная вязкость (обычно включаемая в π_{zz}) включена в $p_\parallel$. Аналогичное замечание можно сделать относительно $p_\perp$. (См.Приложение II, где с помощью рассматриваемого формализма найден тензор напряжений $P_{\alpha\beta}$ для случая, когда выполняются газодинамические критерии применимости уравнений для моментов функции распределения).

Для третьих моментов функции распределения $S_{\alpha\beta\gamma}$ можно записать соотношения, подобные (2.3) и (2.4)

$$S''_{\alpha} \equiv S_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma} h_{\beta} ; \qquad (2.7)$$

$$S_{\alpha} \equiv S_{\alpha\beta\gamma} \delta_{\gamma\beta} ; \qquad (2.8)$$

Точно так же, как в (2.5) $P_{\alpha\beta}$ представлен в виде суммы 2 частей (одной, связанной со скалярами $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$, другой с $\pi_{\alpha\beta}$), представим $S_{\alpha\beta\gamma}$ в виде суммы 2 частей:

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta\gamma} = \Big\{ & \tfrac{1}{4}\left(S_{\alpha}\delta_{\beta\gamma} + S_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} + S_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) - \tfrac{1}{4}\left(S_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma} + S_{\beta}h_{\alpha}h_{\gamma} + S_{\gamma}h_{\alpha}h_{\beta}\right) + \tfrac{1}{4}(S\cdot h)\left(h_{\alpha}\delta_{\beta\gamma} + h_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} + h_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) - \\ & - \tfrac{3}{4}(S\cdot h)h_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma} - \\ & - \tfrac{1}{4}\left(S''_{\alpha}\delta_{\beta\gamma} + S''_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} + S''_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + \tfrac{5}{4}\left(S''_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma} + S''_{\beta}h_{\alpha}h_{\gamma} + S''_{\gamma}h_{\alpha}h_{\beta}\right) - \tfrac{1}{4}(S''\cdot h)\left(h_{\alpha}\delta_{\beta\gamma} + h_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} + h_{\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) - \tfrac{5}{4}(S''\cdot h)h_{\alpha}h_{\beta}h_{\gamma} \Big\} + \\ & + s_{\alpha\beta\gamma} ; \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Из (2.9) видно, что $s_{\alpha\beta\gamma}$ обладает свойствами:

$$s_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\gamma\beta} = 0 ; \qquad (2.10)$$

$$s_{\alpha\beta\gamma} h_{\gamma} h_{\beta} = 0 ; \qquad (2.11)$$

Отметим также, что если $s_{\alpha\beta\gamma} = 0$, то выражение $S_{\alpha\beta\gamma}$ через S_{α} и S''_{α} с помощью (2.9) является единственным.

Если для „плотной" плазмы ($t_0 \gg \tau$) за характерные времена процессов энергия успевает перераспределятся между степенями свободы и отклонение $p_{\parallel}$ от $p_{\perp}$ связано, фактически, с эффектами вязкости (см.Приложение П), то для разреженной плазмы ($t_0 \ll \tau$) это не так. В случае $t_0 \ll \tau$, перераспределения энергии между степенями свободы за характерное время процесса почти не происходит (в соответствии с этим показатель адиабаты для поперечных движений $\gamma = 2$, а для продольных $\gamma = 3$), поэтому $p_{\parallel}$ и $p_{\perp}$ могут разниться существенно. Отсюда возникает необходимость введения, наряду с S_{α}, нового вектора S''_{α}, грубо говоря, учитывающего поток продольной тепловой энергии. Приближение, в котором в (2.9) полагаем

$$s_{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad (2.12)$$

есть, следовательно, шестнадцатимоментное (16 м) приближение (в отличие от тринадцатимоментного приближения Грэда /9/, / /).

Здесь получим замкнутую систему уравнений 2-х жидкостной гидродинамики в (16 м) приближении (2 жидкости, как обычно, ионная и электронная). Затем в § 3 укажем критерии применимости уравнений.

Запишем кинетическое уравнение для j - сорта частиц (j пробегает значения i, e ; индекс i относится к ионам, e - к электронам)

$$\frac{d_j f_j}{dt} + (v_j \cdot \nabla) f_j + \left(\frac{e_j}{m_j} E_j^* - \frac{d_j V_j}{dt} \right) \cdot \nabla_{v_j} f_j - \frac{\partial V_{j\alpha}}{\partial x_\beta} v_\beta \frac{\partial f_j}{\partial v_\alpha} +$$

$$+ \omega_{H_j} [v_j \times h] = \sum_{j_1} St\{f_{j_1}, f_j\}; \qquad (2.13)$$

В (2.13) ω_{H_j} - циклотронная частота, $St\{f_{j_1}, f_j\}$ - член, описывающий столкновения частиц сорта j с частицами сорта j_1. $\frac{d_j}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (V_j \cdot \nabla)$, v_α - компонента хаотической скорости частицы, V_j - массовая скорость частиц сорта j, остальные обозначения общеизвестны. С помощью (2.13) легко получить уравнения для моментов функции распределения (до третьего включительно). (В дальнейшем там, где это не может вызвать недоразумений индекс будем опускать).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho V) = 0; \qquad (2.14)$$

