ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 15

О.Я.Савченко

Векторные свойства двухфермионной системы

НОВОСИБИРСК 1966

√

А Н Н О Т А Ц И Я

Волновая функция системы из двух дираковских частиц разбивается на пять гиперкомплексных групп: две из них обладают скалярными свойствами, две векторными, компоненты пятой группы преобразуются как антисимметричный тензор второго ранга. Приводятся результаты действия некоторых операторов на отдельные группы. Делаются некоторые общие выводы о симметрии дифференциальных эффективных сечений взаимодействующих частиц. Эти выводы иллюстрируются на примере упругого рассеяния двух электронов в С.Ц.И. и на примере рассеяния векторного мезона в кулоновском поле. В дополнение, проводится векторный анализ связанной системы (векторный мезон) в постоянном магнитном поле.

Если для системы двух дираковских частиц существует волновая функция, то она (в обозначениях / 2 /) может быть записана в виде / I /:

$$\Psi = a_0 + \sum_{\alpha=1}^{4}\left(a_\alpha^{(1)}\Gamma_\alpha^{(1)} + a_\alpha^{(2)}\Gamma_\alpha^{(2)}\right) + \sum_{\beta=1}^{4}{}' \sum_{\alpha=1}^{4}\left(a_{\alpha\beta}^{(11)}\Gamma_{\alpha\beta}^{(1)} + a_{\alpha\beta}^{(12)}\Gamma_\alpha^{(1)}\Gamma_\beta^{(2)} + a_{\alpha\beta}^{(22)}\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}\right) + \ldots \tag{I}$$

Шестнадцать делителей нуля / 2 /

$$\Gamma_0 = \left(1 \pm i\Gamma_{12}^{(1)}\right)\left(1 \pm i\Gamma_{12}^{(2)}\right)\left(1 \pm \Gamma_4^{(1)}\right)\left(1 \pm \Gamma_4^{(2)}\right) \tag{2}$$

разбивают (I) на шестнадцать слагаемых типа

$$S = F\left(\Gamma_2^{(1)}, \Gamma_3^{(1)}, \Gamma_{31}^{(1)}, \Gamma_{31}^{(2)}\right)\Gamma_0. \tag{3}$$

Если волновая функция (I) удовлетворяет уравнению вида:

$$\hat{A}\left(\Gamma_\alpha^{(1)}, \Gamma_\beta^{(2)}\right)\Psi_1 = 0, \tag{4}$$

то эта волновая функция может быть выражена в форме одного из слагаемых (3), например:

$$\Psi_1 = F \cdot \Gamma, \qquad \Gamma = \left(1 + i\Gamma_{12}^{(1)}\right)\left(1 + i\Gamma_{12}^{(2)}\right)\left(1 + \Gamma_4^{(1)}\right)\left(1 + \Gamma_4^{(2)}\right). \tag{5}$$

F удобно разбить на шестнадцать компонент, вписанных в таблицу I. Индексы компонент подчеркивают то обстоятельство, что при преобразовании Лоренца / 2 / на базе делителя нуля Γ компоненты $S_{1,2}$, ведут себя как скаляры, $S_{5,\alpha i}$ - как компоненты соответствующих векторов, а компоненты S_{ij} - как компоненты антисимметричного тензора второго ранга. Векторные свойства этих компонент отражают также внесенные в таблицу результаты действия на них некоторых наиболее употребляемых операторов. Из векторных свойств компонент следует, что если взаимодействие между двумя частицами в С.Ц.И. имеет ось симметрии в направлении импульса частицы, то дифференциальное сечение рассеяния имеет ту же ось симметрии, если начальная волновая функция содержала скалярные компоненты и векторные компоненты, направленные по импульсу, и плоскость симметрии $[\vec{k}\times\vec{n}]$, если начальная функция содержала компоненты, направленные вдоль вектора $\vec{n}$ ($\vec{k}$ - направление относительного импульса).[x)]

Эти выводы можно проиллюстрировать на примере упругого рассеяния двух взаимодействующих электронов и на примере упругого рассеяния векторного мезона на кулоновском потенциале.

В С.Ц.И. волновая функция двух свободных электронов является суперпозицией триплетного и синглетного состояния:

$$\Psi_{s=1} = \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot \mathfrak{D}_{12}(\vec{k})(\vec{a}_5+\vec{a}_1),$$

$$\Psi_{s=0} = \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r})\cdot \mathfrak{D}_{12}(\vec{k})(b_{01}+b_2), \qquad \mathfrak{D}_{12}(\vec{k}) = (k_0+k_i\Gamma_i^{(1)})(k_0+k_j\Gamma_j^{(2)}). \tag{6}$$

