

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 50

Б.В. Чириков

**Когда динамическая система
становится статистической?**

НОВОСИБИРСК 1966

$$N(I_n, \theta_n) = \sum_{i=1}^n N_i^{(0)}(I_i) + \epsilon / \text{Препринт}$$

где I_n, θ_n - законические параметры, а ϵ - малый параметр возмущения. В рамках статистической теории динамики системы в достаточно широком диапазоне параметров можно выявить закономерности поведения статистических функций, а следовательно, и траекторий. **Б.В.Чириков**

КОГДА ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СТАНОВИТСЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ?

Вопрос о том, когда динамическая система становится статистической, является одним из центральных в современной теории хаоса. В рамках статистической теории динамики системы в достаточно широком диапазоне параметров можно выявить закономерности поведения статистических функций, а следовательно, и траекторий.

Сообщение на Международном конгрессе математиков, Москва, 1966.

Вопрос о том, когда динамическая система становится статистической, является одним из центральных в современной теории хаоса. В рамках статистической теории динамики системы в достаточно широком диапазоне параметров можно выявить закономерности поведения статистических функций, а следовательно, и траекторий.

Для широкого класса механических систем существует простой критерий статистичности, основанный на представлении динамики в виде канонического преобразования. В частности, для систем с гамильтоновым уравнением движения можно показать, что в достаточно широком диапазоне параметров система становится статистической. В частности, для систем с гамильтоновым уравнением движения можно показать, что в достаточно широком диапазоне параметров система становится статистической.

г.Новосибирск

Вопрос о том, когда динамическая система становится статистической, является одним из центральных в современной теории хаоса. В рамках статистической теории динамики системы в достаточно широком диапазоне параметров можно выявить закономерности поведения статистических функций, а следовательно, и траекторий.

Вопрос о том, когда динамическая система становится статистической, является одним из центральных в современной теории хаоса. В рамках статистической теории динамики системы в достаточно широком диапазоне параметров можно выявить закономерности поведения статистических функций, а следовательно, и траекторий.

В настоящем сообщении кратко излагаются некоторые результаты аналитического и численного исследования возникновения стохастичности в консервативной системе типа слабо связанных нелинейных осцилляторов с гамильтонианом^{x)}:

$$H(I_k, \theta_k) = \sum_{i=1}^N H_i^{(0)}(I_i) + \varepsilon H^{(1)}(I_k, \theta_k) \quad (1)$$

где I_k, θ_k - канонические переменные, а ε - малый параметр возмущения. Термином стохастичность мы будем обозначать кратко все статистические свойства динамической системы. В настоящее время мы не понимаем до конца физической природы статистических законов^{/3/}, а следовательно, и условий их возникновения. Однако сейчас, по-видимому, нет сомнений в том, какой тип движения механической системы является основой для возникновения "настоящей" стохастичности или, по крайней мере, для её искусственной имитации. Это - перемешивание с положительной колмогоровской энтропией^{/2/(xx)}. Поэтому под стохастичностью мы будем понимать движение именно такого типа. Нашей основной задачей является получение критерия стохастичности, т.е. выяснение условий, при которых в динамической системе начинают действовать статистические законы. Заметим, что с практической точки зрения стохастичность представляет собой наиболее опасную неустойчивость в нелинейной колебательной системе.

Для широкого класса механических систем существует простой критерий стохастичности, основанный на представлении движения в виде геодезического потока на некоторой римановой поверхности. Достаточным условием стохастичности является всюду отрицательная кривизна этой поверхности. К сожалению, это условие ни в коем случае не является необходимым и, следовательно, не даёт реальной границы стохастичности. В частности такой критерий совершенно неприменим в весьма важ-

x) Мы ограничиваемся здесь наиболее простым случаем разделения переменных при $\varepsilon = 0$. Вообще говоря, невозмущенные функции $H_i^{(0)}$ могут зависеть от некоторых медленных фаз θ_{m_i} ($\theta_{m_i} \sim \varepsilon$). Излагаемая ниже методика может быть использована и в этом случае (см., например, /1/).

xx) Наиболее ясно, на наш взгляд, это было показано Крыловым^{/3/}.

