T65

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 2

Л.Я.Трайнин

Оценка влияния магнитотормозного излучения на выход нерелятивистских электронов из ловушки с магнитными пробками

НОВОСИБИРСК 1966

Введение

Для изучения поведения электронов в ловушке с магнитными пробками важно оценить время выхода электронов из рабочего пространства ловушки за счет магнитотормозного излучения электронов. Этот эффект становится существенным при сильных магнитных полях, в условиях, когда выход электронов за счет неадиабатичности движения становится пренебрежимо малым.

Уравнения для измерения угла между векторами скорости электрона и магнитного поля, а также для изменения энергии электрона получены в [1].

Однако решение проведено для случая однородного поля, что позволяет делать лишь очень приблизительные оценки для случая магнитной ловушки. В настоящей работе расчет проведен для случая ловушки с параболической конфигурацией магнитного поля.

§ 1. Основные уравнения

Из выражения [2] для силы радиационного торможения нерелятивистского электрона

$$\vec{f}_r = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\vec{r}} \qquad (1)$$

и уравнения его движения в магнитном поле

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{e}{c}[\dot{\vec{r}}\vec{H}] + \vec{f}_r \qquad (2)$$

получим, пренебрегая $\vec{f}_r$ по сравнению с лоренцовой силой,

$$\vec{f}_r = \frac{2e^3}{3mc^4}\frac{d}{dt}[\dot{\vec{r}}\vec{H}] = \frac{2e^3}{3mc^4}\{[\ddot{\vec{r}}\vec{H}] + [\dot{\vec{r}}\dot{\vec{H}}]\}$$

Легко показать, что

$$|[\ddot{\vec{r}}\vec{H}]| \gg |[\dot{\vec{r}}\dot{\vec{H}}]|$$

Действительно

$$|[\ddot{\vec{r}}\vec{H}]| = \frac{e}{mc}|[[\vec{v}\vec{H}]\vec{H}]| \sim \frac{eH^2 v}{mc} = \omega H v$$

$$|[\dot{\vec{r}}\dot{\vec{H}}]| = |[\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{H}]| \sim v^2\frac{\partial H_z}{\partial z} \sim v^2\frac{H_z}{\ell}$$

где ℓ - расстояние между центром магнитной ловушки и точкой, где величина магнитного поля максимальна.

Отсюда:

$$\frac{|[\dot{\vec{r}}\dot{\vec{H}}]|}{|[\ddot{\vec{r}}\vec{H}]|} \sim \frac{v}{\omega\ell} \sim \frac{r_л}{\ell} \ll 1$$

Поэтому с хорошей точностью

$$\vec{f}_r = \frac{2e^3}{3mc^4}[\ddot{\vec{r}}\vec{H}] = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\{\vec{H}(\vec{H}\vec{V}) - \vec{V}\vec{H}^2\} \qquad (3)$$

Тогда

$$f_{r_\theta} = (\vec{f}_r\cdot\vec{\theta}_0) = mv\frac{d\theta}{dt} = \frac{2e^4}{3m^2c^5}\{(\vec{H}\vec{\theta}_0)(\vec{H}\vec{v}) - (\vec{V}\vec{\theta}_0)H^2\} \qquad (4)$$

Так как $(\vec{V}\vec{\theta}_0)=0$ и $(\vec{H}\vec{\theta}_0) = -H\sin\theta$, то

$$f_{r_\theta} = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}H^2\sin\theta\cos\theta,$$

откуда

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{2e^4}{3m^3c^5}H^2\sin\theta\cos\theta \qquad (5)$$

и

$$\frac{dW}{dt} = (\vec{f}_r\vec{V}) = -2\frac{2e^4}{3m^3c^5}H^2 W\sin^2\theta \qquad (6)$$

Обозначим

$$\frac{2e^4}{3m^2c^5} = \frac{1}{510\,\frac{сек}{кгс^2}} = \alpha$$

Введем далее безразмерную величину

$$\beta_c = \frac{W}{\mu H_m} = \frac{H_0}{H_m\sin^2\theta_0} = \frac{\sin^2\theta_{кр}}{\sin^2\theta_0}, \qquad (7)$$

где $\mu = \frac{W\sin^2\theta_0}{H_0}$ - адиабатический инвариант движения электрона

H_0 - величина магнитного поля в центре ловушки

θ_0 - угол между векторами $\vec{H}$ и $\vec{V}$ в центре ловушки.

Очевидно, что условием удержания электрона в ловушке является неравенство

$$\beta_c < 1$$

Легко показать, что

$$\dot{\beta}_c = 2\alpha H^2\beta_c\cos^2\theta$$

Полное изменение β_c за период

$$\Delta\beta_c = \frac{4}{V}\int_0^{z_c(\beta_c)}\frac{\dot{\beta}\,dz}{\cos\theta} = \frac{8\alpha\beta_c H_m^2}{V}\int_0^{z_c(\beta_c)}\beta^2\left(1-\frac{\beta}{\beta_c}\right)^{\frac{1}{2}}dz \qquad (9)$$

где $\beta = \frac{H(z)}{H_m}$, z_c - точка остановки электрона.