Амплитуды рассеяния этих состояний следующие / 3 /:

$$f_{s=1} = V\cdot \mathfrak{D}_{12}(\vec{k}')\cdot(\vec{c}_5+\vec{c}_1),$$

$$\vec{c} \approx (k_4^2+\vec{k}\cdot\vec{k}')\vec{a} - [(\tfrac{1}{2}\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{a}]\vec{k} + [(2\vec{k}-\tfrac{1}{2}\vec{k}')\cdot\vec{a}]\vec{k};$$

$$f_{s=0} = V\cdot \mathfrak{D}_{12}(\vec{k}')\cdot(d_{01}+d_2),$$

$$d \approx (k_4^2+k^2)b;$$

$$V = -\frac{e^2}{8(\hbar mc^2)^2(k^2-\vec{k}\vec{k}')}, \qquad \vec{k}' = k\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad k^2 \ll k_0^2$$

Аналогичный результат получается и для амплитуды рассеяния векторного мезона в кулоновском поле:

x) Следует ожидать такой же симметрии для дифференциальных сечений рассеяния "векторных" волновых функций одной частицы [5]

$$f_m = \tfrac{1}{4}V\cdot \mathfrak{D}_{12}(\vec{k}')\cdot(\vec{c}'_5+\vec{c}'_1),$$

$$c' \approx (k_4^2+k_5^2-\vec{k}\cdot\vec{k}')\vec{a} - [\vec{k}\times\vec{k}']\times\vec{a}.$$

Это объясняется тем, что решение уравнения Кеммера / 4 / равнозначно решению задачи рассеяния при кулоновском взаимодействии двух электронов в триплетном состоянии.

Угловые зависимости дифференциальных сечений определяются величинами $/\sqrt{\vec{c}}\,/^2$ и $/\sqrt{\vec{c}'}\,/^2$. Следовательно (7,8) подтверждают сделанные выводы о характере симметрии дифференциальных сечений.

Дополнение

I. Векторный мезон в магнитном поле.

Векторный мезон, который подчиняется уравнению Кеммера

$$(\vec{\beta}\cdot\vec{k}+\beta_4 k_4+k_0)\Psi = 0,$$

$$\beta_{ijk}+\beta_{kji} = \delta_{ij}\beta_k+\delta_{kj}\beta_i, \quad \vec{\beta}\cdot\vec{k} = \beta_\alpha k_\alpha \tag{I}$$

$$k_x = \frac{\partial}{\partial x}+i\alpha_H y, \quad k_y = \frac{\partial}{\partial y}-i\alpha_H x, \quad \alpha_H = \frac{e}{2\hbar c}H,$$

можно рассматривать как простейшую двухфермионную систему. Действительно, числа $\tfrac{1}{2}(\Gamma_i^{(1)}+\Gamma_i^{(2)})$ обладают всеми свойствами чисел β_i. Поэтому (I) можно переписать в форме уравнения Брейта

$$[(\Gamma_\alpha^{(1)}+\Gamma_\alpha^{(2)})k_\alpha+(\Gamma_4^{(1)}+\Gamma_4^{(2)})k_4+2k_0]\Psi = 0, \tag{2}$$

которое описывает движение двух одинаковых частиц при условии совпадения их координат и импульсов. Решение уравнения (2) в форме

$$\Psi = (a_{st} + \vec{b}_e + \vec{c}_s + \vec{d}_h)\Gamma \tag{3}$$

(антисимметричное решение (2) в координатной части совпадает с релятивистским уравнением Шредингера; рассматриваться не будет) совпадает в числах β_i с решением (I). Компонетны выражения (3) определятся подстановкой (3) в (2). Оператор уравнения (2) переводит (3) (см. таблицу I) в новую векторную сумму, которая приравнивается к нулю. Это дает:

$$\vec{k}a + k_4\vec{c} + k_0\vec{b} = 0,$$

$$\vec{k}\vec{b} + k_0 a = 0,$$

$$[\vec{k}\times\vec{d}] + k_4\vec{b} + k_0\vec{c} = 0, \tag{4}$$

$$-[\vec{k}\times\vec{c}] + k_0\vec{d} = 0,$$

или(в другой записи) - (5,I)

$$\vec{k}(\vec{k}\cdot\{\vec{c} + k_0^{-2}[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{c}]]\}) - [\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{c}]] + (k_4^2 - k_s^2)\vec{c} = 0,$$

$$\vec{d} = k_0^{-1}[\vec{k}\times\vec{c}],$$

$$\vec{b} = -(k_4^{-1}k_0(\vec{c} + k_0^{-2}[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{c}]]), \tag{5,2}$$

$$a = k_4^{-1}\vec{k}\cdot(\vec{c} + k_0^{-2}[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{c}]]).$$

Одно решение (5.I) очевидно:

$$\vec{c}^{(1)} = \vec{n}_z f,$$

$$\varepsilon^{(1)} = (k_4^2 - k_0^2 - k_z^2)^{(1)} = 2\alpha_H\langle n,l\rangle,$$

$$f = z^{|m|}L_{n+|l|}^{|l|}(\alpha_H z^2)\exp i(m\varphi + k_4 t + i\alpha_H z^2), \quad \langle n,l\rangle = 2n + |l| + l + 1; \tag{6}$$

- $|m|, n, |l|$ - целые положительные числа,

n_i - единичный вектор.

