ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 47

Г.М.Заславский

Об условиях применимости приближения хаотических фаз для нелинейного взаимодействия волн в плазме

НОВОСИБИРСК 1966

Аннотация

Рассматривается динамическое уравнение, описывающее нелинейное взаимодействие волн малой амплитуды в плазме с дискретным спектром. Получено условие, при котором справедливо приближение хаотических фаз. Критерий зависит от вида спектра, амплитуды волн и расстояния между гармониками в спектре. Показано, что в предельном случае сплошного спектра критерий стохастичности фаз выполняется автоматически . Найдена граница спектра волн, для которых справедливо кинетическое уравнение.

Одним из основных допущений при выводе кинетического уравнения в слаботурбулентной плазме является приближение хаотических фаз (ПХФ). Обычно подразумевается, что основанием для этого является очень большое число нелинейно взаимодействующих волн (см., например /I/). С другой стороны, реальные установки для исследования плазмы имеют конечные размеры и, следовательно, дискретный спектр. Это означает, что число возбужденных гармоник всегда конечно. Кроме того, совершенно неизвестно, каким образом степень хаотизации фаз зависит от вида спектра колебаний $\omega(k)$ и от участка спектра, т.е. величины ω_k . Как будет показано ниже, все эти вопросы являются существенными в стохастизации колебаний и для вывода кинетического уравнения. В случае, когда взаимодействующими колебаниями были гармоники нелинейной струны, определение критерия применимости ПХФ (проблема Ферми-Паста-Улама /2/) было проведено в работе /3/.

Запишем гамильтониан для волн в обычном виде: ,

$$H = \frac{1}{2}\sum_k (\dot{u}_k^2 + \omega_k^2 u_k^2) + \frac{\alpha}{6}\sum_{k+k_1+k_2=0} B_{kk_1k_2} u_k u_{k_1} u_{k_2} + \frac{\alpha^2}{24}\sum_{k+k_1+k_2+k_3=0} C_{kk_1k_2k_3} u_k u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} + \cdots \qquad (I)$$

где α - малый параметр, а ядра $\hat{B}$ и $\hat{C}$ удовлетворяют стандартным свойствам симметрии:

$$B_{kk_1k_2} = B_{k_1kk_2} = \cdots \; ; \quad C_{kk_1k_2k_3} = C_{k_1kk_2k_3} = \cdots$$

Если ограничиться выписанными в (I) членами, то уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{u}_k + \omega_k^2 u_k + \alpha \sum_{k+k_1+k_2=0} B_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \qquad (2)$$
$$+ \alpha^2 \sum_{k+k_1+k_2+k_3=0} C_{kk_1k_2k_3} u_{k_1} u_{k_2} u_{k_3} = 0.$$

Выделим в B и C члены, дающие поправку к частоте и ограничи-ся для конкретности случаем распадного спектра $\omega_k = \omega(k)$. Тогда

$$\ddot{u}_k + \Big(\omega_k^2 + 2\alpha B_{k,k,2k} u_{2k} + \alpha^2 \sum_{k_1,k_2\neq k} C_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2}\Big) u_k +$$
$$+ \alpha \sum_{\substack{k+k_1+k_2=0 \\ k_1,k_2\neq k}} B_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} = 0 \qquad (3)$$

Здесь

$$C_{kk_1k_2} = 3C_{kk_1k_2k_3} \cdot \delta_{kk_3}$$

Введем нелинейную поправку к частоте

$$\delta\omega_k = \frac{1}{2\omega_k}\Big(\alpha B_{k,k,2k} u_{2k} + \alpha^2 \sum_{k_1,k_2\neq k} C_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2}\Big) \qquad (4)$$

и будем рассматривать аналогично /3/ последний член в уравнении /3/ как внешнюю силу:

$$F(t) = \alpha \sum_{\substack{k+k_1+k_2=0 \\ k_1,k_2\neq k}} B_{kk_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} \approx$$
$$\approx \alpha \sum_{\substack{k+k_1+k_2=0 \\ k_1,k_2\neq k}} B_{kk_1k_2} u_{k_1}^{(0)} u_{k_2}^{(0)} \cos\omega_{k_1} t \cdot \cos\omega_{k_2} t. \qquad (5)$$

где $u_k^{(0)}$ – амплитуда k-ой гармоники. Задача заключается в определении условий, при которых фазы нелинейного колебания u_k с частотой $\omega_k + \delta\omega_k$ и внешней силой $F(t)$ можно рассматривать статистически независимыми от фаз колебания $u_{k'}$.

