ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 4

В.Н.Байер,В.СФадин,В.А.Хозе

# Излучение двух фотонов в заданный угол при электронных столкновениях

НОВОСИБИРСК 1966

## А н н о т а ц и я

Рассмотрен процесс излучения двух фотонов с произвольной энергией в заданный угол при электронных столкновениях. Полученное сечение $d\sigma_{\omega_1\omega_2}$ имеет вид полинома по степеням $\omega_1$, $\omega_2$. В случае, когда угловые размеры детекторов $\vartheta_0$ порядка $1/\gamma$, коэффициенты при степенях $\omega_{1,2}$ вычислены численно. В случае $\vartheta_0 \gg 1/\gamma$ получено аналитическое выражение для сечения.

DOUBLE BREMSSTRAHLUNG IN FIXED ANGLE IN ELECTRON COLLISIONS

V.N.BAYER, V.S.FADIN, V.A.KHOZE

ABSTRACT

The process of emission by electron collisions of two photons with arbitrary energies into fixed angle is considered. The cross-section obtained has the form of a polynom in power of $\omega_1$, $\omega_2$. In the case, when angle dimensions $\vartheta_0$ of detectors are order of $1/\gamma$, the coefficients by terms $\omega_{1,2}$ are numericaly calculated. In the case, when $\vartheta_0 \gg 1/\gamma$ analytical expression for the cross-section is obtained.

I. Процесс излучения двух фотонов с произвольной энергией при электронных столкновениях был исследован в работах В.М.Галицкого и одного из авторов [I-3]. Этот процесс представляет большой интерес для ставящихся в настоящее время опытов на встречных пучках по двум причинам: I) он может быть использован в качестве монитора для регистрации столкновения пучков; 2) в случае электрон-позитронных соударений процесс двойного тормозного излучения конкурирует с процессом двухквантовой аннигиляции; это связано с тем, что сечение двойного тормозного излучения, в отличие от сечения двухквантовой аннигиляции, не падает с ростом энергии сталкивающихся частиц.

В работах /I-3/ с точностью до членов порядка $\gamma^{-2}$ было найдено сечение двойного тормозного излучения +) $d\sigma_{\omega_1\omega_2}$, проинтегрированное по конечным состояниям электронов (поскольку электроны не регистрируются) и по всем углам вылета фотонов (что предполагает, что угловые размеры детекторов фотонов значительно превышают характерный угол излучения $1/\gamma$). Однако в реальных экспериментах по исследованию двойного тормозного излучения, которые ставятся при относительно малых энергиях, угловые размеры детекторов $2\vartheta_0$ сравнимы с величиной $1/\gamma$ (например, на установке ВЭП-I в Новосибирске [4] $\varepsilon$ =43 Мэв, $\vartheta_0 \sim 3/\gamma$). В связи с этим представляет интерес сечение излучения двух фотонов в заданный угол. Мы будем для простоты предполагать, что углы обоих детекторов одинаковы $\vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \vartheta_0$, хотя как показано в конце статьи, предлагаемый подход элементарно обобщается на случай детекторов разных размеров.

+) В статье используются обозначения работ [I-3].

2. Для качественного понимания ситуации, возникающей в данной задаче, рассмотрим излучение классических фотонов [1]. В этом случае легко получить сечение излучения в заданный угол, поскольку независимо интегрируется вклад каждого из классических токов. Рассмотрим интеграл по квадрату передачи импульса $\Delta^2 = 4x^2$ (формула (53) статьи [2]). Подинтегральная функция приведена на рис.1 для случаев: I) разрешены все углы вылета фотонов ( $f(x) = \Phi(x^2)/x^3$ ) - кривая "а"; 2) угол вылета фотонов не больше $\vartheta_0 = 1/\gamma$ - кривая "б". Видно, что основной вклад в интеграл вносит область $x \sim 1$.