$$\rho \frac{dV_\alpha}{dt} = - \frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho \frac{e_j}{m_j} E_\alpha + \rho \omega_{H_j} [V \times h]_\alpha + I_\alpha^{(1)}(j_1, j); \qquad (2.15)$$

$$\frac{dP_{\alpha\beta}}{dt} + \frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\varepsilon} \left(\delta_{\gamma\varepsilon} P_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\gamma} P_{\varepsilon\beta} + \delta_{\beta\gamma} P_{\varepsilon\alpha} \right) -$$

$$- \omega_{H_j} \{ P_{\alpha\varepsilon} [e_\varepsilon \times h]_\beta + P_{\beta\varepsilon} [e_\varepsilon \times h]_\alpha \} = \sum_{j_1} I_{\alpha\beta}^{(2)}(j_1, j); \qquad (2.16)$$

$$\frac{dS_{\alpha\beta\gamma}}{dt} + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} + \left\{ \frac{dV_\varepsilon}{dt} - \frac{e_j}{m_j} - \omega_{H_j} [V \times h]_\varepsilon \right\} \times \{ \delta_{\varepsilon\alpha} P_{\beta\gamma} +$$

$$+ \delta_{\varepsilon\beta} P_{\alpha\gamma} + \delta_{\varepsilon\gamma} P_{\alpha\beta} \} + \frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\varepsilon} \{ \delta_{\varepsilon\sigma} S_{\alpha\beta\gamma} + \delta_{\alpha\sigma} S_{\varepsilon\beta\gamma} + \delta_{\beta\sigma} S_{\varepsilon\alpha\gamma} + \delta_{\gamma\sigma} S_{\varepsilon\alpha\beta} \} -$$

$$- \omega_{H_j} \varepsilon_{\varepsilon\sigma\eta} h_\sigma \left(\delta_{\alpha\eta} S_{\varepsilon\beta\gamma} + \delta_{\beta\eta} S_{\varepsilon\alpha\gamma} + \delta_{\gamma\eta} S_{\varepsilon\alpha\beta} \right) = I_{\alpha\beta\gamma}^{(3)} \qquad (2.17)$$

$$(e_1)^2 = 1; \quad (e_1 \cdot h) = 0; \qquad (2.18)$$

$$e_2 = [h \times e_1]; \qquad (2.19)$$

$\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - абсолютно антисимметричный единичный тензор третьего ранга.

Для получения замкнутой системы уравнений в (16 м) приближении необходимо выразить $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через более низкие моменты функции распределения. Для этого мы воспользуемся разложением функции распределения по полиномам Эрмита. В соответствии со сделанными в начале параграфа замечаниями, в качестве весовой функции выберем 2-х температурную максвелловскую функцию распределения:

$$f_{0j} = \rho_j \left(\frac{m_j}{2\pi T_\parallel} \right)^{1/2} \left(\frac{m_j}{2\pi T_\perp} \right) e^{-m_j \left(\frac{v_\parallel^2}{2T_\parallel} + \frac{v_\perp^2}{2T_\perp} \right)}; \qquad (2.20)$$

Здесь $v_\parallel$ - хаотическая скорость в направлении магнитного поля, $v_\perp$ - в перпендикулярном h направлении, $T_\parallel$ и $T_\perp$ - соответствующие температуры (в энергетических единицах). Как показано в Приложении I, в этом случае :

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} &= P_{\alpha\beta} p_{\gamma\varepsilon} + P_{\alpha\gamma} p_{\beta\varepsilon} + P_{\alpha\varepsilon} p_{\beta\gamma} + \\
&+ P_{\beta\gamma} p_{\alpha\varepsilon} + P_{\beta\varepsilon} p_{\alpha\gamma} + P_{\gamma\varepsilon} p_{\alpha\beta} - \\
&- \left(p_{\alpha\beta} p_{\gamma\varepsilon} + p_{\alpha\gamma} p_{\beta\varepsilon} + p_{\alpha\varepsilon} p_{\beta\gamma} \right); \\
&\left(P_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} \right);
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.21)
$$

Используя (2.21), (   ), (2.9) при условии (2.12), из (2.14) - (2.17) можно получить следующую систему уравнений:

