ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 45

Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский

К теории когерентной устойчивости сгустка заряженных частиц

НОВОСИБИРСК 1966

АННОТАЦИЯ

Исследуется влияние конечной проводимости стенок накопителя на устойчивость когерентных бетатронных колебаний сгустка конечной длины.

Влияние конечной проводимости стенок на когерентные бетатронные колебания сбунчированного пучка в накопителях исследовалось в работе /I/. Однако в этой работе выражение декремента было получено для бесконечно короткого сгустка, и не принимались во внимание эффекты, обязанные скорости поперечного движения. В данной работе проведен расчет декремента для сгустка конечной длины, движущегося в камере прямоугольного сечения $H \times W$ и проводимостями стенок σ_x и σ_z соответственно.

Для эффекта, рассмотренного в /I/, достаточно было знать асимптотическую зависимость остаточного магнитного поля от времени ($H^{\sigma} \sim (t)^{-\frac{1}{2}}$), в то время как в данной задаче необходимо знать поведение поля на размере самого сгустка.

Методом функции Грина с использованием граничных условий Леонтовича в работе получены выражения для полей токов проводимости, возбуждаемых сгустком, в виде сумм по поперечным волновым числам. Плотность тока была выбрана в виде:

$$\vec{j}(\vec{r},\vec{v},t) = Ne\, g(y-vt)\,\delta\left(x-\frac{W}{2}\right)\delta\left(z-z(y,t)\right), \qquad (I.I)$$

где:

Ne – полный заряд сгустка,

$\vec{v} = \{0, v, \dot{z}\}$

$z(y,t) = a\cos\{\omega_\beta t + \varphi(y-vt)\}$

ω_β – бетатронная частота,

$g(y-vt)$ – азимутальное распределение плотности частиц в сгустке. Зависимость $\varphi(y-vt)$ предполагается линейной: $\varphi = k_0(y-vt)$

Очевидно, полное поле стенок, действующее на частицу сгустка, является суперпозицией полей возбуждаемых отдельными частицами. В связи с асимметрией полей проводимости относительно частицы, возбуждающей эти поля, величина результирующего поля существенно меняется на длине сгустка. Поэтому мощность сил полей проводимости, усредненная по бетатронным колебаниям, получается зависящей от положения частицы в сгустке:

$$\overline{W(\theta,\Psi)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\theta,\Psi)\,d\Psi = W_\theta$$

где $\theta = y - vt$

Если внутри сгустка происходит достаточно быстрое перемешивание частиц при сохранении азимутального распределения и когерентности поперечного движения, то декремент бетатронных колебаний сгустка как целого может быть определен следующим образом:

$$\delta = -\left\langle \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \right\rangle = -(m\omega_s^2 a^2)^{-1}\int W_\theta\, g(\theta)\, d\theta \qquad (I.2)$$

При вычислениях были сделаны следующие основные предположения:

$$|\xi_\pm|\,\gamma\text{æ}\,\theta_0 \gg 1 \;, \qquad (I.3)$$

$$\frac{\omega_s}{\text{æ}} \ll 1 \;, \qquad (I.4)$$

где: $\xi_\pm = \frac{\lambda}{V} \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$, $\lambda = \frac{\gamma\omega_s}{\text{æ}}$

$$\text{æ}^2 = K_x^2 + K_z^2 = \left(\frac{m\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2,$$ причем $W \approx H$, m n одновременно не равны нулю,

γ - релятивистский фактор,

θ_0 - длина сгустка

(скорость света C всюду полагается равной единице).

В случае незамкнутой камеры и гауссова распределения плотности, выражение декремента при условиях (I.2) и (I.3) имеет вид:[I)]

$$\delta = \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \frac{Ne^2}{\gamma m_0 H^2 W}\sqrt{\frac{\theta_0}{2\sqrt{\sigma_z}}}\left(\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4\right) \qquad (I.5)$$

где:

$$\Delta_2 = \frac{V^2}{\omega_s\theta_0}\,\mathrm{Im}\,\mathcal{D}_{\frac12}(z)\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{K_x H \sin\frac{m\pi}{2}}{\mathrm{sh}\frac{K_x H}{2}}\right)^2 + \frac{H}{W}\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}}\sum_{n=1}\left(\frac{K_z W \cos\frac{n\pi}{2}}{\mathrm{ch}\frac{K_z W}{2}}\right)^2\right],$$

I) Соответствующие когерентные добавки к частоте приведены в разделе IУ.

$$\Delta_3 = 2\left(\frac{VH}{\theta_0}\right)^2 \mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_{\frac12}(z)\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{\mathrm{sh}\frac{K_x H}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

$\mathcal{D}_{\frac12}(z)$ выражается через функцию параболического цилиндра $D_{\frac12}(z)$:

$$\mathcal{D}_{\frac12}(z) = D_{\frac12}(z)\exp\left(\frac{z^2}{4}\right),$$

аргумент $z = i\theta_0\left(K_0 - \frac{\omega_s}{V}\right)$.