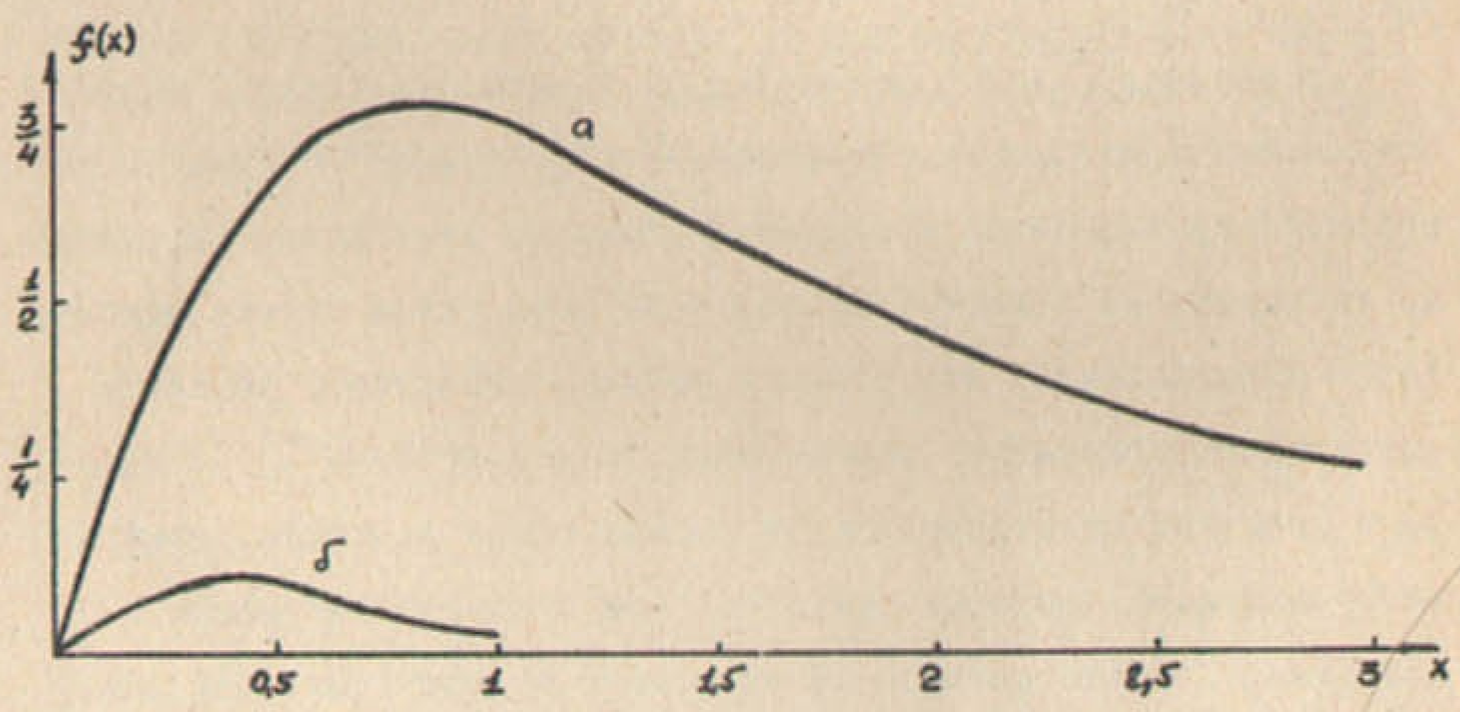


рис.I

Поскольку характерный угол излучения фотонов $\vartheta_x \sim 1/\gamma$, то при $\vartheta_0 = 1/\gamma$ мы обрезаем значительную часть области интегрирования по углу вылета фотона, что существенно уменьшает подинтегральную функцию при интегрировании по $x$, тем



более, что это относится к каждому из двух фотонов. Кроме того, при $x > 1$ вероятность излучения фотона мала при малых $\vartheta_x$ и достигает максимума только при $\vartheta_x \sim 1/\gamma$, что приводит к дополнительному подавлению подинтегральной функции при $\vartheta_0 = 1/\gamma$, которая таким образом спадает быстрее при $x > 1$.