ном с точки зрения приложений случае системы слабо связанных осцилляторов, для которой кривизна соответствующей римановой поверхности всегда оказывается переменной.

Для получения критерия стохастичности в этом случае рассмотрим резонансное взаимодействие между осцилляторами системы. Это может быть сделано по следующей схеме.

Прежде всего сведем нашу многомерную автономную систему к одномерному неавтономному осциллятору. Для этого найдем переменные невозмущенного движения ($\varepsilon=0$) как явные функции времени: $I_k = \text{const}$, $\theta_k(t) = \int \omega_k(I_k) dt + \psi_k$ и подставим их в возмущение $H^{(1)}$. В результате для каждого осциллятора получим гамильтониан вида:

$$H_i = H_i^{(0)}(I_i) + \varepsilon H^{(1)}(I_i, \theta_i, t) \quad (2)$$

В первом приближении по ε осцилляторы (2) можно рассматривать как "независимые", их связь осуществляется через "внешнее" возмущение $H^{(1)}(I_i, \theta_i, t)$. Последнее определяет систему резонансных частот или просто резонансов, как мы будем говорить для краткости:

$$\omega(I) = \omega_p \quad (3)$$

Хорошо известно (см., например, [11]), что каждый отдельный резонанс вызывает так называемые фазовые колебания, или бленения амплитуды и частоты осциллятора вокруг резонансного значения ω_p . Максимальный размах этих колебаний определяет область влияния резонанса. В единицах частоты размер этой области имеет порядок:

$$\Omega_p \sim \omega \sqrt{\varepsilon \alpha} \quad (4)$$

где $\alpha = (I/\omega)(d\omega/dI)$ - коэффициент нелинейности осциллятора. Соотношение (4) написано в первом приближении по $\sqrt{\varepsilon/\alpha}$, $\sqrt{\varepsilon\alpha}$ и справедливо при умеренной нелинейности:

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \frac{1}{\varepsilon} \quad (5)$$

Поведение осциллятора в случае многих резонансов существенно зависит от величины:

$$\chi = \left(\frac{\Omega \Phi}{\Delta} \right)^2 \quad (6)$$

где Δ - среднее расстояние между соседними резонансами.

При $\chi \ll 1$ область влияния резонансов относительно мала, так что осциллятор находится либо вообще вдали от всех резонансов, либо под действием только одного из них, совершая устойчивые фазовые колебания. Если же $\chi \gtrsim 1$, то области влияния соседних резонансов перекрываются, и осциллятор получает возможность переходить от одного резонанса к другому, изменяя свою частоту и энергию. Отсюда естественно возникает гипотеза^{/1/}, что условие:

$$\chi \sim 1 \quad (7)$$

как раз и определяет границу стохастичности.

Эта гипотеза оказалась весьма плодотворной и позволила рассмотреть ряд прикладных задач, в том числе: движение частиц в магнитной ловушке^{/1,4,5/}, стохастический метод ускорения Ферми^{/6/}, нелинейные волны^{/7/}.

Численное интегрирование уравнений движения в конкретных случаях подтвердило, что условие (7) определяет реальную физическую границу устойчивости движения. Эта граница не является резкой, а, напротив, образует целую промежуточную зону, глубоко проникающую как в область устойчивости, так и в область стохастичности. Можно показать, что в промежуточной зоне в зависимости от начальных условий возможны самые различные типы движения, включая даже монотонное изменение энергии осциллятора как в случае линейного резонанса.