Член $\Delta_4 \approx \Delta_2\left(\frac{H^2}{\omega_s\theta_0}\right)^{\frac12}$ при $\lambda \gg 1$ и обязан полям излучения, в то время как при $\lambda \leq 1$, $\Delta_4 \sim |\gamma\text{æ}\,\theta_0\,\xi_\pm|^{-1}\Delta_2 \ll \Delta_2$ Более точная оценка величины Δ_4 в случае незамкнутой камеры не представляет интереса.

В двух предельных случаях $|z| \ll 1$ и $|z| \gg 1$ имеем:

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{D}_{\frac12}(z) = -\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left(K_0 - \frac{\omega_s}{V}\right)\theta_0, & |z| \ll 1 \\ \frac{\mathrm{sign}(-iz)}{\sqrt{2|z|}}, & |z| \gg 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{D}_{-\frac12}(z)\right) = -\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right), & |z| \ll 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}\,|z|^3}, & |z| \gg 1 \end{cases}$$

Метод, развитый в работе, легко переносится на случай замкнутой камеры. При этом в выражении декремента содержится член, полученный ранее в работе /I/ без учета проводимости боковых стенок (см.IУ.2). Члены Δ_2 и Δ_3 в случае короткого сгустка получают малые добавки $\sim \frac{\theta_0}{2\pi R}$ (R - радиус камеры). В случае же непрерывного гофрированного сгустка выражение декремента получается из (I.5) заменой $N \rightarrow N\sqrt{\pi}\,\theta_0/2\pi R$ с последующим устремлением θ_0 к бесконечности. (Множитель $\sqrt{\pi}$ появляется при переходе от гауссова распределения в коротком сгустке к непрерывному). Это выражение, без учета членов излучения, отличается от выражений, полученных в /I,2/, лишь вкладом проводимости боковых стенок (см.IУ.3).

Величина Δ_ψ для замкнутой камеры существенно зависит от конкретных геометрических свойств камеры, поэтому выражение для Δ_ψ, полученное для данной геометрии, может рассматриваться только как модельное и не приводится в работе из-за его громоздкости. Следует заметить, что в случае замкнутой камеры возможно её резонансное возбуждение. Однако, оценка эффектов конечной проводимости в этом случае не может быть сделана методом, примененным в этой работе.

Таким образом, влияние конечной проводимости на устойчивость когерентного поперечного движения сгустка конечной длины можно разделить условно на следующие эффекты:

1) Эффект, обязанный периодичности азимутального движения сгустка. Соответствующий ему член в декременте определяется полным зарядом сгустка и существенно зависит от частоты бетатронных колебаний (см./I/). Этот эффект, очевидно, отсутствует в бесконечной камере.

2) Учет конечности длины сгустка приводит к появлению в декременте члена δ_2, который может быть получен в рамках /I/. Этот член порядка $\sim \nu(\theta_0/R)^{\frac{1}{2}}$ по отношению к первому и зависит от распределения бетатронных фаз по длине сгустка. В частности, он равен нулю при $K_0 V = \omega_\beta$ (при этом все частицы движутся по одной траектории).

3) "Краевой" эффект, обязанный членам $\sim (t)^{-\frac{1}{2}}$ в электрическом и магнитном полях, непосредственно связан с Z- составляющей тока. Он дает в декремент отрицательный вклад порядка $\sim H^2/\theta_0^2$ по отношению к δ_2, т.е. для достаточно короткого сгустка (при соблюдении, однако, условия (I.3)), этот эффект может быть сравним с двумя первыми.

Эффекты 2) и 3) могут быть условно названы "мгновенными", т.к. они не связаны с "возвращением" сгустка. Учет периодичности дает поправки к членам Δ_2 и Δ_3 $\sim \theta_0/2\pi R$.