В результате сечение излучения в угол $\vartheta_0 = 1/\gamma$ составляет лишь малую долю сечения излучения, проинтегрированного по всем углам вылета фотонов.

3. Перейдем теперь к рассмотрению излучения фотонов с произвольной энергией в заданный угол. С этой целью преобразуем формулу (3) статьи /3/ к следующему виду:

$$d\sigma = \frac{2\alpha^4}{(2\pi)^3} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \frac{d\xi_2}{\xi_2} \int \frac{d\Delta^2}{\Delta^4} dR_1 dR_2 \qquad (I)$$

где

$$dR_1 = \left[ -\frac{1}{\varkappa_3^2} + \frac{\Delta^2\left[1+(1-\xi_1)^2\right] + 4(1-\xi_1)}{2\varkappa_1\varkappa_3} - \frac{(1-\xi_1)^2}{\varkappa_1^2} \right] \xi_1 \delta(p_1+\Delta-p_3-k_1) \frac{d^3p_3}{\varepsilon_3} d\varkappa_1 d\varkappa_3 d\varphi_1$$

$$dR_2 = dR_1 \left( p_1 \to p_2, p_3 \to p_4, k_1 \to k_2, \Delta \to -\Delta, \varphi_1 \to \varphi_2 \right) \qquad (2)$$

здесь $\varphi_{1,2}$ - азимутальные углы вылета фотонов в Ц-системе при условии, что за полярные оси приняты направления векторов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ соответственно. Поскольку интегрирование по углам вылета фотона (переменные $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ) ведется в заданных пределах, оказывается целесообразным изменить порядок интегрирования, принятый в работах [2,3] и выполнить сначала интегрирование по переменным $\varkappa_3$, $\varkappa_4$.

Выполняя интегрирование по $d\rho_3 d\varphi_1$ получаем

$$\int \delta(p_1+\Delta-k_1-p_3)\frac{d^3 p_3}{\varepsilon_3}d\varphi_1 = \frac{2}{g\sin\varphi_1} \qquad (3)$$

где $g\sin\varphi_1 = \sqrt{U_1}$ ; $U_1$ есть квадратичная форма $\varkappa_3$ :

$$U_1 = c\varkappa_3^2 + b\varkappa_3 + a \qquad (4)$$

Пределы интегрирования по $\varkappa_3$ определяются нулями функции $U_1$. Этот факт легко понять с помощью простых кинематических соображений. Дело в том, что $\varphi_1$ есть угол между плоскостями $(\vec{p}_1,\vec{\Delta})$ и $(\vec{p}_1,\vec{k}_1)$, причем угол между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{k}_1$ является постоянным (поскольку фиксирована величина $\varkappa_1 = -(p_1 k_1)$). При изменении $\varphi_1$ от 0 до $2\pi$ функция $\varkappa_3 = \varkappa_3(\cos\varphi_1)$ пробегает все значения внутри интервала интегрирования, тогда пределы интегрирования по $\varkappa_3$ определяются из условия $\frac{d\varkappa_3}{d\varphi_1} = 0$, из которого следует $\sin\varphi_1 = 0$. При этом все четыре вектора $\vec{\Delta}$, $\vec{p}_1$, $\vec{k}_1$, $\vec{p}_3$ лежат в одной плоскости.