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0; \qquad (2.22)
$$

$$
\rho_j \frac{dV_\alpha}{dt} = -\frac{\partial P_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{e_j \rho_j}{m_j} E_\alpha + \rho_j \omega_{H_j} [V \times h]_\alpha + \rho \nu_{jj'} (V_{j'} - V_j)_\alpha; \qquad (2.23)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_\parallel}{dt} + p_\parallel \operatorname{div} V + 2 p_\parallel \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} h_\alpha h_\beta + 2 \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\beta} h_\alpha h_\gamma + \operatorname{div} S^{\parallel} = \\
= -\frac{2}{3} \nu_{jj} (p_\parallel - p_\perp);
\end{aligned} \qquad (2.24)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dp_\perp}{dt} + 2 p_\perp \operatorname{div} V + p_\perp \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} h_\alpha h_\beta + \pi_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial V_\gamma}{\partial x_\beta} h_\alpha h_\gamma \right) + \\
+ \frac{1}{2} \operatorname{div} (S - S^{\parallel}) = -\frac{1}{3} \nu_{jj} (p_\perp - p_\parallel);
\end{aligned} \qquad (2.25)
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\pi_{\alpha\beta}}{dt} + \pi_{\alpha\beta} \operatorname{div} \vec{V} + Z_{\alpha\beta} + p_\perp \left\{ \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha} - \delta_{\alpha\beta} \left(\operatorname{div} \vec{V} - \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu} h_\mu h_\nu \right) \right\} + \\
&+ h_\alpha h_\beta \left\{ p_\perp \operatorname{div} \vec{V} - (2 p_\parallel + p_\perp) \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu} h_\mu h_\nu \right\} + (p_\parallel - p_\perp) h_\varepsilon \left(\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\varepsilon} h_\alpha + \frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\varepsilon} h_\beta \right) + \\
&+ \pi_{\mu\nu} \frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\nu} \left\{ \delta_{\alpha\beta} h_\mu h_\sigma - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\sigma} + h_\alpha h_\beta \delta_{\mu\sigma} - 3 h_\alpha h_\beta h_\mu h_\sigma + \right. \\
&\left. + \delta_{\mu\alpha} \delta_{\beta\sigma} + \delta_{\mu\beta} \delta_{\alpha\sigma} \right\} - \omega_{H_j} \left\{ \pi_{\alpha\mu} [\vec{e}_\mu \vec{h}]_\beta + \pi_{\beta\mu} [\vec{e}_\mu \vec{h}]_\alpha \right\} = \\
&= -\nu \pi_{\alpha\beta};
\end{aligned}
$$

$$
Z_{\alpha\beta} = \frac{\partial S_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\gamma} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} (\vec{S} - \vec{S}^{\parallel}) - \frac{1}{2} h_\alpha h_\beta \operatorname{div} (3 \vec{S}^{\parallel} - \vec{S});
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS_\alpha^{\parallel}}{dt} + S_\alpha^{\parallel} \operatorname{div} \vec{V} + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} h_\gamma h_\beta + \left\{ -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P_{\varepsilon\sigma}}{\partial x_\sigma} + \nu_{jj'} (\vec{V}_{j'} - \vec{V}_j)_\varepsilon \right\} \times \\
&\times \left\{ \delta_{\varepsilon\alpha} p_\parallel + 2 h_\varepsilon h_\gamma P_{\alpha\gamma} \right\} + \frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\varepsilon} \left\{ \delta_{\alpha\sigma} S_\varepsilon^{\parallel} + 2 h_\sigma h_\gamma S_{\varepsilon\gamma\alpha} \right\} - \\
&- \omega_{H_j} [\vec{S}^{\parallel} \vec{h}]_\alpha = -\frac{2}{3} \nu S_\alpha^{\parallel};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{dS_\alpha}{dt} + S_\alpha \operatorname{div} \vec{V} + \frac{\partial Q_{\alpha\beta\beta\varepsilon}}{\partial x_\varepsilon} + \left\{ -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial P_{\varepsilon\sigma}}{\partial x_\sigma} + \nu_{jj'} (\vec{V}_{j'} - \vec{V}_j)_\varepsilon \right\} \times \\
&\times \left\{ \delta_{\varepsilon\alpha} (2 p_\perp + p_\parallel) + 2 P_{\alpha\varepsilon} \right\} + \frac{\partial V_\sigma}{\partial x_\varepsilon} \left\{ \delta_{\varepsilon\sigma} S_\alpha + \delta_{\alpha\sigma} S_\varepsilon + 2 S_{\alpha\varepsilon\sigma} \right\} - \\
&- \omega_{H_j} [\vec{S} \vec{h}]_\alpha = -\frac{2}{3} \nu S_\alpha;
\end{aligned}
$$

(Величина $Q_{дрвб}$ дается формулой (2.2I)).

В уравнениях (2.22) - (2.28) ν_i частота ион-ионных столкновений; ν_{ie} - время передачи импульса от ионов к электронам.* Отметим также, что члены аналогичные термосиле для простоты не учитывались (в сравнении с силой трения), т.к. они содержат в качестве сомножителей малые параметры.

Система (2.22) - (2.28) при условии (2.2I) является замкнутой системой уравнений и может быть использована для изучения различных вопросов динамики разреженной плазмы (об условиях применимости будет сказано в следующем параграфе).