4) Эффекты, обязанные полям излучения. Ввиду сильной зависимости последних от геометрии камеры, их оценка требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае.

II. Функция Грина

Потенциалы электромагнитного поля в полости с конечной проводимостью стенок являются решениями уравнений

$$\Box \varphi = -4\pi\rho\,, \qquad \Box A_\alpha = -4\pi j_\alpha\,, \tag{П.I}$$

удовлетворяющими граничным условиям на стенках. Они формально могут быть представлены:

$$\varphi = \varphi^{\infty} + \varphi^{\sigma}, \qquad A_\alpha = A_\alpha^{\infty} + A_\alpha^{\sigma} \tag{П.2}$$

где φ^{∞} и A_α^{∞} удовлетворяют уравнениям (П.I) и граничным условиям для бесконечной проводимости, в то время как φ^{σ} и A_α^{σ} удовлетворяют однородным уравнениям

$$\Box \varphi^{\sigma} = 0\,, \qquad \Box A_\alpha^{\sigma} = 0 \tag{П.3}$$

Воспользовавшись инвариантностью уравнений Максвелла и условия Лорентца

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A} = 0 \tag{П.4}$$

относительно "специализированного градиентного преобразования второго рода", можно положить $\varphi^{\sigma} = 0$. Тогда:

$$\vec{E} = \vec{E}^{\infty} + \vec{E}^{\sigma} = -\nabla\varphi^{\infty} - \frac{\partial \vec{A}^{\infty}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}^{\sigma}}{\partial t}, \qquad \vec{H} = \vec{H}^{\infty} + \vec{H}^{\sigma} = rot\vec{A}^{\infty} + rot\vec{A}^{\sigma} \tag{П.5}$$

При произвольном распределении токов в полости потенциалы A_α можно представить в виде:

$$A_\alpha(\vec{r},t)=\sum_\beta\int d\vec{r}'dt'\mathcal{D}_{\alpha\beta}(\vec{r}|\vec{r}',t-t')j_\beta(\vec{r}',t') \qquad (\text{П.6})$$

где $\mathcal{D}_{\alpha\beta}=\mathcal{D}^{-}_{\alpha\beta}+\mathcal{D}^{\sigma}_{\alpha\beta}$ – запаздывающая функция Грина, удовлетворяющая уравнению:

$$\Box\,\mathcal{D}_{\alpha\beta}=-4\pi\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\delta(t-t') \qquad (\text{П.7})$$

и условию причинности:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta}(r|r',t-t')=0 \qquad \text{для} \qquad t'>t\,.$$

(Заметим, что для камеры прямоугольного сечения $\mathcal{D}^{-}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\mathcal{D}_{\alpha\alpha}$).

$\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ должна быть построена так, чтобы фурье-образы полей

$$\vec{E}_\omega=(2\pi)^{-1}\int dt\,\vec{E}(t)e^{i\omega t}\,,\quad \vec{H}_\omega=(2\pi)^{-1}\int dt\,\vec{H}(t)e^{i\omega t}$$

удовлетворяли граничным условиям Леонтовича:

$$[\vec{n}\vec{E}_\omega]=\zeta\left[\vec{n}[\vec{H}_\omega\vec{n}]\right], \qquad (\text{П.8})$$

где: $\vec{n}$ – нормальный к поверхности единичный вектор, направленный внутрь металла;

$$\zeta=\sqrt{\frac{-i\omega}{4\pi\sigma}}=\frac{|\zeta|}{\sqrt{2}}\begin{cases}1-i & \omega>0\\ 1+i & \omega<0\end{cases}$$

В первом приближении теории возмущений по параметру ζ условие Леонтовича для фурье-образа функции Грина

$$G^{\sigma}_{\alpha\beta}(\vec{r}|\vec{r}',\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\mathcal{D}^{\sigma}_{\alpha\beta}(\vec{r}|\vec{r}',t)e^{i\omega t}$$

имеет вид:

$$\left|[\vec{l}_x\vec{n}]\right|i\omega G^{\sigma}_{\alpha\beta}=\zeta\Big\{[\vec{l}_x\vec{n}]_\alpha\Big(\frac{\partial G^{-}_{z\beta}}{\partial y}-\frac{\partial G^{-}_{y\beta}}{\partial z}\Big)+$$

$$+[\vec{l}_y\vec{n}]_\alpha\Big(\frac{\partial G^{-}_{x\beta}}{\partial z}-\frac{\partial G^{-}_{z\beta}}{\partial x}\Big)+[\vec{l}_z\vec{n}]_\alpha\Big(\frac{\partial G^{-}_{y\beta}}{\partial x}-\frac{\partial G^{-}_{x\beta}}{\partial y}\Big)\Big\}, \qquad (\text{П.9})$$