Для дальнейшего воспользуемся методом работы /4/. Рассмотрим колебание с одной степенью свободы и специальным видом силы $F(t)$:

$$\ddot{u} + (\omega + \delta\omega)^2 u + F_0 \sum_n \delta(t - t_n) = 0 \qquad (6)$$

где $\delta\omega$ – малая нелинейная добавка к частоте, зависящая от u а точки t_n следуют периодически с частотой $\Omega \ll \omega$?. Пусть $\varphi_{(n)}$ – фаза колебания u в точке $(t_n - 0)$, а $\omega_{(n)}$ – нелинейная частота в интервале $(t_{(n-1)}, t_{(n)})$. Тогда уравнение (6) эквивалентно следующей системе уравнений в конечных разностях /4/:

$$\varphi_{(n+1)} \approx \Big\{\frac{\omega}{\Omega}\Big(1 + \frac{\overline{\delta\omega_{(n+1)}}}{\omega}\Big) + \varphi_{(n)} + \varepsilon\Big\}$$
$$I_{(n+1)} \approx I_{(n)}(1 + \varepsilon \sin 2\varphi_{(n)}) \qquad (7)$$
$$\varepsilon = \frac{F_0}{\omega u^{(0)}}; \quad \overline{\delta\omega_{(n)}} = \overline{\delta\omega_{(n)}}(I_{(n)}); \quad I_{(n)} = \omega_{(n)}\big[u_{(n)}^{(0)}\big]^2$$

где $\overline{\delta\omega}(I)$ – нелинейная поправка к частоте, зависящая от действия I, $u^{(0)}$ – амплитуда колебания, а скобки $\{\ldots\}$ означают дробную часть аргумента[x)].

Из (7) следует, что

$$\varphi_{(n+1)} \approx \{K \sin 2\varphi_{(n)}\} \quad (\varepsilon \ll 1) \qquad (8)$$

если

$$K = \varepsilon \frac{\overline{\delta\omega}}{\Omega} \gg 1 \qquad (9)$$

Оценка корреляции фаз при выполнении неравенства (9) дает:

$$R = \frac{\langle(\varphi_{(n+1)} - \frac{1}{2})(\varphi_{(n)} - \frac{1}{2})\rangle}{\langle(\varphi_{(n)} - \frac{1}{2})^2\rangle} \sim K^{-1} \ll 1; \qquad (10)$$
$$\langle\ldots\rangle \equiv \int_0^1 d\varphi_{(n)}$$

Таким образом, условие (9) можно рассматривать как условие статистической независимости фаз осциллятора, причем время расцепления корреляции фаз равно:

$$\tau \sim (\Omega \ln K)^{-1} \qquad (11)$$

---

x) Для удобства принята такая нормировка фазы, что φ меняется в интервале (0,1).

Неравенство (9) можно переписать иначе, замечая, что $\dot{\overline{\delta\omega}}$ есть изменение нелинейной добавки к частоте за время Ω^{-1} за счет несохранения адиабатического инварианта:

$$K = \frac{\partial}{\partial I}\left(\overline{\delta\omega}(I)\right)\cdot\frac{\delta I}{\Omega} \gg 1; \quad \delta I = \varepsilon I \tag{12}$$

Критерий (9) фактически означает условие того, что нелинейный сдвиг частоты, вследствие несохранения адиабатического инварианта на δ-функционной силе, много больше расстояния между резонансами Ω внешнего возмущения и выводился как условие перекрытия резонансов для аналогичной задачи в /5/. В работе /6/ было показано, что критерий типа (12) возникает как условие применимости квазилинейной теории при выводе кинетического уравнения типа Фоккера-Планка. Заметим, что сила $F(t)$ в уравнении (6) может иметь просто периодическую последовательность δ - образных, т.е. достаточно узких и высоких импульсов. Существенно, чтобы характерная ширина импульсов была много меньше периода колебания ω^{-1}.