Для того, чтобы проиллюстрировать отличие явлений переноса в "разреженной" плазме от аналогичных эффектов в"плотной" плазме, рассмотрим случай, когда временная зависимость макровеличин может быть выбрана в виде $\exp(i\omega t)$ (ω - величина, вообще говоря, комплексная). Иными словами будем рассматривать т.н. линеаризованные уравнения . Тогда, учитывая малость параметров $\frac{\nu}{\omega}$; $\frac{r_H}{R}$; $\frac{\omega}{\omega_H}$ и $\frac{v_T}{\omega L}$, можно получить выражения для тепловых потоков и тензора напряжений.

Для дальнейшего удобно ввести вектор $\vec{S}^{\perp}$ определяемый следующим образом:

$$\vec{S}^{\perp} = \vec{S} - \vec{S}^{\parallel} \tag{2.29}$$

Тогда из (2.27) и (2.28) используя (2.2I) можно получить следующие выражения для тепловых потоков:

$$\vec{S}_i^{\parallel} = -\left(\frac{2\nu_i - 3i\omega}{\omega^2 M}p_{\parallel}^{0}\right)\nabla_{\parallel} T_{\parallel} - \left(\frac{2\nu_i + 3i\omega}{3\omega_{H_i}^2 M}p_{\perp}^{0}\right)\nabla_{\perp} T_{\parallel} + \frac{p_{\perp}^{0}}{\omega_{H_i} M}\left[\vec{h}\,\nabla T_{\parallel}\right]; \tag{2.30}$$

---

* Выражения для ν_i и ν_{ie} можно найти, например, в [12]

$$\vec{S}_e^{\parallel} = -\left(\frac{2\nu_e - 3i\omega}{\omega^2 m}p_{\parallel}^{0}\right)\nabla_{\parallel} T_{\parallel} - \left(\frac{2\nu_e + 3i\omega}{3\omega_{H_e}^2 m}p_{\perp}^{0}\right)\nabla_{\perp} T_{\parallel} - \frac{p_{\perp}^{0}}{\omega_{H_e} m}\left[\vec{h}\,\nabla T_{\parallel}\right] + \frac{\nu_e p_{\parallel}^{0}}{\omega_{H_e}}\left[\vec{h}\,\vec{u}\right] - \frac{3i\nu_e}{\omega}p_{\parallel}^{0}\vec{u}_{\parallel}; \tag{2.3I}$$

$$\vec{u} = \vec{V}_e - \vec{V}_i ;$$

$$\vec{S}_i^{\perp} = -\left(\frac{4\nu_i - 6i\omega}{3\omega^2}p_{\parallel}^{0}\right)\nabla_{\parallel} T_{\perp} - \left(\frac{2\nu_i + 3i\omega}{3\omega_{H_i}^2 M}4p_{\perp}^{0}\right)\nabla_{\perp} T_{\perp} + \frac{4p_{\perp}^{0}}{\omega_{H_i} M}\left[\vec{h}\,\nabla T_{\perp}\right]; \tag{2.32}$$

$$\vec{S}_e^{\perp} = -\left(\frac{4\nu_e - 6i\omega}{3\omega^2}p_{\parallel}^{0}\right)\nabla_{\parallel} T_{\perp} - \left(\frac{2\nu_e + 3i\omega}{3\omega_{H_e}^2 m}4p_{\perp}^{0}\right)\nabla_{\perp} T_{\perp} - \frac{4p_{\perp}^{0}}{\omega_{H_e} m}\left[\vec{h}\,\nabla T_{\perp}\right] + \frac{4\nu_e p_{\perp}^{0}}{\omega_{H_e}}\left[\vec{h}\,\vec{u}\right] - \frac{2i\nu_e}{\omega}p_{\perp}^{0}\vec{u}_{\parallel}; \tag{2.33}$$

где $p_{\perp}^{0}, p_{\parallel}^{0}$ - соответствующие давления плазмы при отсутствии возмущения. (Напомним, что мы используем линеаризованную систему уравнений).

Как видно из (2.30) - (2.33) при полном пренебрежении столкновений коэффициенты "теплопроводности" можно получить из коэффициентов теплопроводности для плотной плазмы (с точностью до численных коэффициентов, связанных с различием показателей адиабат) заменой ν на $i\omega$. (Как это будет видно из дальнейшего это же относится и к коэффициентам "вязкости").