где: $$G^{-}_{\alpha\beta}=-\frac{2\delta_{\alpha\beta}}{HW}\int dk_y\sum_{m,n}\frac{g^{-}_{\alpha\alpha}(x,z|x',z')}{(\omega+i\varepsilon)^2-K^2}e^{ik_y(y-y')}\,,$$

$$g^{-}_{xx}=C_xS_zC_{x'}S_{z'}\,,\quad g^{-}_{yy}=S_xS_zS_{x'}S_{z'}\,,\quad g^{-}_{zz}=S_xC_zS_{x'}C_{z'}\,.$$

Здесь введены обозначения:

$$C_x=\cos k_xx\,,\quad S_x=\sin k_xx\,,\quad k_x=\frac{m\pi}{W}\,,\quad m=0,\pm1,\ldots$$

$$C_z=\cos k_zz\,,\quad S_z=\sin k_zz\,,\quad k_z=\frac{n\pi}{H}\,,\quad n=0,\pm1,\ldots$$

$$K^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2\,.$$

Представляя

$$G^{\sigma}_{\alpha\beta}=-\frac{2}{HW}\int dk_y\sum_{m,n}\frac{g^{\sigma}_{\alpha\beta}(x,z|x',z')}{(\omega+i\varepsilon)^2-K^2}e^{ik_y(y-y')}$$

получаем для $g^{\sigma}_{\alpha\beta}$ следующие выражения, удовлетворяющие условиям (П.9) и условию "поперечности" $\frac{\partial}{\partial x}G^{\sigma}_{x\beta}+\frac{\partial}{\partial y}G^{\sigma}_{y\beta}+\frac{\partial}{\partial z}G^{\sigma}_{z\beta}=0$:

$$g^{\sigma}_{x\beta}=C_xB^S_zP_z+S_zB^C_xR_x\,,$$

$$g_{y\beta}=S_xB^S_zQ_z+S_zB^S_xQ_x\,,$$

$$g_{z\beta}=C_zB^S_xP_x+S_xB^C_zR_z\,,$$

где:

$$P_z=-\Big(\frac{i}{4\pi\omega\sigma_z}\Big)^{\frac12}\left[\delta_{x\beta}k_zC_{x'}S_{z'}-\delta_{z\beta}k_xS_{x'}C_{z'}\right],$$

$$Q_z=-\Big(\frac{i}{4\pi\omega\sigma_z}\Big)^{\frac12}\left[\delta_{y\beta}k_zS_{x'}S_{z'}-i\,\delta_{z\beta}k_yS_{x'}C_{z'}\right], \qquad (\text{П.10})$$

$$R_z=-\frac{1}{q_z}\Big(\frac{i}{4\pi\omega\sigma_z}\Big)^{\frac12}\left[(k_x^2+k_y^2)\delta_{z\beta}S_{x'}C_{z'}-k_xk_z\delta_{x\beta}C_{x'}S_{z'}+ik_yk_z\delta_{y\beta}S_{x'}S_{z'}\right],$$

$$B^S_z=\frac{\sin q_z(z-H)+(-1)^n\sin q_zz}{\sin q_zH}\,,\quad B^C_z=\frac{1}{q_z}\frac{d}{dz}B^S_z\,.$$

P_x, Q_x, R_x, B_x^s и B_x^c получаются из выражений (II.10) заменой $x \to z, z \to x$;

σ_x и σ_z – проводимости вертикальных и горизонтальных стенок, соответственно;

$$q_x^2 = \omega^2 - K_y^2 - K_z^2 \,, \quad q_z^2 = \omega^2 - K_y^2 - K_x^2 \,.$$

Появление волновых чисел q_x и q_z связано с тем, что $G^{\sigma}_{\alpha\beta}$ должны удовлетворять однородному уравнению $(\Delta + \omega^2)\, G^{\sigma}_{\alpha\beta} = 0$.