Устойчивая область ($\chi \ll 1$) соответствует, по крайней мере асимптотически, области сохранения почти-периодического движения на некоторой всюду плотной системе инвариантных торов, обнаруженной в работах Колмогорова и Арнольда^{/8,9/}. Вполне возможно и даже весьма вероятно^{что} этой области существует тем не менее очень медленное перемешивание^{/10/}, впрочем такое медленное, что его до сих пор не удалось обнаружить с помощью численного счёта. Это, однако, несколько не уменьшает значения границы (7), за которой начинается перемешивание в первом порядке по ξ , т.е. относительно быстрое. Подчеркнем, что перемешивание в области стохастичности ($\chi \gg 1$) не просто быстрое, а предельно

быстрое для заданного возмущения.

Существенно, что величина χ зависит не только от параметров системы, таких как ε , но и от динамических переменных (I, θ). Поэтому граница стохастичности не только определяет критическое значение возмущения, но и разделяет фазовое пространство системы и даже, вообще говоря, любую её поверхность постоянной энергии. Это приводит к очень интересной ситуации, существенно отличной от классической постановки задачи в эргодической теории; последняя рассматривает стохастичность на всей энергетической поверхности консервативной системы. В частности, возникает вопрос о переходе от статистического описания к динамическому в промежуточной зоне (7). В первом приближении этот переход можно описать в форме граничного условия типа отражающей стенки для функции распределения в стохастической области, однако, такое приближение весьма грубо^{/6/}.

В качестве примера рассмотрим проблему Ферми-Паста-Улама^{/12/} о статистических свойствах колебаний нелинейной струны с закрепленными концами, подчиняющихся уравнению^{x)}:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left(1 + 3\beta \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right) + \gamma^2 \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} \quad (8)$$

Здесь x - смещение, z - координата вдоль струны, β, γ - коэффициенты нелинейности и дисперсии, соответственно. В уравнение добавлен дисперсионный член, необходимый для корректной постановки задачи, как это было выяснено Забужким^{/13/}.

Известно, что в результате численного интегрирования уравнения (8) Ферми, Паста, Улам^{/12/} не обнаружили каких-либо статистических свойств движения. Это вызвало оживленную дискуссию, продолжающуюся и до настоящего времени. С нашей точки зрения такой результат объясняется неудачным (или, скорее, счастливым) выбором начальных условий, которые оказались в области устойчивости. Оценка положения границы стохастичности для этой задачи была получена совместно с Израйлевым^{/7/} и может быть представлена в виде:

$$3\beta w \sim \frac{\sqrt{w_0}}{k} \quad (9)$$

x) Мы ограничиваемся здесь более простым случаем кубической нелинейности (член $\sim (\partial x / \partial z)^2$), квадратичная нелинейность ($\sim \partial^2 x / \partial z^2$) приводит к аналогичной картине.

где $\omega = E/L$ - плотность энергии колебаний на единицу длины струны, E - полная энергия, m - число возбужденных мод со средним номером k . Под модой понимается пространственная Фурье-компонента смещения, номер которой $k = 2L/\lambda$, где λ, L - длина волны и струны, соответственно.

Левая часть критерия (9) равна среднему значению нелинейного члена ($\langle 3\beta(\partial x/\partial z)^2 \rangle$). Поэтому для слабой нелинейности ($3\beta(\partial x/\partial z)^2 \ll 1$) стохастичность возможна лишь при возбуждении высоких мод. Их средний номер определяется либо начальными условиями ($k \sim k_0$), либо процессом образования ударной волны или, точнее, солитонов^{/17/}. В последнем случае справедлива оценка^{/18/}:

$$k \sim \frac{L}{\lambda} \sqrt{3\beta \omega} \quad (10)$$

При $\gamma \rightarrow 0$ величина k неограниченно возрастает и критерий стохастичности (9) всегда выполняется.

