С13

2

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт

О.Я.Савченко

Разделение переменных в уравнении Бете-Салпетера

НОВОСИБИРСК 1965

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

О.Я.Савченко

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ БЕТЕ-САЛПЕТЕРА

г.Новосибирск

1965

А Н Н О Т А Ц И Я

Уравнение Бете-Салпетера в обычной дифференциальной форме сводится к системе уравнений, содержащих в качестве переменного четырехмерное расстояние. Эта система уравнений используется для определения волновых функций водородоподобных структур и структур типа позитрония с нулевым полным моментом.

В настоящее время анализу уравнения Бете-Салпетера посвящается значительное число работ [1-7]. В частности в [I] уравнение Бете-Салпетера для позитрония сводится к уравнению, которое содержит две переменные: трехмерное расстояние и время. В предлагаемой работе уравнение Бете-Салпетера разделяется более полно: окончательная система уравнений содержит только одну переменную - четырехмерное расстояние. Эта система уравнений используется для определения волновых функций уравнения Бете-Салпетера для двух дираковских частиц в случае, когда масса покоя одной из частиц много меньше массы покоя другой частицы и в случае, когда массы покоя обоих частиц равны по абсолютной величине.

Уравнение Бете-Салпетера в обозначениях (I) записывается в виде:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(1)}}+E_1\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_i^{(2)}}-E_2\right)\Psi = -V\left(x_i^{(1)}-x_i^{(2)},\ \gamma_i^{(1,2)}\right)\Psi. \qquad (I)$$

Решение уравнения (I), которое зависит только от относительных координат ($x_i^{(1)}-x_i^{(2)}=x_i$), определяется более простым уравнением:

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^{(1)}\frac{\partial}{\partial x_i}+E_1\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\gamma_i^{(2)}\frac{\partial}{\partial x_i}+E_2\right)\Psi = V\Psi. \qquad (2)$$

Анализ (2) удобнее всего проводить в обобщенных сферических координатах, связанных с прямоугольными следующими соотношениями:

$$r_i=\left(\sum_{j=1}^{i}x_j^2\right)^{1/2},\quad \cos\vartheta_{i>1}=\frac{x_i}{r_i};\qquad \vartheta_2=\varphi,\ \ \vartheta_3=\vartheta,\ \ r_4=r. \qquad (3)$$

В сферических координатах (3) уравнение (2) переписывается следующим образом:

$$\left(K_1\frac{\partial}{\partial z}+L_1\frac{1}{z}+E_1\right)\left(K_2\frac{\partial}{\partial z}+L_2\frac{1}{z}+E_2\right)\Psi = V\Psi \qquad (4)$$

где

$$K_{1,2}=M_{1,2}\sin\vartheta_4-\gamma_4^{(1,2)}\cos\vartheta_4,\qquad L_{1,2}=\left(M_{1,2}\cos\vartheta_4-\gamma_4^{(1,2)}\sin\vartheta_4\right)\frac{\partial}{\partial\vartheta_4}+N_{1,2}\sin\vartheta_4,$$

$$M_{1,2}=\gamma_1^{(1,2)}\sin\vartheta_3+\gamma_3^{(1,2)}\cos\vartheta_3,\qquad N_{1,2}=\gamma_{31}^{(1,2)}M_{12}\frac{\partial}{\partial\vartheta_3}+\gamma_2^{(1,2)}\frac{1}{\sin\vartheta_3}\frac{\partial}{\partial\vartheta_2}. \qquad (5)$$

Решение (2,4) ищется в виде

$$\Psi=\sum^{k}\left(P_{jmj0}Q_{kj}R_{0kj}+P_{jmj1}Q_{kj}R_{1kj}+P_{jm(j+1)1}Q_{k(j+1)}R_{2kj}+P_{jm(j-1)1}Q_{k(j-1)}R_{3kj}\right), \qquad (6)$$

$$Q_{k\ell}=\frac{1}{k}\sin^{\ell}\vartheta_4\frac{\partial^{\ell+1}}{\partial(\cos\vartheta_4)^{\ell+1}}\cos k\vartheta_4;\quad j,m,\ell,k \text{ – целые числа} \qquad (7)$$