III. Вычисление полей

F_z – компонента силы взаимодействия частицы сгустка с полями $\vec{E}^{\sigma}$ и $\vec{H}^{\sigma}$ равна

$$F_z^{\sigma} = e\left(E_z^{\sigma} - vH_x^{\sigma}\right) = e\left[v\frac{\partial A_y^{\sigma}}{\partial z} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)A_z^{\sigma}\right] \qquad (\text{III}.1)$$

Для вычисления A_y^{σ} и A_z^{σ} необходимы следующие компоненты $g^{\sigma}_{\alpha\beta}$:

$$g^{\sigma}_{yz} = -\left(\frac{i}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{K_z}{\sqrt{\omega\sigma_z}} S_x B_z^s + \frac{K_x}{\sqrt{\omega\sigma_x}} S_z B_x^s\right) S_{x'} S_{z'} \,,$$

$$g^{\sigma}_{yz} = \frac{iK_y}{\sqrt{-4\pi i\omega\sigma_z}} S_x B_z^s S_{x'} C_{z'} \,,$$

$$g^{\sigma}_{zy} = -\frac{iK_y K_z}{q_z\sqrt{-4\pi i\omega\sigma_z}} S_x B_z^c S_{x'} S_{z'} \,,$$

$$g^{\sigma}_{zz} = -\left(\frac{i}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{K_x}{\sqrt{\omega\sigma_x}} C_z B_x^s + \frac{K_x^2 + K_y^2}{q_z\sqrt{\omega\sigma_z}} S_x B_z^c\right) S_{x'} C_{z'} \,.$$

Выполняя интегрирование по $\omega, K_y, x', z', y', \tau$ в интегралах (см. Дополнение):

$$A^{\sigma}_{\alpha}(\vec{r},t) = -\frac{1}{\pi HW}\sum_{\beta,m,n}\int dK_y\, d\omega\, \frac{g^{\sigma}_{\alpha\beta}(x,z\,|\,x',z')}{(\omega+i\varepsilon)^2 - K^2}\, e^{iK_y(y-y')-i\omega\tau}\, j_{\beta}(\vec{r}\,',t-\tau)\, d\vec{r}\,'\, d\tau \,, \qquad (\text{III}.2)$$

получаем в линейном приближении по амплитуде бетатронных колебаний:

$$v\frac{\partial A_y^{\sigma}}{\partial z} = \frac{va}{WH}\int d\theta' g(\theta')\, e^{-i\varphi(\theta')}\left\{\frac{1}{H\sqrt{\sigma_z}}\sum_{m,n,n'}(K_z K_z')^2\frac{1+(-1)^{n+n'}}{K_z^2 - K_z'^2} S_x S_{\frac{W}{2}} C_z' C_{\frac{H}{2}}\left(v + \frac{i\omega_s}{K_z^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathcal{L}_z(\theta-\theta') + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{W\sqrt{\sigma_x}}\sum_{n,m,m'} K_z^2 K_x K_x'\frac{1+(-1)^{m+m'}}{K_x^2 - K_x'^2} S_x' S_{\frac{W}{2}} C_z C_{\frac{H}{2}}\mathcal{L}_x(\theta-\theta')\right\} e^{-i\omega_s t} + \text{к.с.} + \Phi(x,z,\theta); \qquad (\text{III}.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)A_z^{\sigma} = -\frac{i\omega_s a}{HW}\int d\theta' g(\theta')\, e^{-i\varphi(\theta')}\left\{\frac{1}{H\sqrt{\sigma_z}}\sum_{m,n,n'}K_z^2\frac{1+(-1)^{n+n'}}{K_z^2 - K_z'^2} S_x S_{\frac{W}{2}} C_z' C_{\frac{H}{2}}\left[\frac{i\omega_s}{K_z^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + v\frac{\partial}{\partial\theta}\right]\mathcal{L}_z(\theta-\theta') - \frac{i\omega_s}{W\sqrt{\sigma_x}}\sum_{n,m,m'}K_x K_x'\frac{1+(-1)^{m+m'}}{K_x^2 - K_x'^2} S_x' S_{\frac{W}{2}} C_z C_{\frac{H}{2}}\mathcal{L}_x(\theta-\theta')\right\} e^{-i\omega_s t} + \text{к.с.};$$