Компоненты тензора "вязких напряжений для ионов легко получить из (2.26)

$$\pi_{xx} = -\pi_{yy} = -\frac{p_\perp^\circ}{2\omega_{H_i}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) - \frac{i\omega+\nu_i}{4\omega_{H_i}^2} p_\perp^\circ \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \frac{1}{2\omega_H}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S_x^\perp}{\partial y} + \frac{\partial S_y^\perp}{\partial x}\right); \tag{2.34}$$

$$\pi_{xy} = \pi_{yx} = \frac{p_\perp^\circ}{2\omega_{H_i}}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) - \frac{i\omega+\nu_i}{4\omega_{H_i}^2} p_\perp^\circ \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2\omega_{H_i}}\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S_x^\perp}{\partial x} - \frac{\partial S_y^\perp}{\partial y}\right); \tag{2.35}$$

$$\pi_{xz} = \pi_{zx} = -\frac{1}{\omega_{H_i}}\left(p_\perp^\circ \frac{\partial V_z}{\partial y} + p_\parallel^\circ \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) - \frac{(i\omega+\nu_i)}{\omega_{H_i}^2}\left(p_\perp^\circ \frac{\partial V_z}{\partial x} + p_\parallel^\circ \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) - \frac{1}{\omega_{H_i}}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial S_z^\perp}{\partial y} + \frac{\partial S_y^\parallel}{\partial z}\right); \tag{2.36}$$

$$\pi_{yz} = \pi_{zy} = \frac{1}{\omega_{H_i}}\left(p_\perp^\circ \frac{\partial V_z}{\partial x} + p_\parallel^\circ \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) - \frac{(i\omega+\nu_i)}{\omega_{H_i}^2}\left(p_\perp^\circ \frac{\partial V_z}{\partial y} + p_\parallel^\circ \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \frac{1}{\omega_{H_i}}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial S_z^\perp}{\partial x} + \frac{\partial S_x^\parallel}{\partial z}\right); \tag{2.37}$$

Тензор "вязких" напряжений для электронной "жидкости" может быть получен заменой в (2.34) - (2.37) ω_{H_i} на $-\omega_{H_e}$, и, естественно, индекса i на индекс e

В (2.34) - (2.37) первые слагаемые соответствуют хорошо известной т.н. "магнитной вязкости". Вторые (при ν = 0) связаны с инерцией ионов, поэтому будем называть из членами "инерционной вязкости")[x].

---

x) На эффект инерционной вязкости впервые обратил внимание С.С.Моисеев (Доклад на Международном симпозиуме по проблеме многих тел. г.Новосибирск, март I965г.). Им же была высказана идея - применить метод Града для получения гидродинамических уравнений для движений бесстолкновительной плазмы поперек магнитного поля (Семинар ИЯФ I960г.).

Как отмечалось в начале данного параграфа часть вязких членов включена в рассматриваемом формализме в $p_\parallel$ и $p_\perp$. Воспользовавшись (2.24) и (2.25) можно получить следующие выражения для $p_\parallel$ и $p_\perp$

$$p_\parallel = \frac{i p_\parallel^{(0)}}{\omega}\left(\operatorname{div}\vec{V} + 2\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \frac{i}{\omega}\operatorname{div}\vec{S}^{\parallel} +$$

$$+ \frac{2\nu}{3\omega^2}\left\{\left(2p_\perp^0 - p_\parallel^0\right)\operatorname{div}\vec{V} - \left(p_\perp^{(0)} + 2p_\parallel^{(0)}\right)\frac{\partial V_z}{\partial z}\right\}; \qquad (2.38)$$

$$p_\perp = \frac{i p_\perp^0}{\omega}\left(2\operatorname{div}\vec{V} - \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) + \frac{i}{2\omega}\operatorname{div}\vec{S}^{\perp} -$$

$$- \frac{\nu}{3\omega^2}\left\{\left(2p_\perp^0 - p_\parallel^0\right)\operatorname{div}\vec{V} - \left(p_\perp^0 + 2p_\parallel^0\right)\frac{\partial V_z}{\partial z}\right\}; \qquad (2.39)$$

В правых частях (2.38), (2.39) первые слагаемые описывают адиабатические движения плазмы (при строго продольном движении $\gamma = 3$, при движении поперек $\gamma = 2$). Вторые слагаемые описывают изменение давления за счет потоков тепла $S^\parallel$ и $S^\perp$. Наконец, последние слагаемые процессы "вязкости". При $p_\perp^0 = p_\parallel^0$ эти члены имеют простой вид

и при замене $i\omega$ на ν приобретают такой же вид как и в случае "плотной" замагниченной плазмы (см. также приложение П.) Из (2.38) и (2.39) видно, что при $\nu \to 0$ эти члены исчезают и мы имеем предельный переход к бесстолкновительному случаю.

В том случае, когда мы интересуемся нелинейными задачами, естественно мы не можем пользоваться (2.29)-(2.39). Необходимо использовать систему (2.22)-(2.28). Эта система также как и выражение (2.29) - (2.39) имеет предельный переход к случаю $\nu \to 0$ при условии малости параметров $\frac{v_H}{R}$, $\frac{\tau_H}{t_0}$, $\frac{t_0}{\tau}$, $\frac{v_T t_0}{L}$.