Совместно с Израйлевым и Хисамутдиновым было проведено численное интегрирование уравнения (8) с целью "экспериментального" определения границы стохастичности. Очень удобным и чувствительным признаком стохастичности оказалась локальная неустойчивость движения^{x)}. Мы использовали свойство пространственной симметрии решения (8), согласно которому четные моды не могут появиться в процессе движения, если они не были возбуждены вначале^{/12/}. Если же сообщить им очень небольшую энергию ($\sim 10^{-15} E$ в нашем случае), то в области устойчивости она останется приблизительно на том же уровне, а в стохастической области будет экспоненциально возрастать со временем, быстро достигая уровня энергии остальных мод. Пример такого поведения четных мод, демонстрирующий прохождение через границу стохастичности, показан на рис.1.

Зависимость характерного времени развития локальной неустойчивости τ от параметра возмущения β (рис.2) показывает наличие широкой переходной зоны, которая тянется далеко в область устойчивости. Интересно отметить, что при возбуждении только первой моды (основной случай в работе Ферми, Паста, Улама^{/12/}) также имеется какая-то слабая стохастичность. Это отчетливо видно по кривой роста энергии второй моды (верхняя кривая на рис.3), хотя нижняя кривая ($E_1(t)$) казалось бы убедительно свидетельствует в пользу почти-периодического

x) Нам кажется, что это наиболее важное свойство стохастического движения, определяющее, возможно, саму физическую природу "настоящей" стохастичности. Локальная неустойчивость широко используется в аналитических исследованиях стохастичности^{/14-16/}.

характера движения.

Для эквидистантной системы резонансов теория приводит к линейной зависимости между τ^{-1} и $\ln \beta$ (обе величины пропорциональны колмогоровской энтропии):

$$1/\tau = \Omega \cdot \ln \beta / \beta_{cr} \quad (II)$$

где β_{cr} соответствует границе стохастичности, а коэффициент пропорциональности $\Omega \sim \Delta/\pi$. Для больших β этот закон хорошо выполняется (рис.2) и даёт возможность (путем экстраполяции к $\tau^{-1} = 0$) найти верхнюю границу стохастичности, которая является основной, подлежащей сравнению с аналитическими оценками^{/17/}. Кроме того в промежуточной зоне на рис.2 можно более или менее отчетливо выделить и другие линейные участки, которые соответствуют, по-видимому, более плотной системе резонансов.

Все полученные таким образом граничные значения возмущения отложены на рис.4 и совпадают по порядку величины с аналитическими оценками^{/17/}. Отсюда можно, по-видимому, заключить, что мы правильно понимаем основной механизм стохастичности нелинейных волн типа (8), хотя, конечно остаётся еще много интересных и неясных деталей их поведения. Единственное серьезное противоречие связано с необычной устойчивостью солитонов, обнаруженной Забужким и Крускалом^{/17,18/}, которая казалось бы исключает стохастичность. Возможно, что это противоречие объясняется неэквивалентностью исходного волнового уравнения (8) и уравнения первого порядка типа Кортвега-де Вриза, из которого получены солитоны^{/17,18/}.

Мне хочется поблагодарить Д.В.Аносова, В.И.Арнольда, Н.Дж.Забужкого, М.Д.Крускала и Я.Г.Синаю за многочисленные полезные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

- I. Ф.Говард, М.Хайн. Материалы конференции ЦЕРН по протонному синхрофазотрону (октябрь , 1953);
Б.В.Чириков. Атомная энергия, 6, 630 (1959).
2. А.Н.Колмогоров , ДАН 119, 861 (1958).
3. Н.С.Крылов. Работы по обоснованию статистической физики.
Изд. АН, 1950.
4. M.N.Rosenbluth, R.Z.Sagdeev, J.B.Taylor, G.M.Zaslavski,
On the Destruction of magnetic Surfaces due to the Irregularities
of Magnetic Field, Int. Rep. N 6/1966, ICTP, Trieste, 1966.
5. Б.В.Чириков. Стохастическое разрушение магнитных поверхностей
стелларатора, ДАН (в печати).
6. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков, ДАН 159, 306 (1964).
7. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН 166, 57 (1966).
8. А.Н.Колмогоров , ДАН 98, 527 (1954).
9. В.И.Арнольд, УМН, XIII, 91 (1963).
10. В.И.Арнольд, ДАН , 156, 9 (1964).
11. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей.
Физматгиз, 1962.
12. E.Fermi, J.Pasta, S.Ulam, Studies of Nonlinear Problems I,
Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
13. N.J.Zabusky, Journ. math. Phys., 3, 1028, (1962).
14. Э.Хопф, УМН, IY, вып.2, 129 (1949).