где:

$$\mathcal{L}_z(\theta) = L(\varkappa_z,\theta) - L(\varkappa,\theta) \,,$$

$$\mathcal{L}_x(\theta) = L(\varkappa_x,\theta) - L(\varkappa,\theta) \,,$$

$$L(\varkappa,\theta) = -2\sqrt{\frac{\gamma}{v\varkappa^2(\lambda^2-1)}}\, e^{-\frac{i\omega_s\theta}{v}}\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i\xi_- s}}{\sqrt{2i\xi_-}} - \dfrac{\mathcal{D}_1(\sqrt{2i\xi_- s})}{\sqrt{2i\xi_-}} + \dfrac{\mathcal{D}_1(\sqrt{2i\xi_+ s})}{\sqrt{2i\xi_+}} \,, & \theta < 0 \\[2ex] \sqrt{\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{i\xi_+ s}}{\sqrt{2i\xi_+}} & \theta < 0\end{cases} \qquad (\text{III}.4)$$

Функции $\mathcal{D}_1(z)$ комплексного переменного z выражаются через функции параболического цилиндра $D_1(z)$: $\mathcal{D}_1(z) = D_1(z)\cdot\exp\left(\frac{z^2}{4}\right)$.

Здесь введены обозначения: $K_x' = \frac{m'\pi}{W}$, $K_z' = \frac{n'\pi}{H}$;

$$S_x' = \sin K_x' x \,, \quad S_{\frac{W}{2}} = \sin K_x\frac{W}{2} \,; \quad C_z' = \cos K_z' z \,, \quad C_{\frac{H}{2}} = \cos K_z\frac{H}{2} \,;$$

$$\varkappa = \sqrt{K_x^2 + K_z^2} \,; \quad \varkappa_x = \sqrt{K_x'^2 + K_z^2} \,; \quad \varkappa_z = \sqrt{K_x^2 + K_z'^2} \,;$$

$$\lambda = \frac{\gamma\omega_s}{\varkappa} \,, \quad \xi_{\pm} = \frac{\lambda}{v} \pm \sqrt{\lambda^2 - 1} \,; \quad s = \gamma\varkappa\theta \,.$$

Член $\Phi(x, z, \theta)$, не зависящий от Ψ, соответствует движению сгустка в отсутствии бэтатронных колебаний, и поэтому не может давать вклад в декремент.

$\theta - \theta'$ в (Ш 3) есть разность азимутов пробной частицы и точечного заряда, создающего поле.

Остановимся кратко на зависимости $L(\varkappa, \theta)$ от азимута θ.

I) $\lambda < 1$;

из (Ш.4) при $|S| \gg 1$ получаем:

$$L(\varkappa,\theta) = L(\varkappa,0)\, e^{-i\frac{\omega_s \theta}{v}} \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{|S|}}, & \theta < 0 \\[2ex] \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, \dfrac{e^{i\frac{\lambda}{v}S - \sqrt{1-\lambda^2}S}}{\sqrt{2i\xi_+}}, & \theta > 0 \end{cases} \tag{Ш.5}$$

2) $\lambda \gg 1$;

в этом случае при $|\xi_- S| \gg 1$:

$$L(\varkappa,\theta) \simeq L(\varkappa,0)\, e^{-i\frac{\omega_s \theta}{v}} \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\sqrt{|S|}} + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}\lambda}\, \dfrac{e^{i\frac{S}{2\lambda}}}{\sqrt{i}}, & \theta < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2\lambda}}\, \dfrac{e^{i2\lambda S}}{\sqrt{i}}, & \theta > 0 \end{cases}$$

Экспоненциальные члены в (Ш.4), описывающие волновую часть полей $\vec{E}^c$ и $\vec{H}^c$, не отличаются зависимостью по θ от полей $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$. Разность амплитуд этих членов спереди и сзади от возбуждающей частицы объясняется зависимостью полей токов проводимости от частоты

(дисперсия "диэлектрической проницаемости"). Как и в случае бесконечной проводимости, эта часть полей экспоненциально спадает с расстоянием при $\lambda < 1$, что соответствует "закритичности" волновода.

Дополнительные члены в (Ш.4) при $\theta < 0$ соответствуют остаточным полям, отсутствующим в случае бесконечной проводимости. Использование асимптотического поведения этих членов $\sim \frac{1}{\sqrt{|\theta|}}$, как видно из (Ш.5), справедливо на расстояниях $|\theta| \gg \frac{1}{\gamma\varkappa|\xi_-|}$. Характерно, что при этом условии остаточные поля не зависят от γ.