$P_{jm\ell s}$ – угловая часть собственной функции оператора полного момента j, азимутальной составляющей полного момента m, орбитального момента и полного спина ℓ и s – определяется в явном виде соотношениями:

$$P_{jm\ell s}=\eta_m P'_{jm\ell s}\Gamma;\quad \eta_m=\exp\left(im+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}^{(1)}+\tfrac{1}{2}\gamma_{12}^{(2)}\right)\varphi,\quad \Gamma=\left(1-i\gamma_{12}^{(1)}\right)\left(1-i\gamma_{12}^{(2)}\right); \qquad (8)$$

$$P'_{jmj0}=P_j^m\left(\gamma_{31}^{(1)}-\gamma_{31}^{(2)}\right),$$

$$P'_{jmj1}=P_j^{m+1}+mP_j^m\left(\gamma_{31}^{(1)}+\gamma_{31}^{(2)}\right)-(j+m)(j-m+1)P_j^{m-1}\gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)},$$

$$P'_{jm(j+1)1}=P_{j+1}^{m+1}+(j-m+1)P_{j+1}^m\left(\gamma_{31}^{(1)}+\gamma_{31}^{(2)}\right)+(j-m+1)(j-m+2)P_{j+1}^{m-1}\gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)},$$

$$P'_{jm(j-1)1}=P_{j-1}^{m+1}-(j+m)P_{j-1}^m\left(\gamma_{31}^{(1)}+\gamma_{31}^{(2)}\right)+(j+m)(j+m-1)P_{j-1}^{m-1}\gamma_{31}^{(1)}\gamma_{31}^{(2)},\quad P_\ell^m=P_\ell^m(\cos\vartheta).$$

Использование равенств

$$M_{1,2}P_{jmj0}=\pm\frac{1}{2j+1}\left(-P_{jm(j+1)1}+P_{jm(j-1)1}\right)\gamma_3^{(1,2)},\qquad N_{1,2}P_{jmj0}=\pm\frac{1}{2j+1}\left[jP_{jm(j+1)1}+(j+1)P_{jm(j-1)1}\right]\gamma_3^{(1,2)},$$

$$M_{1,2}P_{jmj1}=\frac{1}{2j+1}\left[jP_{jm(j+1)1}+(j+1)P_{jm(j-1)1}\right]\gamma_3^{(1,2)},\qquad N_{1,2}P_{jmj1}=\pm\frac{1}{2j+1}\left[-j^2P_{jm(j+1)1}+(j+1)^2P_{jm(j-1)1}\right]\gamma_3^{(1,2)},$$

$$M_{1,2}P_{jm(j+1)1}=\left[P_{jmj1}\mp(j+1)P_{jmj0}\right]\gamma_3^{(1,2)},\qquad N_{1,2}P_{jm(j+1)1}=(j+2)\left[P_{jmj1}\mp(j+1)P_{jmj0}\right]\gamma_3^{(1,2)},$$

$$M_{1,2}P_{jm(j-1)1}=\left(P_{jmj1}\pm jP_{jmj0}\right)\gamma_3^{(1,2)}\qquad N_{1,2}P_{jm(j-1)1}=(j-1)\left(-P_{jmj1}\mp jP_{jmj0}\right)\gamma_3^{(1,2)}, \qquad (9)$$

– второй знак в (9) относится ко второму индексу – и

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta_4}Q_{k\ell}=\ell\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_4 Q_{k\ell}-Q_{k(\ell-1)}=-(\ell+1)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta_4 Q_{k\ell}+(k^2-\ell^2)Q_{k(\ell+1)},$$

$$\sin\vartheta_4 Q_{k\ell}=\frac{1}{2}\left(Q_{(k+1)(\ell+1)}-Q_{(k-1)(\ell+1)}\right)=\frac{1}{2}\left[-(k-\ell)(k-\ell+1)Q_{(k+1)(\ell-1)}+(k+\ell)(k+\ell-1)Q_{(k-1)(\ell-1)}\right],$$

$$\cos\vartheta_4 Q_{k\ell}=\frac{1}{2}\left[(k-\ell)Q_{(k+1)\ell}+(k+\ell)Q_{(k-1)\ell}\right], \qquad (10)$$