Отсюда

$$\bar{\dot{\beta}}_c = 2\alpha\beta_c H_m^2\,\frac{\int_0^{z_c(\beta_c)}\beta^2\left(1-\frac{\beta}{\beta_c}\right)^{\frac{1}{2}}dz}{\int_0^{z_c(\beta_c)}\frac{dz}{\sqrt{1-\beta/\beta_c}}} = f(\beta_c) \qquad (10)$$

Отсюда можно найти время выхода электрона из ловушки

$$t_{\beta_{c0},1}=\int\limits_{\beta_{c0}}^{1}\frac{d\beta_c}{f(\beta_c)} \tag{11}$$

Полное изменение W за период

$$\Delta W=-\frac{8\alpha H_m^2}{V}\beta_c W\int\limits_0^{z_c(\beta_c)}\beta^3\left(1-\frac{\beta}{\beta_c}\right)^{-\frac{1}{2}}dz$$

Откуда

$$\overline{\dot W}=-2\alpha H_m^2\beta_c W\cdot\frac{\int\limits_0^{z_c(\beta_c)}\beta^3\left(1-\frac{\beta}{\beta_c}\right)^{-\frac{1}{2}}dz}{\int\limits_0^{z_c(\beta_c)}\left(1-\frac{\beta}{\beta_c}\right)^{-\frac{1}{2}}dz} \tag{12}$$

§ 2. Случай ловушки с параболическим распределением магнитного поля по оси

В настоящей работе исследовался случай, когда поле по оси зависит от координаты z по закону $\beta=\beta_0+\frac{1}{2}\beta_0''z^2$ для участка OA

и $\beta=1-\frac{1}{2}\beta_m''(z-z_m)^2$ для участка AM (рис.I).

Осевое распределение поля, близкое к исследовавшемуся в данной работе было на экспериментальной установке [3].

Рассмотрим время изменения β_c от β_{c0} до

Заменяя в (9) переменную z на β согласно соотношению $\beta=\beta_0+\frac{1}{2}\beta_0''z^2$

получим

$$\Delta\beta_c=\frac{\pi}{2}\frac{\alpha H_m^2}{V\sqrt{2\beta_0''}}(\beta_c-\beta_0)\left(\beta_c^2+2\beta_0\beta_c+\frac{5}{2}\beta_0^2\right) \tag{13}$$

Пользуясь выражением для периода колебаний электрона в параболической потенциальной яме

$$T(\beta_c)=\frac{2\pi\sqrt{2}}{V}\beta_c^{\frac{1}{2}}\beta_0''^{-\frac{1}{2}}$$

,получим

$$\overline{\dot\beta_c}=\frac{1}{8}\alpha H_m^2(\beta_c-\beta_0)\left[(\beta_c+\beta_0)^2+\frac{3}{2}\beta_0^2\right]$$

Откуда: $$t_{\beta_{c0}\beta_{c1}}=\int\limits_{\beta_{c0}}^{\beta_{c1}}\frac{d\beta_c}{\dot\beta_c(\beta_c)}=$$

$$=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{\alpha\beta_m^2\beta_0^2}\left\{\left[\ln\frac{(\beta_{c1}-\beta_0)^2}{\beta_{c1}^2+2\beta_0\beta_{c1}+\frac{5}{2}\beta_0^2}-\ln\frac{(\beta_{c0}-\beta_0)^2}{\beta_{c0}^2+2\beta_0\beta_{c0}+\frac{5}{2}\beta_0^2}\right]-\frac{8}{\sqrt6}\left[\operatorname{arctg}\frac{2\beta_0+2\beta_{c1}}{\beta_0\sqrt6}-\operatorname{arctg}\frac{2\beta_0+2\beta_{c0}}{\beta_0\sqrt6}\right]\right\} \tag{15}$$

Теперь найдем время изменения β_c в пределах от $\beta_c=\beta_{c1}$, причем $\frac{\beta_{c1}-1}{\beta_{c1}}\ll 1$ и $\beta_c\cong 1$.

При движении электрона в магнитной потенциальной яме при β_c, близком к 1, электрон большую часть периода движения проводит на участках AM при θ близком к $\frac{\pi}{2}$, что приводит к тому, что энергия электрона согласно (6) уменьшается сильнее, чем при движении с параметром $\beta_c<\beta_{c1}$, но средняя скорость уменьшения угла θ падает.

Для нахождения $\overline{\dot\beta_c}$ необходимо найти период движения и приращение β_c за период.