§ 3. Условия применимости (I6м) приближения

Для оценки точности (I6м) приближения аналогично тому, как это сделано в работе Г.Грэда /9/ введем меру отклонения функции распределения f от весовой функции, используя "расстояние" по Гильберту:

$$\left[\int \frac{(f - f_0)^2}{f_0}\, d\vec{v}\right]^{1/2} \qquad (3.1)$$

В приложении I показано, что функция распределения, соответствующая данному приближению имеет вид:

$$f_{0j} = \rho f_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2\rho} T_{m\alpha}^{-1} T_{n\beta}^{-1} \pi_{\alpha\beta} v_m v_n + \right.$$

$$+ \frac{1}{6\rho} T_{m\alpha}^{-1} T_{n\beta}^{-1} T_{p\gamma}^{-1} S_{\alpha\beta\gamma} v_m v_n v_p - \frac{1}{6\rho} S_{\alpha\beta\gamma} \times \qquad (3.2)$$

$$\left. \times \left(T_{\alpha m}^{-1} T_{\beta\gamma}^{-1} v_m + T_{\alpha\gamma}^{-1} T_{\beta n}^{-1} v_n + T_{\alpha\beta}^{-1} T_{\gamma p}^{-1} v_p \right) \right\};$$

где:

$$T^{-1}_{\alpha m} = \frac{m}{T_\perp}\delta_{\alpha m} + \left(\frac{m}{T_\parallel} - \frac{m}{T_\perp}\right) h_{\alpha m}; \qquad (3.3)$$

С помощью (3.I) и (3.2) учитывая ортогональность полиномов Эрмита, можно показать, что f близка к f_0 (иными словами (I6м) приближение пригодно для описания динамики плазмы), если

$$\alpha = \left\{\frac{1}{2}(a_{ij}a_{ji}) + \frac{1}{6}(a_{ijk}a_{kji})\right\}^{1/2}; \qquad (3.4)$$

есть величина малая, где

$$a_{ij} = \frac{1}{\rho} W^{-1}_{i\alpha} W^{-1}_{j\beta} \pi_{\alpha\beta}; \qquad (3.5)$$

$$a_{ijk} = \frac{1}{\rho} W^{-1}_{i\alpha} W^{-1}_{j\beta} W^{-1}_{k\gamma} S_{\alpha\beta\gamma}; \qquad (3.6)$$

$$W^{-1}_{i\alpha} = \sqrt{\frac{m}{T_\perp}}\delta_{i\alpha} + \left(\sqrt{\frac{m}{T_\parallel}} - \sqrt{\frac{m}{T_\perp}}\right) h_i h_{\alpha j} \qquad (3.7)$$

Используя (2.29) - (2.39), например, можно показать, что если $\frac{\nu}{\omega}$, $\frac{r_H}{R}$, $\frac{\omega}{\omega_H}$, $\frac{v_T}{\omega L}$ - величины малые, величина α также мала. Далее, как легко показать с помощью (2.27), (2.28) компоненты $S_{\alpha\beta\gamma}$ малы в сравнении с компонентами $S^{\parallel}$ и $S^{\perp}$.

В данной работе мы не касались схемы одножидкостной гидродинамики. Этот вопрос требует дополнительного рассмотрения. Отметим также, что в рамках изложенной гидродинамической модели не могут быть учтены эффекты типа затухания Ландау.

Автор благодарен С.И.Брагинскому, А.А.Галееву, Б.Б.Кадомцеву, А.Г.Ситенко за обсуждение результатов работы. Особо благодарен автор Е.Я. Когану и С.С.Моисееву за многочисленные дискуссии.

Приложение I.

Здесь будет найдена функция распределения , описывающая плазму в (I6м) приближении , а затем будет показано как в этом случае $Q_{\alpha\beta\gamma\delta}$ выражается через вторые моменты функции распределения.

Для того, чтобы воспользоваться разложением функции распределения по полиномам Эрмита, а затем связать коэффициенты разложения с моментами функции распределения (аналогично тому как это сделано Г.Грэдом в работе /9/), введем вместо хаотических скоростей новые переменные.

$$v_i = W_{ik} w_k \qquad (\text{I.ПI})$$

где

$$W_{ik} = \sqrt{\frac{T_\perp}{m}}\delta_{ik} + \left(\sqrt{\frac{T_\parallel}{m}} - \sqrt{\frac{T_\perp}{m}}\right) h_i h_k; \qquad (2.\ \text{П.I})$$

Тогда функцию распределения можно разложить по полиномам Эрмита:

$$f = \rho f_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_i^{(n)} H_i^{(n)}; \qquad (3.\text{ПI})$$

f -определяется (2.20) или в переменных w_i имеет вид

$$f_0 = \left(\frac{m}{2\pi T_\perp}\right)\left(\frac{m}{2\pi T_\parallel}\right)^{1/2} e^{-\frac{w^2}{2}}; \qquad (4.\ \text{ПI})$$

$H_i^{(n)}$ - полином Эрмита n - порядка.

Используя ортогональность полиномов Эрмита и их нормировку можно показать, что[x)]

$$a_i^{(1)} = 0 \qquad (5.\ \text{ПI}),$$

x) Напомним, что плотность, массовая скорость и давления определяются с помощью f_0.