Другое решение можно найти в виде:

$$\vec{c}^{(2)} = c_+(\vec{n}_x + i\vec{n}_y) + c_-(\vec{n}_x - i\vec{n}_y). \tag{7}$$

Подстановка приводит к системе из двух уравнений:

$$\varepsilon^{(2)}c_+ + (1-\gamma)\vec{k}^2 c_+ - 2\alpha_H c_+ - \gamma(k_x + ik_y)^2 c_- = 0,$$

$$\varepsilon^{(2)}c_- + (1+\gamma)\vec{k}^2 c_- + 2\alpha_H c_- + \gamma(k_x - ik_y)^2 c_+ = 0,$$

$$\gamma = k_0^{-2}\alpha_H \tag{8}$$

Собственные числа уравнений (8) следующие:

$$\varepsilon_\pm^{(2)} = 2\alpha_H\langle n,l\rangle \pm 4\alpha_H\left(1 \pm \gamma - \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \gamma^2 + 2\langle n,l\rangle\gamma \pm 4\gamma}\right) \tag{9}$$

Согласно (6,9) уровни энергий мезона в магнитном поле определяются равенствами:

$$\varepsilon_H^{(1)} = 4\alpha_H n,$$

$$\varepsilon_{H\pm}^{(2)} = 4\alpha_H\left(n \pm 1 + \gamma \mp \sqrt{1 + \gamma^2 + 2n\gamma \pm 4\gamma}\right), \quad n \geqslant 1. \tag{10}$$

Т а б л и ц а I.

Комп.	Явный вид	Вектор	Действие операторов: $\frac{1}{2}k_\mu(\Gamma_\mu^{(1)}+\Gamma_\mu^{(2)})$	$\frac{1}{2}k_\mu(\Gamma_\mu^{(1)}-\Gamma_\mu^{(2)})$	$\frac{1}{2}k_\nu(\Gamma_\nu^{(1)}+\Gamma_\nu^{(2)})$	$\frac{1}{2}k_\nu(\Gamma_\nu^{(1)}-\Gamma_\nu^{(2)})$
S_{st}	$(\Gamma_5^{(1)}+\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}+\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	C_{st}	$C\vec{K}_e$	0	0	C_1
S_{sx}	$(1+\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(1-\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	$\vec{C}_s$	$-[\vec{K}\times\vec{C}]_h$	$-(\vec{K}\cdot\vec{C})_s$	$\vec{C}_h$	0
S_{sy}	$i(1+\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(1+\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{sz}	$(1-\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}+\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{at}	$(1-\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}-\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	C_{at}	0	$C\vec{K}_h$	C_2	0
S_{ax}	$(\Gamma_5^{(1)}-\Gamma_5^{(2)})(1+\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	$\vec{C}_a$	$(\vec{K}\cdot\vec{C})_2$	$[\vec{K}\times\vec{C}]_e$	0	$\vec{C}_h$
S_{ay}	$i(\Gamma_5^{(1)}-\Gamma_5^{(2)})(1-\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{az}	$-(\Gamma_5^{(1)}+\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}-\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{yz}	$(1-\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(1-\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	$\vec{C}_e$	$(\vec{K}\cdot\vec{C})_{st}$	$[\vec{K}\times\vec{C}]_s$	$\vec{C}_s$	0
S_{zx}	$i(1-\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(1+\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{xy}	$(1+\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}+\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{tx}	$-i(\Gamma_5^{(1)}+\Gamma_5^{(2)})(1+\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	$\vec{C}_h$	$[\vec{K}\times\vec{C}]_s$	$-(\vec{K}\cdot\vec{C})_{at}$	0	$\vec{C}_a$
S_{ty}	$(\Gamma_5^{(1)}+\Gamma_5^{(2)})(1-\Gamma_{5\mu}^{(1)}\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_{tz}	$i(\Gamma_5^{(1)}-\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}-\Gamma_{5\mu}^{(2)})$					
S_1	$(\Gamma_5^{(1)}-\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}+\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	C_1	0	$C\vec{K}_s$	0	C_{st}
S_2	$-(1+\Gamma_5^{(1)}\Gamma_5^{(2)})(\Gamma_{5\mu}^{(1)}-\Gamma_{5\mu}^{(2)})$	C_2	$C\vec{K}_a$	0	C_{at}	0

$$C_m = C S_m, \qquad \vec{C}_m = C_\alpha S_{m\alpha},$$

$$\vec{C}_h = \vec{C}_t, \qquad \vec{C}_e = C_x S_{yz} + C_y S_{zx} + C_z S_{xy}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Б.В. Богданович. ЖЭТФ, 7,210; 1325 (1937).
2. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.2, ГИТТЛ (1956).
3. О.Я.Савченко. Препринт, ИЯФ СО АН СССР (1965).
4. J.C. Gunn, Proc. Roy. Soc. A. 198, 559 (1948).
5. Г.А.Зайцев, ЖЭТФ, 25, 653, 667, 676 (1953).