IУ. Декременты и сдвиг частоты

Расчет δ был сделан в предположении гауссова распределения плотности $g(\theta) = (\sqrt{\pi}\theta_0)^{-1} \exp(-\frac{\theta^2}{\theta_0^2})$, линейной зависимости $\varphi(\theta) = K_\theta \theta + Const$ и условий (I.3) и (I.4).

Выполняя интегрирование по θ, θ' и Ψ в (I.2), получаем:

$$\delta = \frac{Ne^2 v}{\gamma m_0 W H} \operatorname{Im}\Bigg\{ \frac{1}{H\sqrt{6_z}} \sum_{m,n,n'} \frac{1+(-1)^{n+n'}}{K_z^2 - K_z'^2} S^2_{\frac{W}{2}} C'_{\frac{H}{2}} C_{\frac{H}{2}} \Big[\frac{(K_z K_z')^2}{\omega_s} v + i(K_z^2 + K_z'^2)\hat{A} + $$

$$+ \frac{i\omega_s}{v}(\hat{B} - K_x^2) \Big] \overline{\mathcal{Z}}_z + \frac{v}{W\sqrt{6_x}} \sum_{n,m,m'} \frac{1+(-1)^{m+m'}}{K_x^2 - K_x'^2} \jmath'_{\frac{W}{2}} S_{\frac{W}{2}} C^2_{\frac{H}{2}} \Big(K_z^2 + \frac{\omega_s^2}{v^2}\Big) \frac{K_x K_x'}{\omega_s} \overline{\mathcal{Z}}_x \Bigg\}, \tag{IУ.I}$$

где:

$$\overline{\mathcal{Z}}_z = \bar{L}(\varkappa_z) - \bar{L}(\varkappa),$$

$$\overline{\mathcal{Z}}_x = \bar{L}(\varkappa_x) - \bar{L}(\varkappa),$$

$$\bar{L}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa^2}\sqrt{\frac{2}{v\theta_0}}\, \mathcal{D}_{-\frac{1}{2}}(z) - \sqrt{\frac{\gamma}{v\varkappa^3(\lambda^2-1)}} \Big[\frac{\mathcal{D}_1(z^+ - z)}{\sqrt{2i\xi_+}} + \frac{\mathcal{D}_1(z^- + z)}{\sqrt{2i\xi_-}} \Big];$$

$$\hat{A} = -\frac{1}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{B} = -\frac{1}{\theta_0^2}\Big(1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big);$$

$$z = i\theta_0\Big(K_\theta - \frac{\omega_s}{v}\Big), \quad z^\pm = \mp i\xi_\pm \gamma\varkappa\theta_0.$$

Первое слагаемое в $\bar{L}(\varkappa)$ связано с остаточными полями, остальные соответствуют волновым полям.

Выполняя, по возможности, суммирования по поперечным числам, получаем выражения (I.5).

Не учтённые в /1/, /2/ и /3/ добавки в декремент, связанные с конечной проводимостью боковых стенок, имеют вид:

1) короткий сгусток:

$$\delta_x = \frac{Ne^2 R}{2\gamma m_0 H W^2 \sqrt{2\pi R \nu \sigma_x}\,\nu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k \nu}{\sqrt{k}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_z W C_{\frac{n}{2}}}{ch\frac{k_z W}{2}}\right)^2; \qquad \text{(IУ.2)}$$

2) гофрированный непрерывный сгусток:

$$\delta_x = \pm \frac{Ne^2 R}{2\gamma m_0 H W^2 \sqrt{2\pi R \nu \sigma_x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|m \pm \nu|}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_z W C_{\frac{n}{2}}}{ch\frac{k_z W}{2}}\right)^2. \qquad \text{(IУ.3)}$$

В заключение приведем когерентную добавку к бетатронной частоте, обязанную "мгновенным" эффектам. При условиях (I.4) и (I.3) эта добавка, как функция положения частицы в сгустке, имеет следующий вид:

$$\Delta\omega(\theta) = -\frac{Ne^2 \nu^{\frac{3}{2}}}{\gamma m_0 W H^2 \sqrt{\sigma_z}} Re \int_0^{\infty} \frac{d\theta'}{\sqrt{\theta'}}\left\{ e^{\frac{i\omega_s\theta'}{\nu}}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{k_x H S_{\frac{m}{2}}}{sh\frac{k_x H}{2}}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{H}{W}\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_z W C_{\frac{n}{2}}}{ch\frac{k_z W}{2}}\right)^2 + i\frac{\omega_s H^2}{\nu}\frac{\partial}{\partial\theta'}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{S_{\frac{m}{2}}}{sh\frac{k_x H}{2}}\right)^2\right] e^{-ik_0\theta'} +$$

$$\left. + \left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{k_x H S_{\frac{m}{2}}}{ch\frac{k_x H}{2}}\right)^2 - \frac{H}{W}\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{k_z W S_{\frac{n}{2}}}{ch\frac{k_z W}{2}}\right)^2\right]\right\} g(\theta' + \theta).$$