а коэффициенты при полиномах Эрмита второго, третьего и четвертого порядков связаны с моментами функции распределения следующим образом:

$$\rho a_{ij}^{(2)} = W_{i\alpha}^{-1} W_{j\beta}^{-1} \pi_{\alpha\beta} ; \qquad (6.\text{III})$$

$$\rho a_{ijk}^{(3)} = W_{i\alpha}^{-1} W_{j\beta}^{-1} W_{k\gamma}^{-1} S_{\alpha\beta\gamma} ; \qquad (7.\text{III})$$

$$\begin{aligned} \rho a_{ijkl}^{(4)} = {} & W_{i\alpha}^{-1} W_{j\beta}^{-1} W_{k\gamma}^{-1} W_{l\varepsilon}^{-1} Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + \\ & + \rho\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) - \\ & - \left[W_{i\alpha}^{-1} W_{j\beta}^{-1} p_{\alpha\beta}\delta_{kl} + W_{i\alpha}^{-1} W_{k\gamma}^{-1} p_{\alpha\gamma}\delta_{jl} + W_{i\alpha}^{-1} W_{l\varepsilon}^{-1} p_{\alpha\varepsilon}\delta_{jk} + \right. \\ & \left. + W_{j\beta}^{-1} W_{k\gamma}^{-1} p_{\beta\gamma}\delta_{il} + W_{j\beta}^{-1} W_{l\varepsilon}^{-1} p_{\beta\varepsilon}\delta_{ik} + W_{k\gamma}^{-1} W_{l\varepsilon}^{-1} p_{\gamma\varepsilon}\delta_{ij} \right]; \end{aligned} \qquad (8.\text{III})$$

где W_{ik}^{-1} оператор обратный W_{ik} ; W_{ik}^{-1} имеет вид:

$$W_{ik}^{-1} = \sqrt{\frac{m}{T_\perp}}\,\delta_{ik} + \left(\sqrt{\frac{m}{T_\parallel}} - \sqrt{\frac{m}{T_\perp}}\right) h_i h_k \qquad (9.\text{III})$$

Ограничиваясь третьим приближением в разложении по полиномам Эрмита имеем:

$$\begin{aligned} f = \rho f_0 \Big\{ 1 + {} & \frac{1}{2\rho} T_{m\alpha}^{-1} T_{n\beta}^{-1} \pi_{\alpha\beta} v_m v_n + \frac{1}{6\rho} T_{m\alpha}^{-1} T_{n\beta}^{-1} T_{p\gamma}^{-1} \times \\ & \times S_{\alpha\beta\gamma} v_m v_n v_p - \frac{1}{6\rho} S_{\alpha\beta\gamma} \left(T_{\alpha m}^{-1} T_{\beta\gamma}^{-1} v_m + T_{\alpha\gamma}^{-1} T_{\beta n}^{-1} v_n + T_{\alpha\beta}^{-1} T_{\gamma p}^{-1} v_p \right) \Big\}; \end{aligned} \qquad (10.\text{III})$$

где

$$T_{\alpha m}^{-1} = W_{\alpha k}^{-1} W_{km}^{-1} = \frac{m}{T_\perp}\delta_{\alpha m} + \left(\frac{m}{T_\parallel} - \frac{m}{T_\perp}\right) h_\alpha h_m ; \qquad (11.\text{III})$$

Используя (8.III) легко показать, что в данном приближении $Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$ выражается через вторые моменты функции распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho Q_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = {} & \left[p_{\alpha\beta} p_{\gamma\varepsilon} + p_{\alpha\gamma} p_{\beta\varepsilon} + p_{\alpha\varepsilon} p_{\beta\gamma} \right] + \\ & + \left[\pi_{\alpha\beta} p_{\gamma\varepsilon} + \pi_{\alpha\gamma} p_{\beta\varepsilon} + \pi_{\alpha\varepsilon} p_{\beta\gamma} + \pi_{\beta\gamma} p_{\alpha\varepsilon} + \pi_{\beta\varepsilon} p_{\alpha\gamma} + \pi_{\gamma\varepsilon} p_{\alpha\beta} \right]; \end{aligned} \qquad (12.\text{III})$$

Здесь $\pi_{\alpha\beta}$ тензор "вязких" напряжений, определяемый (2.5), а $p_{\alpha\beta}$ тензор давлений, определяемый выражением:

$$p_{\alpha\beta} = p_\perp \delta_{\alpha\beta} + (p_\parallel - p_\perp) h_\alpha h_\beta ; \qquad (13.\text{III}).$$

Приложение П

Найдем с помощью описанного в §2 формализма полный тензор давлений для случая, когда $\nu \gg \omega$, и $\nu \gg \frac{v_T}{L}$, т.е. для плотной плазмы.