В соответствии с постановкой задачи мы будем вычислять старший член разложения сечения по степеням $\varepsilon^{-2}$ [2,3]. Поскольку мы будем вести интегрирование по $\varkappa_1$ до верхнего предела $\varkappa_{1max} \ll \varepsilon^2$, то в выражении для $U_1$ (коэффициенты $a$, $b$, $c$ в формуле (4)) мы отбросим члены порядка $\varkappa_1/\varepsilon^2$. Более того, в случае произвольных углов излучения фотона верхний предел интегрирования по $\varkappa_1$ пропорционален $\varepsilon^2$ и поэтому, ввиду сходимости интеграла, с принятой точностью может быть положен равным бесконечности. В силу этого основ-



ной вклад в интеграл по $\varkappa_1$ дают малые $\varkappa_1$ ($\varkappa_1 \sim 1$), так что всегда можно отбросить члены $\varkappa_1/\varepsilon^2$ [2]. Вследствие того, что на верхней границе области интегрирования по переменным $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ эти величины порядка $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\Delta^2$ (а не $\varepsilon^2$) и с учетом того, что основной вклад в интегральное сечение дают $\varkappa_1, \varkappa_2 \sim 1$ (см.выше) и $\Delta^2 \sim 1$ [2,3], мы отбросим также члены $\sim \varkappa_4/\varepsilon^2$. Сделав указанные выше пренебрежения, получаем

$$c = -(1-\xi_1)^2 ;\; b = 2(1-\xi_1)\left[\varkappa_1 + \frac{\xi_1\Delta^2}{2}\right];\; a = -\left[\left(\varkappa_1 - \frac{\xi_1\Delta^2}{2}\right)^2 + \xi_1^2\Delta^2\right] \qquad (5)$$

Видно, что функция $U_1$ не содержит величин $\varkappa_4$. Таким образом, с указанной точностью оказывается возможным независимо проводить интегрирование по переменным, относящимся к каждому из фотонов [2,3].

Интегрируя $R_1$ по $\varkappa_3$, получаем:

$$\int_{\varkappa_3} dR_1 = 2\pi\xi_1\left[-\frac{b}{2(-a)^{3/2}} + \frac{\Delta^2[1+(1-\xi_1)^2]+4(1-\xi_1)}{2\varkappa_1(-a)^{1/2}} - \frac{(1-\xi_1)}{\varkappa_1^2}\right]d\varkappa_1 \qquad (6)$$

имеем также

$$\int_{\varkappa_4} dR_2 = \int_{\varkappa_3} dR_1 \begin{pmatrix}\varkappa_1 \to \varkappa_2 \\ \xi_1 \to \xi_2\end{pmatrix} \qquad (7)$$

Приступим теперь к интегрированию по $\varkappa_1$. Нижний предел интегрирования определяется из условия $\vartheta_k = 0$, откуда с точностью до членов $\varepsilon^{-2}$ получаем $\varkappa_{1min} = \xi_1/2$. Верхний предел интегрирования по $\varkappa_1$ определяется предельным углом вылета фотона $\vartheta_0$ : $\varkappa_{1max} = \xi_1 \varepsilon^2 (1 - \beta\cos\vartheta_0) = \xi_1 \varkappa_0$

Если представить $\vartheta_0 = \frac{n}{\varepsilon}$ , то $\varkappa_0 \approx \frac{n^2}{2}$ при $n \ll \varepsilon$ .

Проводя элементарное интегрирование по $\varkappa_1$ (и $\varkappa_2$ соответственно), получаем следующее выражение для сечения двойного тормозного излучения:

$$d\sigma = \frac{8 r_0^2 \alpha^2}{\pi} \frac{d\xi_1}{\xi_1} \frac{d\xi_2}{\xi_2} \int \frac{dx}{x^3} \left\{ (1-\xi_1)\Phi(x^2) + \xi_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - F(x,\varkappa_0,\xi_1) \right\} \times$$

$$\times \left\{ (1-\xi_2)\Phi(x^2) + \xi_2^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - F(x,\varkappa_0,\xi_2) \right\} \qquad (8)$$