Вклад в сдвиг частоты когерентных колебаний и в среднеквадратичный разброс частот дают все члены (IУ.4), в то время как вклад сдвиг средней частоты колебаний частиц определяется только последними двумя членами, обязанными $\Phi(x,z,\theta)$ в формуле (III.3).

x x x

Авторы признательны Б.В.Чирикову, А.Н.Скринскому и С.Т.Беляеву за полезные обсуждения и интерес к работе.

Дополнение

Для вычисления интегралов в (Ш.2) удобно разложить B_z^s, B_z^{ε}, B_x^s в ряды Фурье. Например:

$$B_z^s = \frac{1}{H}\sum_{n'} \frac{1+(-1)^{n+n'}}{\omega^2 - K'^2} K_z' \sin K_z' z ,$$

где: $K_z' = \frac{n'\pi}{H}$, $\quad K'^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z'^2$.

Удобно так же представить:

$$\frac{1}{\sqrt{-i\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau'}}{\sqrt{\tau'}}\, d\tau' .$$

Тогда в линейном приближении по амплитуде вычисление потенциалов сводится к вычислению интегралов типа:

$$J = \int_0^{\infty}\frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dK_y \frac{\exp[iK_y(\theta-\theta') - i\omega(\tau-\tau') + i\omega_\delta\tau]}{[(\omega+i\varepsilon)^2 - K^2][(\omega+i\varepsilon)^2 - K'^2]} .$$

Интегрирование по ω, K_y в J даёт:

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} = -\frac{2\pi^2}{K_z^2 - K_z'^2}\int_0^{\infty}\frac{d\tau'}{\sqrt{\tau'}}\int_{\tau'+|\theta-\theta'|}^{\infty} d\tau\, e^{i\omega_\delta\tau}\left[J_0\left(\varkappa\sqrt{(\tau-\tau')^2-(\theta-\theta')^2}\right) - J_0\left(\varkappa_z\sqrt{(\tau-\tau')^2-(\theta-\theta')^2}\right)\right].$$

J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $\varkappa \neq \varkappa_z$. Для совпадающих K_z и K_z' выражение J раскрывается по правилу Лопиталя. Однако удобнее это сделать после вычисления всех интегралов при суммировании по поперечным числам.

Выполняя интегрирование по τ /4/ получим:

$$J^{(1)} = -\frac{4\pi^2 i}{K_z^2 - K_z'^2}\sqrt{\frac{\gamma}{V\varkappa^3(\lambda^2-1)}}\, e^{-\frac{i\omega_\delta(\theta-\theta')}{V}}\int_0^{\infty} dt\, e^{i(\lambda u + |u|\sqrt{\lambda^2-1})} ,$$

где: $t^2 = \gamma\varkappa V\tau'$, $u = t^2 + \gamma\varkappa(\theta-\theta')$.

После несложных преобразований в комплексной плоскости интеграл в $J^{(1)}$ для всех значений λ может быть приведен к виду /4/:

$$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i\xi_- s}}{\sqrt{2i\xi_-}} - i\frac{D_{-1}(\sqrt{2i\xi_-}s)}{\sqrt{2i\xi_-}} + i\frac{D_{-1}(\sqrt{2i\xi_+}s)}{\sqrt{2i\xi_+}} , \qquad \theta-\theta' < 0$$

$$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i\xi_+ s}}{\sqrt{2i\xi_+}} , \qquad \theta-\theta' > 0 .$$

(см.формулы (Ш.4)).

Литература

I. Н.С.Диканский, А.Н.Скринский. Когерентная неустойчивость сгустка заряженных частиц. Препринт ИЯФ, Новосибирск,I965г. Атомная энергия (в печати).

2. L.J.Laslett, V.k. Neil, A.M.Sessler,Rev. Sci. Instr. 36 436 (1965).

3. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. Атомная энергия, т.I9,(2), I26 (I965).

4. И.Г.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Физматгиз, I962г.