Вернемся теперь к исследованию уравнения (3). Рассмотрим достаточно большой интервал по k возбужденных гармоник и пусть Δk - характерный интервал между соседними гармониками. Будем считать, с другой стороны, что дисперсионная кривая $\omega(k)$ на рассматриваемом интервале не очень сильно отличается от прямой:

$$\omega_k \approx \frac{d\omega_k}{dk}\Delta k\cdot m \tag{13}$$

где m - целое число ($m \sim k/\Delta k$). Оценим характер силы $F(t)$, определенной формулой (5). Нетрудно видеть, что сумма в (5) состоит из членов с частотами, кратными величине

$$\Omega_k = \frac{d\omega_k}{dk}\Delta k \tag{14}$$

т.е. (5) представляет собой разложение в ряд Фурье величины:

$$F(t) \approx \frac{D_k}{\Omega_k}\cdot\frac{I_k}{\omega_k}\sum_m \delta\left(t - \frac{m}{\Omega}\right) \tag{15}$$

$$D_k \sim D_{kkk}$$?

При переходе от (5) к (15) существенно, что интервал возбужденных частот $\gg \Omega_k$ и $\Omega_k \ll \omega_k$ для всех возбужденных гармоник. В действительности, $F(t)$ представляет последовательность δ - образных импульсов со слабой модуляцией по k, однако, как уже отмечалось выше, это несущественно для дальнейших расчетов.

Из (4) следует, что

$$\dot{\overline{\delta\omega_k}} \sim \frac{\alpha^2}{\omega_k^3}\left(B^2_{k,k,2k}\frac{I_{2k}}{\omega_{2k}} + \omega_k^2\sum_{k'\neq k} C_{kk'}\frac{I_{k'}}{\omega_{k'}}\right) \tag{16}$$

где

$$I_k = \left(u_k^2 + \dot{u}_k^2\,\omega_k^{-2}\right)\omega_k$$

Аналогично (7) можно получить:

$$\varphi_{k,(n+1)} \approx \left\{\frac{\omega_k}{\Omega_k}\left(1 + \overline{\delta\omega}_{k,(n+1)}\right) + \varphi_{k,(n)} + \varepsilon_{k,(n)}\right\}$$

$$\overline{\delta\omega}_{k,(n+1)} = \frac{\alpha^2}{\omega_k^3}\Big[B^2_{k,k,2k}\frac{I_{2k,(n)}}{\omega_{2k}}\left(1 + \varepsilon_{2k,(n)}\sin 2\varphi_{2k,(n)}\right) + $$

$$+ \omega_k^2\sum_{k'\neq k} C_{kk'}\frac{I_{k'}}{\omega_{k'}}\left(1 + \varepsilon_{k',(n)}\sin 2\varphi_{k',(n)}\right)\Big]$$

$$\varepsilon_{k,(n)} = \alpha\frac{D_k I_{k,(n)}}{\Omega_k\omega_k} \tag{17}$$

Уравнения (17) аналогичны уравнениям (7). Отличие лишь в том, что фаза $\varphi_{k,(n+1)}$ зависит теперь не только от $\varphi_{k,(n)}$, но и от фаз других колебаний $\varphi_{k',(n)}$. Исследуем теперь корреляцию фаз двух произвольных колебаний u_k, $u_{k'}$. Имеем:

$$\varphi_{k,(n+1)} = \varphi_{k,(n+1)}\left(\varphi_{k,(n)}, \varphi_{k',(n)}\right)$$

$$\varphi_{k',(n+1)} = \varphi_{k',(n+1)}\left(\varphi_{k',(n)}, \varphi_{k,(n)}\right)$$

$$R_{k,k'} = \frac{\langle (\varphi_{k,(n+1)} - \frac{1}{2})(\varphi_{k',(n+1)} - \frac{1}{2}) \rangle}{\langle (\varphi_{k,(n)} - \frac{1}{2})^2 \rangle}; \quad \langle \ldots \rangle \equiv \int d\varphi_{k,(n)} d\varphi_{k',(n)}$$