где

$$F(x,\varkappa_0,\xi_1) = \frac{1}{4}\left[ \frac{(1-\xi_1) + \left[2(1-\xi_1)+\xi_1^2\right]x^2}{x\sqrt{1+x^2}} \ln\left( \frac{2x(1+x^2) - x\varkappa_0 + \sqrt{(1+x^2)R_0}}{\varkappa_0\left[\sqrt{1+x^2}-x\right]} \right) - \right.$$

$$\left. - (1-\xi_1)\left(1 + \frac{1}{\varkappa_0} + \frac{1-\varkappa_0+2x^2}{\sqrt{R_0}}\right) \right] \qquad (9)$$

$$R_0 = \left(2x^2 - \varkappa_0\right)^2 + 4x^2 \qquad (10)$$

Ясно, что при $\varkappa_0 \to \infty$ функция $F(x,\varkappa_0,\xi_1) \to 0$ , так что формула (8) переходит в формулу (4) статьи [3].

Легко видеть, что при $x \to 0$ слагаемое $F(x,\varkappa_0,\xi_1)$, подобно остальной части выражения, стоящего в фигурных скобках, пропорционально $x^2$ , так что, как и прежде, нижний предел интегрирования по $x$ можно положить равным нулю. Аналогично, верхний предел интегрирования по $x$ можно положить равным бесконечности.



4. Входящие в формулу (8) интегралы не удается вычислить в аналитическом виде. Поэтому эти однократные интегралы были вычислены с помощью электронной вычислительной машины М-20.

Сечение двойного тормозного излучения в заданный угол представим в виде:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8 r_0^2 \alpha^2}{\pi} \left\{ \left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\varrho_1(n) + \left[ \left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_2^2}{\varepsilon^2} + \left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2} \right]\varrho_2(n) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\varepsilon^4}\varrho_3(n) \right\} \frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} \qquad (11)$$

Численные значения функций $\varrho_m(n)$ приведены в таблице I.

Таблица I

значения коэффициентов $\varrho_m(n)$ в формуле (II)

| $n$ $(\vartheta_0 = \frac{n}{\gamma})$ | $\varrho_1(n)$ | | $\varrho_2(n)$ | | $\varrho_3(n)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | ЭВМ | формула (I2) | ЭВМ | формула (I2) | ЭВМ | формула (I2) |
| I | 0,081 | - | 0,065 | - | 0,053 | - |
| 2 | 0,406 | - | 0,311 | - | 0,237 | - |
| 3 | 0,743 | - | 0,555 | - | 0,412 | - |
| 4 | I,02 | I,07 | 0,744 | 0,748 | 0,543 | 0,534 |
| 5 | I,23 | I,24 | 0,885 | 0,881 | 0,638 | 0,631 |
| I0 | I,77 | I,77 | I,23 | I,23 | 0,863 | 0,862 |

5. В области значений $1 \ll n \ll \varepsilon$ оказывается возможным получить аналитическое выражение для искомого сечения. В этом случае асимптотические выражения для коэффициентов $\varrho_m(n)$ в формуле (II) имеют вид:

$$\eta_1(n) = \frac{5}{4} + \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{n^2}\left[10\ln^2(n) - \frac{\pi^2}{2} + \frac{11}{2}\right]$$

$$\eta_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2n^2}\left[10\ln^2(n) + 5\ln(n) - \frac{\pi^2}{2} + \frac{9}{2}\right]$$

$$\eta_3(n) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{2n^2}\left[5\ln^2(n) + 5\ln(n) - \frac{\pi^2}{4} + \frac{15}{2}\right] \qquad (12)$$

Как видно из таблицы I, начиная с $n=4$ результаты, получаемые с помощью формул (12), находятся в хорошем соответствии с результатами численного расчета.

Зависимость коэффициентов $\eta_m(n)$ от $n$ приведена на рис.2.