Из (9) видно, что вклад изменения β_c на участке AM мал, по сравнению с вкладом на участке $z<z_{c1}$, поэтому можно принять за период

$$\Delta\beta_c(\beta_c>\beta_{c1})\simeq\Delta\beta_c(\beta_{c1})\simeq\Delta\beta_c(1)$$

где $\Delta\beta_c(1)$ вычислено по формуле (I3)

$$\Delta\beta_c(1)=\frac{\pi}{2}\frac{\alpha H_m^2}{V\sqrt{2\beta_0''}}(1-\beta_0)\left(1+2\beta_0+\frac{5}{2}\beta_0^2\right)$$

Далее

$$T(\beta_c)\simeq T_0(\beta_{c1})+\frac{4}{V}\int\limits_{z_1}^{z_{1c}}\frac{dz}{\cos\theta}$$

Заменяя далее переменную z на β согласно соотношению

$$\beta(z)=1-\frac{1}{2}\beta_m''(z-z_m)^2$$

получим

$$T(\beta_c)=T_0(\beta_{c1})+\frac{8\beta_c^{1/2}}{\sqrt{2\beta_m''}V}\,\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{\beta_c-\beta_{c1}}{1-\beta_c}}$$

Тогда

$$\bar{\dot{\beta}}_c=\frac{\Delta\beta_c(1)}{T_0(1)+\frac{8\beta_c^{1/2}}{\sqrt{2\beta_m''}V}\,\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{\beta_c-\beta_{c1}}{1-\beta_c}}}$$

Откуда время изменения β_c от $\beta_c=\beta_{c1}$ до I равно

$$t_{\beta_{c1},1}=(1-\beta_{c1})\frac{T_0(1)}{\Delta\beta_c(1)}+\frac{8}{\Delta\beta_c(1)\cdot\sqrt{2\beta_m''}V}\int\limits_{\beta_{c1}}^{1}\beta_c^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{\beta_c-\beta_{c1}}{1-\beta_c}}\,d\beta_c$$

При вычислении вышенаписанного интеграла, принимая во внимание, что $\beta_c\simeq 1$, получим

$$\int\limits_{\beta_{c1}}^{1}\beta_c^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{\beta_c-\beta_{c1}}{1-\beta_c}}\,d\beta_c\simeq\int\limits_{\beta_{c1}}^{1}\mathrm{arsh}\sqrt{\frac{\beta_c-\beta_{c1}}{1-\beta_c}}\,d\beta_c=(1-\beta_{c1})$$

откуда

$$t_{\beta_{c1},1}=\frac{(1-\beta_{c1})\left(2\pi\sqrt{2}\,\beta_0''^{-\frac{1}{2}}+8\beta_m''^{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{\pi}{2}\alpha H_m^2\cdot\beta_0''^{-\frac{1}{2}}(1-\beta_0)\left(1+2\beta_0+\frac{5}{2}\beta_0^2\right)}$$

Автор выражает свою благодарность Б.В.Чирикову, по инициативе которого была выполнена эта работа.

Литература

1. G. Gibson, E.J. Lauer, Phys. Rev., v. 117, №5, 1188, 1960 г.

2. Ландау и Лифшиц. Теория поля, 1964 г.

3. Дубинина А.Н., Трайнин Л.Я., Чириков Б.В. Электронная ловушка пробочной конфигурации, рассчитанная на длительное удержание электронов. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1964 г.

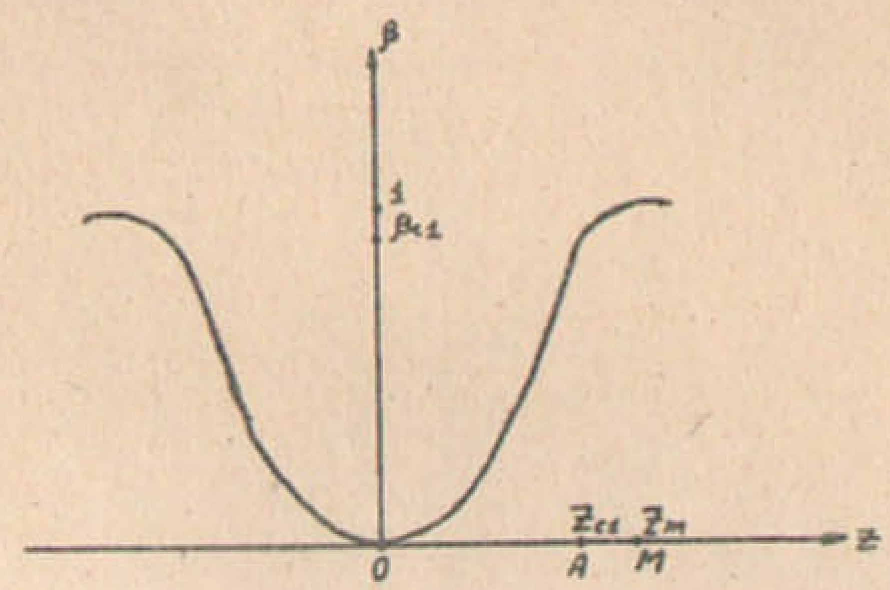

рис.1

Ответственный за выпуск Б.В.Чириков
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР.
Тираж I50 экз. Бесплатно.
Работа сдана в печать 4.I.1966 г.