при подстановке (6) в (4) приводит к уравнению, которое содержит сумму произведений $P_{jm\ell s}Q_{k\ell}$ на радиальные функции. Приравнивая эти функции к нулю, получаем следующую систему уравнений, определяющих $R_{\alpha kj}$:

$$\begin{aligned}2(V_{0k}-E_1E_2\cdot R_{0k})={}&\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{k-2}{z}\right)\left[(k-j-1)\gamma_4^+R_{0(k-1)}-(j+1)(k-j-1)(k-j-2)\gamma_3^-R_{2(k-1)}-j\gamma_3^-R_{3(k-1)}\right]+\\&+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{k+2}{z}\right)\left[(k+j+1)\gamma_4^+R_{0(k+1)}+(j+1)(k+j+1)(k+j+2)\gamma_3^-R_{2(k+1)}-j\gamma_3^-R_{3(k+1)}\right]+\\&+\frac{k-j-1}{2k(k-1)}\Box_{k-2}\left[(k-j-2)\gamma_{33}^+R_{0(k-2)}-(j+1)(k-j-2)(k-j-3)\gamma_{34}^-R_{2(k-2)}-j\gamma_{34}^-R_{3(k-2)}\right]+\\&+\frac{k+j+1}{2k(k+1)}\Box_{k+2}\left[(k+j+2)\gamma_{33}^+R_{0(k+2)}+(j+1)(k+j+2)(k+j+3)\gamma_{34}^-R_{2(k+2)}+j\gamma_{34}^-R_{3(k+2)}\right]+\\&+\frac{1}{k^2-1}\Box_k\left\{\left[(k^2-1)\gamma_{33}^--j(j+1)\gamma_{33}^+\right]R_{0k}+(j+1)^2\left[k^2-(j+1)^2\right]\gamma_{34}^-R_{2k}-j^2\gamma_{34}^-R_{3k}\right\},\end{aligned}$$

$$2(V_{1k}-E_1E_2 R_{1k})=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{k-2}{\rho}\right)\left[(k-j-1)\gamma_4^{+}R_{1(k-1)}-(k-j-1)(k-j-2)\gamma_3^{-}R_{2(k-1)}+\gamma_3^{-}R_{3(k-1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{k+2}{\rho}\right)\left[(k+j+1)\gamma_4^{+}R_{1(k+1)}+(k+j+1)(k+j+2)\gamma_3^{-}R_{2(k+1)}-\gamma_3^{-}R_{3(k+1)}\right]+$$

$$+\frac{k-j-1}{2k(k-1)}\Box_{k-2}\left[(k-j-2)\gamma_{33}^{-}R_{1(k-2)}-(k-j-2)(k-j-3)\gamma_{34}^{+}R_{2(k-2)}+\gamma_{34}^{+}R_{3(k-2)}\right]+$$

$$+\frac{k+j+1}{2k(k+1)}\Box_{k+2}\left[(k+j+2)\gamma_{33}^{-}R_{1(k+2)}+(k+j+2)(k+j+3)\gamma_{34}^{+}R_{2(k+2)}-\gamma_{34}^{+}R_{3(k+2)}\right]+$$

$$+\frac{1}{k^2-1}\Box_k\left\{\left[(k^2-1)\gamma_{33}^{+}-j(j+1)\gamma_{33}^{-}\right]R_{0k}+(j+1)\left[k^2-(j+1)^2\right]\gamma_{34}^{+}R_{2k}+j\gamma_{34}^{+}R_{3k}\right\},$$

$$2(2j+1)(V_{2k}-E_1E_2 R_{2k})=\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{k-2}{\rho}\right)\left[\gamma_3^{-}R_{0(k-1)}+j\gamma_3^{+}R_{1(k-1)}+(2j+1)(k-j-2)\gamma_4^{+}R_{2(k-1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{k+2}{\rho}\right)\left[\gamma_3^{-}R_{0(k+1)}+j\gamma_3^{+}R_{1(k+1)}-(2j+1)(k+j+2)\gamma_4^{+}R_{2(k+1)}\right]+ \qquad \text{(II.)}$$