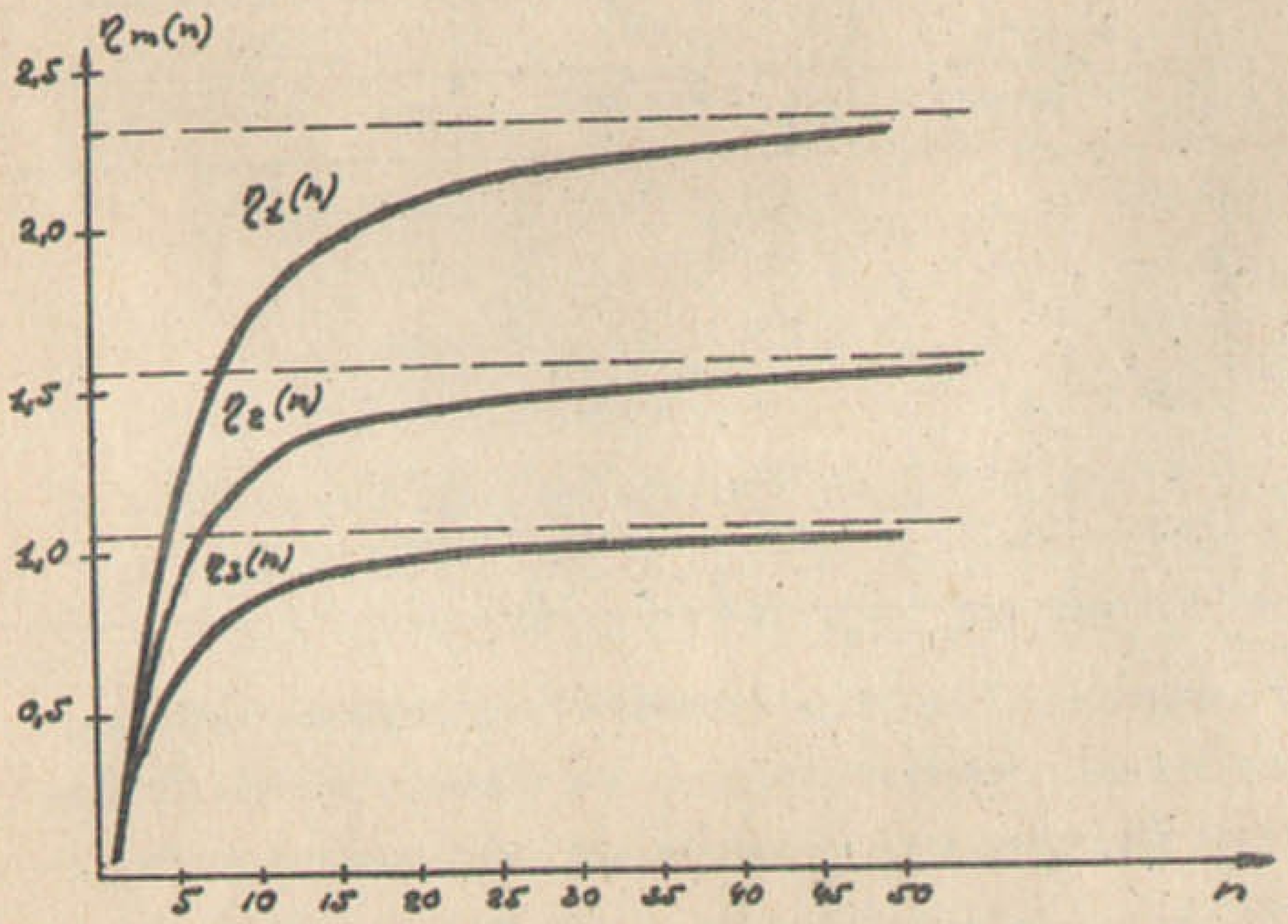


рис.2



6. Мы рассмотрели случай симметричных детекторов. В случае несимметричных детекторов можно непосредственно воспользоваться формулой (8), только функции $F(x, x_{0i}, \xi_i)$ будут зависеть каждая от своего предельного угла. Особый интерес представляет случай, когда угловые размеры одного из счетчиков очень велики $\vartheta_{20} \gg 1/\varepsilon$, а второго – малы $\vartheta_{10} \sim 1/\varepsilon$, тогда для одного из фотонов можно провести интегрирование по всем углам вылета фотона (как в [1-3], а для рассмотрения излучения второго фотона воспользоваться подходом этой статьи. Сечение процесса представим в виде:

$$d\sigma_{\omega_1\omega_2} = \frac{8 r_0^2 \alpha^2}{\pi}\left\{\left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\mu_1(n) + \left(1-\frac{\omega_2}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2}\mu_2(n) + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{\omega_1}{\varepsilon}\right)\frac{\omega_2^2}{\varepsilon^2}\mu_3(n) + \frac{\omega_1^2\omega_2^2}{\varepsilon^4}\mu_4(n)\right\}\frac{d\omega_1}{\omega_1}\frac{d\omega_2}{\omega_2} \qquad (13)$$

значения функций $\mu_m(n)$ приведены в таблице 2.

Для случая $1 \ll n \ll \varepsilon$ легко получить также асимптотические выражения для функций $\mu_m(n)$:

$$\mu_1(n) = \frac{5}{4} + \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{3}{n^2}\left[2\ln^2(n) + 1\right]$$

$$\mu_2(n) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{n^2}\left[3\ln^2(n) + \ln(n) + \frac{3}{2}\right]$$

$$\mu_3(n) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{1}{n^2}\left[3\ln^2(n) + 2\ln(n) + 1\right] \qquad (14)$$

$$\mu_4(n) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{3}{2n^2}\left[\ln^2(n) + \ln(n) + 1/2\right]$$

Эти выражения, так же, как формулы (12), начиная с $n=4$ находятся в хорошем согласии с результатами численного расчета (см.таблицу 2).

## Таблица 2

Значения коэффициентов $\mu_m(n)$ в формуле (13)

| $n$ $(\omega/\omega_0 = n/\gamma)$ | $\mu_1(n)$ ЭВМ | $\mu_1(n)$ формула (14) | $\mu_2(n)$ ЭВМ | $\mu_2(n)$ формула (14) | $\mu_3(n)$ ЭВМ | $\mu_3(n)$ формула (14) | $\mu_4(n)$ ЭВМ | $\mu_4(n)$ формула (14) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,299 | — | 0,281 | — | 0,215 | — | 0,199 | — |
| 2 | 0,805 | — | 0,628 | — | 0,568 | — | 0,441 | — |
| 3 | 1,16 | — | 0,859 | — | 0,811 | — | 0,601 | — |
| 4 | 1,40 | 1,40 | 1,01 | 1,01 | 0,972 | 0,956 | 0,705 | 0,696 |
| 5 | 1,56 | 1,56 | 1,12 | 1,12 | 1,08 | 1,07 | 0,776 | 0,770 |
| 10 | 1,95 | 1,95 | 1,35 | 1,35 | 1,34 | 1,34 | 0,930 | 0,930 |

Авторы выражают благодарность А.П.Онучину за обсуждение вопросов, связанных с экспериментом, и Г.И.Русовой и Э.З.Боровской за помощь в численных вычислениях.



## Литература

1. V.N.Bayer, V.M.Galitsky. Phys.Lett. 13, 355, 1964.
2. В.Н.Байер, В.М.Галицкий. ЖЭТФ, 49, 661, 1965.
3. В.Н.Байер, В.М.Галицкий. ЖЭТФ-письма, 2, 259, 1965.
4. Г.И.Будкер, Е.А.Кушниренко, А.А.Наумов и др. Доклад на Международной конференции по ускорителям во Фраскати. 1965.

Ответственный за выпуск В.М.Катков

Отпечатано на ротапринте в Институте Ядерной физики СО АН СССР

Тираж 200 экз. Бесплатно

Поступило в печать 10.1-66 г.