15. Д.В.Аносов, ДАН, 151, 1250 (1963).

16. Я.Г. Синай, Изв. АН, мат., 30, 15 (1966)

17. N.J.Zabusky, M.D.Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15, 240 (1965).

18. N.J.Zabusky, частное сообщение.

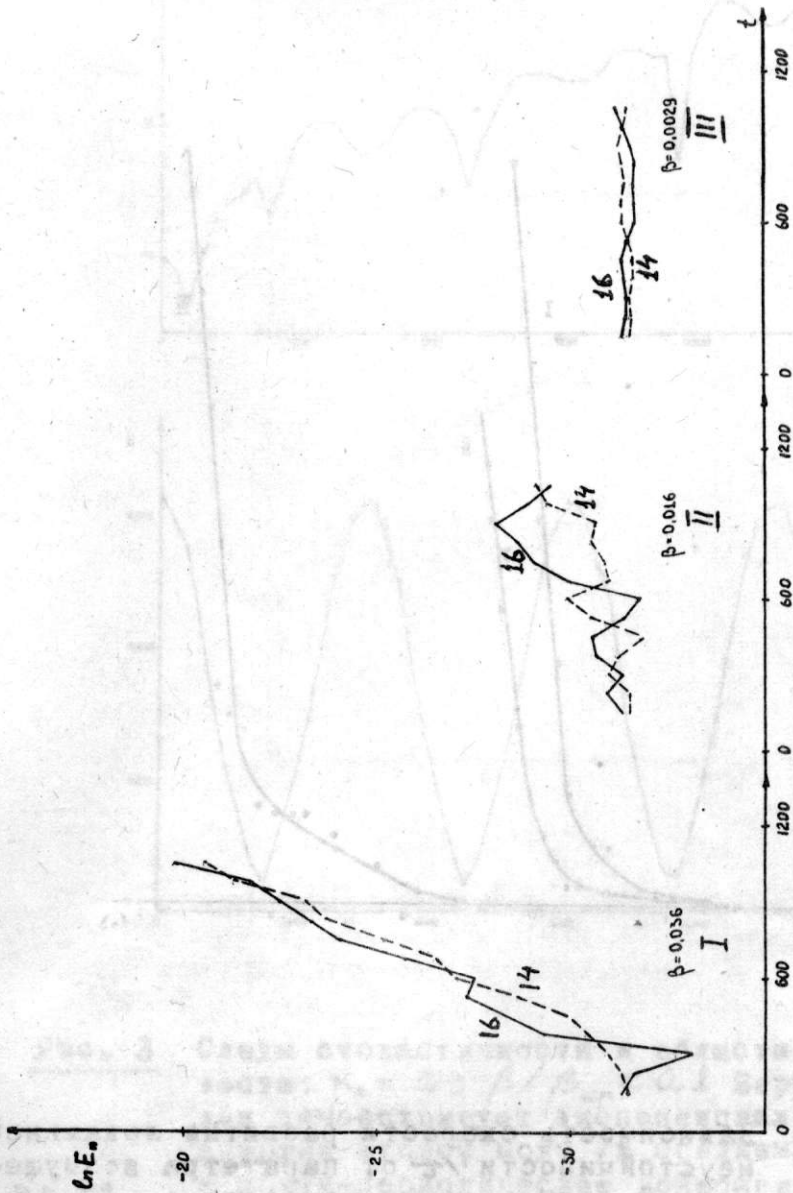


Рис. 1. Локальная неустойчивость колебаний струны:

I - область стохастичности;

II - граница стохастичности;

III - область устойчивости; начальные условия:

$K_0 = 15, 17, 19$; цифры на кривых - номера мод.