$$+\frac{1}{2k(k-1)}\Box_{k-2}\left\{(k-j-2)(\gamma_{34}^{-}R_{0(k-2)}+j\gamma_{34}^{+}R_{1(k-2)})+(k-j-2)(k-j-3)\left[(j+1)\gamma_{33}^{+}+j\gamma_{33}^{-}\right]R_{2(k-2)}+j(\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{3(k-2)}\right\}+$$

$$-\frac{1}{2k(k+1)}\Box_{k+2}\left\{(k+j+2)(\gamma_{34}^{-}R_{0(k+2)}+j\gamma_{34}^{+}R_{1(k+2)})-(k+j+2)(k+j+3)\left[(j+1)\gamma_{33}^{+}+j\gamma_{33}^{-}\right]R_{2(k+2)}-j(\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{3(k+2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{k^2-1}\Box_k\left\{\left[(k^2-1)\gamma_{33}^{-}+(j+1)(j+2)\gamma_{33}^{+}\right]R_{2k}-(j+1)(\gamma_{34}^{-}R_{0k}-j\gamma_{34}^{+}R_{1k})+j(\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{3k}\right\},$$

$$2(2j+1)(V_{3k}-E_1E_2 R_{3k})=\frac{k-j}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{k-2}{\rho}\right)\left\{(k-j-1)\left[\gamma_3^{-}R_{0(k-1)}-(j+1)\gamma_3^{+}R_{1(k-1)}\right]+(2j+1)\gamma_4^{+}R_{3(k-1)}\right\}+$$

$$-\frac{k+j}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{k+2}{\rho}\right)\left\{(k+j+1)\left[\gamma_3^{-}R_{0(k+1)}-(j+1)\gamma_3^{+}R_{1(k+1)}\right]-(2j+1)\gamma_4^{+}R_{3(k+1)}\right\}+$$

$$+\frac{(k-j)(k-j-1)}{2k(k-1)}\Box_{k-2}\left\{(k-j-2)\left[\gamma_{34}^{-}R_{0(k-2)}-(j+1)\gamma_{34}^{+}R_{1(k-2)}\right]+\left[j\gamma_{33}^{+}+(j+1)\gamma_{33}^{-}\right]R_{3(k-2)}+(k-j-2)(k-j-3)(\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{2(k-2)}\right\}-$$

$$-\frac{(k+j)(k+j+1)}{2k(k+1)}\Box_{k+2}\left\{(k+j+2)\left[\gamma_{34}^{-}R_{0(k+2)}-(j+1)\gamma_{34}^{+}R_{1(k+2)}\right]+\left[j\gamma_{33}^{+}+(j+1)\gamma_{33}^{-}\right]R_{3(k+2)}-(k+j+2)(k+j+3)(\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{2(k+2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{k^2-1}\Box_k\left\{\left[(k^2-1)\gamma_{33}^{+}+j(j-1)\gamma_{33}^{-}\right]R_{3k}+(j+1)\left[(k^2-j^2)\gamma_{34}^{-}R_{0k}+j\gamma_{34}^{+}R_{1k}\right]+\left[k^2-(j+1)^2\right](\gamma_{33}^{-}-\gamma_{33}^{+})R_{2k}\right\}.$$

В (II) введены следующие обозначения:

$$\gamma_i^{\pm}=E_2\gamma_i^{(1)}\pm E_1\gamma_i^{(2)},\quad \gamma_{33}^{\pm}=\gamma_4^{(1)}\gamma_4^{(2)}\pm\gamma_3^{(1)}\gamma_3^{(2)},$$

$$\Box_k=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{k^2-1}{\rho^2}, \qquad (12)$$

$$V\Psi=\sum^{k}\left(P_{jmj0}Q_{kj}V_{0k}+P_{jmj1}Q_{kj}V_{1k}+P_{jm(j+1)1}Q_{k(j+1)}V_{2k}+P_{jm(j-1)1}Q_{k(j-1)}V_{3k}\right).$$