Для этой цели вместо уравнений (2.24),(2.25) запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\frac{d}{dt}(2p_\perp + p_\parallel) + (2p_\perp + p_\parallel)\,\mathrm{div}\,\vec{V} + 2p_\perp\,\mathrm{div}\,\vec{V} + (p_\parallel - p_\perp)\,2h_m h_e \frac{\partial V_e}{\partial x_m} + 2\pi_{me}\frac{\partial V_e}{\partial x_m} + \mathrm{div}\,\vec{S} = 0 \qquad (\mathrm{I.П\,II})$$

$$\frac{d}{dt}(p_\parallel - p_\perp) + (p_\parallel - p_\perp)\,\mathrm{div}\,\vec{V} - p_\perp\,\mathrm{div}\,\vec{V} + (2p_\parallel + p_\perp)\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\beta}h_\alpha h_\beta - \pi_{em}\frac{\partial V_e}{\partial x_m} + 3\pi_{em}\frac{\partial V_n}{\partial x_m}h_e h_n + \mathrm{div}\,\vec{S}^{\parallel} - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\vec{S}^{\perp} = -\frac{2}{3}\nu(p_\parallel - p_\perp) \qquad (2.\mathrm{П\,II})$$

Выберем ось z вдоль магнитного поля и учитывая, что $\nu \gg \omega$, а также $\nu \gg \frac{v_T}{L}$ можем записать, что в нулевом приближении $p_{\parallel(0)} = p_{\perp(0)}$

Тогда для поправок из уравнения (I П) следует (в пренебрежении тепловым потоком и π_{em})

$$2p_{\perp(1)} + p_{\parallel(1)} = 0 \qquad (3.\mathrm{П\,II})$$

(Условие эквивалентное равенству нулю суммы диагональных элементов

тензора вязких напряжений, определяемого в обычном смысле).

Из уравнения (2.П)

$$p_{(0)}\,\mathrm{div}\,\vec{V} - 3p_{(0)}\frac{\partial V_z}{\partial z} = \nu\left(p_{\parallel(1)} - p_{\perp(1)}\right); \qquad (4.\ \mathrm{П\,II})$$

Откуда

$$p_{\parallel(1)} = -2\frac{p^{(0)}}{\nu}\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\vec{V};$$

$$p_{\perp(1)} = -\frac{p_{(0)}}{\nu}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) + \frac{2}{3}\frac{p_{(0)}}{\nu}\mathrm{div}\,\vec{V}; \qquad (5.\ \mathrm{П\,II})$$

Первое выражение совпадает с выражением для π_{zz} в обычном формализме (см., например /12/). Как легко видеть, аналогичное утверждение можно сделать для $p_{\perp(1)}$);

С помощью (5.П) полный тензор давлений может быть представлен в виде:

$$P_{\alpha\beta} = p_{(0)}\delta_{\alpha\beta} - \frac{p_{(0)}}{\nu}h_\alpha h_\beta\left\{2\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu}h_\mu h_\nu - \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\vec{V}\right\} - \frac{p_0}{3\nu}(\delta_{\alpha\beta} - h_\alpha h_\beta)\left\{\mathrm{div}\,\vec{V} - 3\frac{\partial V_\mu}{\partial x_\nu}h_\mu h_\nu\right\};$$

Литература

I G. Chew, M. Goldberger, F. Low Proc. Roy. Soc. 236, 112 (1956)

2 Л.И.Руданов, Р.З.Сагдеев в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций т.Ш,стр.268 (1958).

3 H. Furth, J. Killeen, M. Rosenbluth Phys. Fluids 6, 459 (1963)

4 Г.М.Заславский, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. ДАН.

5. Е.Я.Коган, С.С.Моисеев, В.Н.Ораевский. ПМТФ (в печати) препринт ИЯФ СО АН СССР, 1965г.

6 А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев "Ядерный синтез I (82) (1961).

7 Р.З.Сагдеев в сб.Вопросы теории плазмы. т.4 стр.20,1964.

8 W. B. Thompson. Reports on Progress in Physics XXIV, 363 (1961)

9 H. Grad Communications on Pure and Applied Mathematics 2,№4, 331-407 (1949).
(Русский перевод см. сб.Механика 4 (14), 5(15),1952.)

10. С.С.Моисеев

11. Ю.Л.Климонтович. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Издательство МГУ, 1964.

12. С.И.Брагинский . ЖЭТФ, 33, № 2, 459 (1957) см. также в сб. Вопросы теории плазмы т.I стр.183, 1963.

13. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов М. Изд-во иностранн. литературы . 1960.

14 A. Kaufman Phys. Fluids 3, №4, 610 (1960)

15 В.Л.Гинзбург. ЖЭТФ. т.21, 788 (1951).

16. Ю.Л. Климонтович, В.П.Силин ЖЭТФ

17 В.П.Силин, А.А.Рухадзе "Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. Атомиздат. Москва, 1961.

Ответственный за выпуск С.С.Моисеев

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР
Тираж 200 экз. Бесплатно
ял. II.XI.65г.