Оценка $R_{k,k'}$ дает:

$$\begin{gathered} R_{k,k'} \sim (KK')^{-1} \quad \text{при} \quad KK' \gg 1 \\ K = \frac{\partial}{\partial I_{k'}} \left(\overline{\delta\omega_{k,(n+1)}} \right) \frac{\delta I_{k'}}{\Omega_k} \\ K' = \frac{\partial}{\partial I_k} \left(\overline{\delta\omega_{k',(n+1)}} \right) \frac{\delta I_k}{\Omega_{k'}} \\ \delta I_k = \varepsilon_k I_k; \quad \delta I_{k'} = \varepsilon_{k'} I_{k'} \end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, неравенство $KK' \gg 1$ означает условие статистической независимости фаз колебаний $u_k, u_{k'}$. Подставляя (17) в (18) находим критерий применимости ПХФ:

$$KK' = \alpha^6 D_k D_{k'} C^2_{kk'} C^2_{k'k} \frac{(\omega_k I_k)^{3/2} (\omega_{k'} I_{k'})^{3/2}}{\omega_k^7 \omega_{k'}^7 \Omega_k^2 \Omega_{k'}^2} \gg 1 \tag{19}$$

где мы опустили член $B_{k,k,2k}$. Заметим теперь, что если критерий (19) выполнен, то решение динамических уравнений (3) усредненное по фазам, должно совпадать с решением кинетического уравнения для волн. Последнее, как известно, дает:

$$I_k \omega_k = const = \vartheta \tag{20}$$

где ϑ - эффективная температура. Подставляя (20) в (19) получаем окончательно:

$$KK' = \alpha^6 \vartheta^3 \frac{D_k D_{k'} C^2_{kk'} C^2_{k'k}}{\omega_k^7 \omega_{k'}^7 \Omega_k^2 \Omega_{k'}^2} \gg 1 \tag{21}$$

Проанализируем формулу (21). Хаотизация фаз происходит не при сколь угодно малой амплитуде (т.е. α), а начиная с некоторого порогового значения, которое можно найти из условия $KK' \sim 1$.

Пороговое значение α различно для разных k и ω_k. При $\Delta k \to 0$, т.е. по мере приближения спектра к сплошному, критерий хаотичности фаз (21) выполняется автоматически для всех k и $\alpha \neq 0$. Далее, без ограничения общности, будем считать, что взаимодействие и частоты волн растут с ростом k и что KK' имеет в целом положительную степень k. Тогда при $k' \sim k$ из условия $K(k, k'=k) \sim 1$ можно найти минимальное значение k_0, начиная с которого фазу можно считать хаотической. Эта величина k_0 определяет нижнюю границу для применимости кинетического уравнения, действие которой аналогично отражающей стенке для квазичастиц /3/. Зафиксируем k_1 и пусть при $k' \sim k_1$ выполняется критерий (21). Тогда все волны с $k' > k_1$ будут иметь также хаотическую фазу. С другой стороны, радиус распространения стохастичности в область меньших k' ограничен порогом k'_0, определяемым из условия:

$$K_1(k_1, k' \sim k_1) \gg 1; \quad K_1(k_1, k'_0) K'_1(k'_0, k_1) \sim 1$$

Независимо от вида гамильтониана (I) и от характера членов в нем, дающих основной вклад, ясно, что в критерии типа (21) в знаменатель всегда будет входить величина $\Omega_k = \Delta k \frac{d\omega_k}{dk}$. Это означает, что чем меньше расстояние между частотами в спектре, тем легче выполнить условие хаотичности фаз. В частности для дисперсии с $\frac{d\omega_k}{dk} \to \infty$, т.е. вблизи резонансов, происходит "срыв хаотичности".

Литература

I. Галеев А.А., Карпман В.И. ЖЭТФ 44, 592 (1963).

2. E.Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studiing of non-linear procesess. Los-Alamos Scientific Laboratory Report. LA-1940 (1955)

3. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. ДАН СССР 166, 57(1966).

V4. Г.М.Заславский. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 1966. ПМТФ - 1967 №2.

5. Б.В.Чириков. Атомная энергия 6, 630 (1959).
Диссертация, Новосибирск (1959).

V 6. M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor, G.M. Zaslavski. On the destruction of magnetic surfaces due to the irregularities of magnetic field. Int. Report N6/1966. Intern. Centre for theor. Phys., Trieste, 1966.