Система уравнений (II) и равенство (6) в некоторых частных случаях дают возможность определить решение (2) в замкнутом виде. В случае $|E_1|\ll|E_2|$ и $V = E_2U(\rho)$, отвечающем движению дираковской частицы в поле, величина которого зависит от четырехмерного расстояния, решение (2) определяется следующими функциями:

$$\Psi^{(1)}=\left\{(k+j+1)P_{jmj}^{+}Q_{kj}+\gamma_{34}^{(1)}P_{jm(j+1)1}Q_{k(j+1)}\right\}R_k\mp\left\{(k-j)P_{jmj}^{+}Q_{(k+1)j}+\gamma_{34}^{(1)}P_{jm(j+1)1}Q_{(k+1)(j+1)}\right\}R_{k+1}\gamma_4^{(1)},$$

$$\Psi^{(2)}=\left\{P_{jmj}^{-}Q_{kj}-(k+j)\gamma_{34}^{(1)}P_{jm(j-1)1}Q_{k(j-1)}\right\}R_k\gamma_4^{(1)}\mp\left\{P_{jmj}^{-}Q_{(k+1)j}-\gamma_{34}^{(1)}(k-j+1)P_{jm(j-1)1}Q_{(k+1)(j-1)}\right\}R_{k+1},$$

$$P_{jmj}^{\pm}=P_{jmj1}+\left[\tfrac{1}{2}\pm\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\right]P_{jmj0}. \qquad (13.$$

Радиальные функции R_k и R_{k+1} определяются системой из двух уравнений:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{k+2}{\rho}\right)R_{k+1}+(E_1-U)R_k=0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{k-1}{\rho}\right)R_k+(E_1-U)R_{k+1}=0.\end{cases} \qquad (14)$$

В случае же $V = \frac{1}{2}\gamma_i^{(1)}\gamma_i^{(2)}U$ и $E_{1,2}=\pm E$, отвечающем движению двух вазимодействующих дираковских частиц с одинаковыми массами покоя, замкнутые решения находятся только при $j = 0$:

$$\Psi^{(1)} = Q_{k0} R_k^{(1)} (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \Gamma^{\pm},$$

$$\Psi^{(2)} = Q_{k0} R_k^{(2)} (\gamma_1^{(1)} - \gamma_1^{(2)}) \Gamma^{\mp} + \frac{1}{2k} \left(Q_{(k+1)1} R_{k+1}^{(2)} - Q_{(k-1)1} R_{k-1}^{(2)} \right) \left[\cos\vartheta \cdot (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \Gamma^{\mp} + \sin\vartheta \cdot (1 - \gamma_1^{(1)} \gamma_1^{(2)}) \Gamma^{\mp} \right],$$

$$\Gamma^{(\pm)}_{(\mp)} = (1 \pm \gamma_4^{(1)} \gamma_4^{(2)})(1 + \gamma_3^{(1)})(1 \pm \gamma_3^{(2)})(1 + \gamma_4^{(1)})(1 + \gamma_4^{(2)}). \qquad (15)$$

$R_k^{(1)}, R_k^{(2)}, R_{k\pm1}^{(2)}$ определяются из уравнений:

$$(-\Box_k - E^2 - U) R_k^{(1)} = 0$$

$$\begin{cases} (-\Box_k + E^2 + U) R_k^{(2)} + E \left[\frac{k-1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k-2}{r} \right) R_{k-1}^{(2)} + \frac{k+1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+2}{r} \right) R_{k+1}^{(2)} \right] = 0, \\ (-\Box_k + E^2 - U) R_{k-1}^{(2)} + E \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k+1}{r} \right) R_k^{(2)} = 0, \\ (-\Box_k + E^2 - U) R_{k+1}^{(2)} + E \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k-1}{r} \right) R_k^{(2)} = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Для случая $E_{1,2} = E$ радиальные функции определяются уравнениями, которые лишь знаком при E^2 отличаются от уравнений (16)

Литература.

1. Gunther M., J. Math. Phus., 5, N2, 188 (1964).
2. Swift A., Lee B., J. Math. Phys. 5, N7, 908 (1964).
3. W. Kummer, CERN-Geneva, 7051/TH, 367 (1963).
4. A. Bastai, L. Bertocchi, S. Fubini, Furlan, CERN-Geneva, 7229/TH, 374 (1963).
5. Bardakei K., Balsterli M., Suura H., Phys. Rev., 133, N58, 1273 (1964).
6. Contagouris A., Phys. Rev., Let., 9, N5, 194 (1964).
7. Sawyer Roymond F., Phys. Rev., 134, N2B, 448 (1964).