15. Л.Д.Автомат, ДАН, 151, 1950 (1943).
16. С.Т. Семах, Изв. АН УССР, 1954, 15 (1946).
17. К.Т. Митропол, М.Д. Кривчик, Докл. АН УССР, 1954, 15 (1946).
18. ...

$k_0 = 12, 14, 15$ - ...
 II - ...
 I - ...

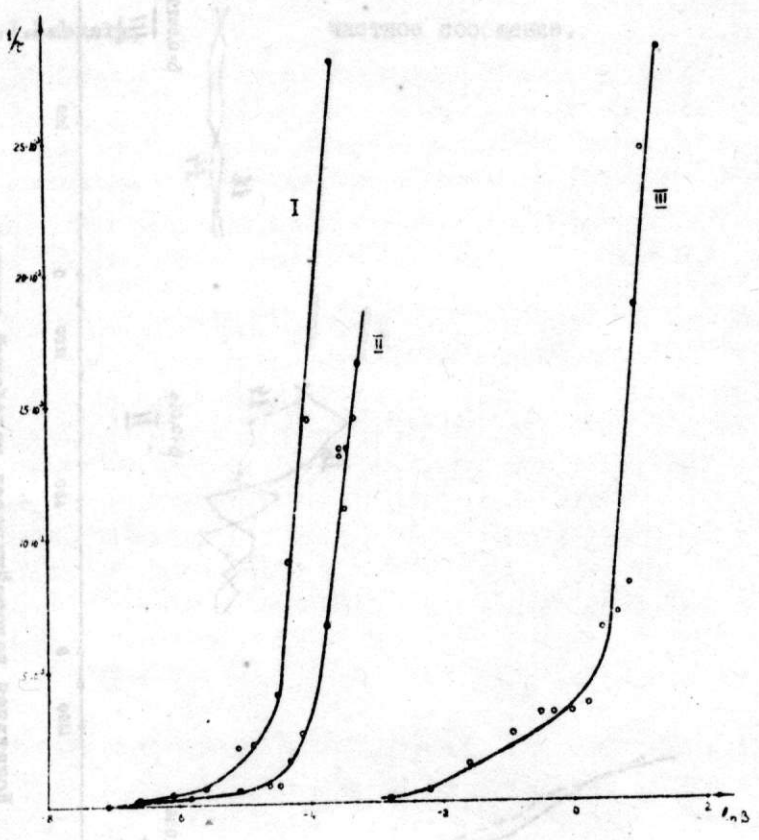


Рис. 2 Зависимость скорости развития локальной неустойчивости $1/\tau$ от параметра возмущения β . Начальные условия: $k_0 = 27, 29, 31$ (I); $k_0 = 15, 17, 19$ (II); $k_0 = 1, 3, 5$ (III).

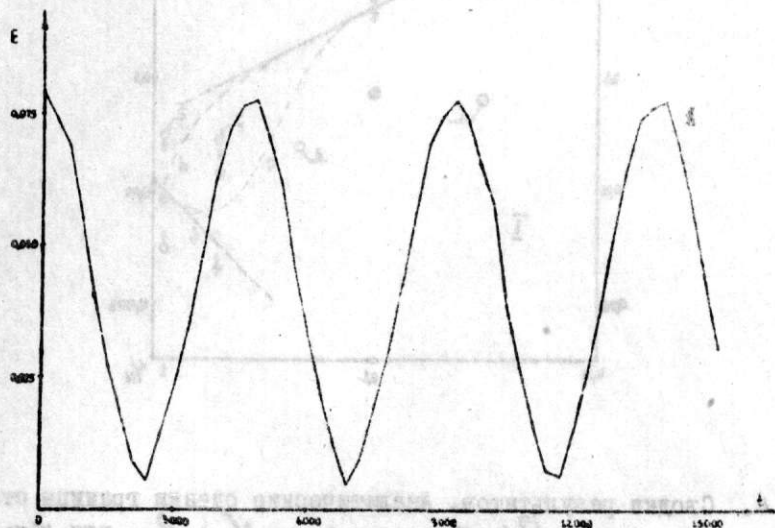
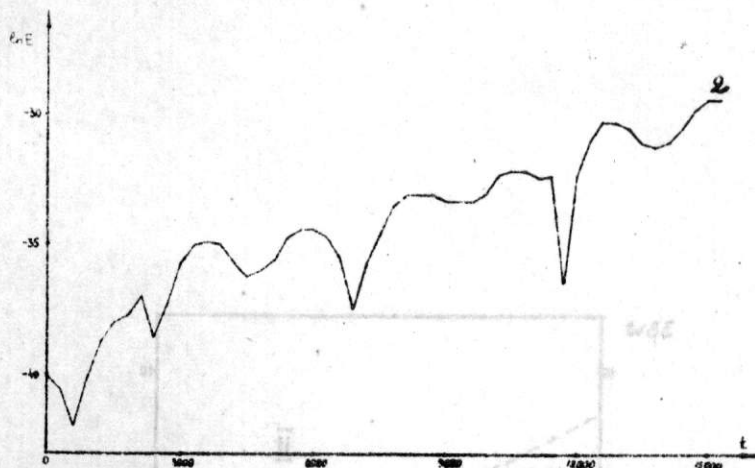


Рис. 3 Следы стохастичности в области устойчивости: $\kappa_0 = 1$; $\beta/\beta_{кр} \approx 0.1$ Верхняя кривая демонстрирует экспоненциальный рост энергии второй моды /в среднем/, нижняя - почти-периодические колебания энергии первой моды.

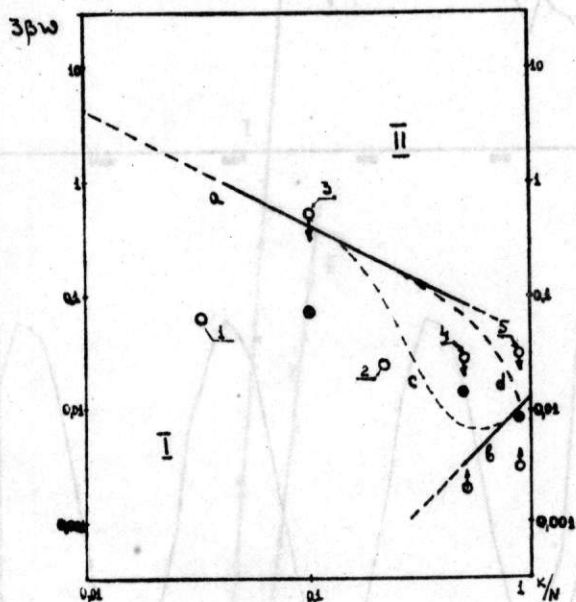


Рис. 4. Сводка результатов. Аналитические оценки границы стохастичности $\beta\omega$: a - для $\kappa \ll N$; b - для $\kappa \approx N$; c, d - качественная интерполяция. Результаты численного счёта $\beta\omega$: $N = 32$; $X_m = 1$; $\kappa_0 = 1$; $\beta = 8(1)$; $\kappa_0 = 7$; $\beta = 1/16(2)$.

Результаты численного определения границы стохастичности-верхней (φ), нижней (δ), промежуточной (\bullet):
 $N = 31$; $X_m = 1$; $\kappa_0 = 1, 3, 5$ (3); $\kappa_0 = 15, 17, 19$ (4);
 $\kappa_0 = 27, 29, 31$ (5).