

С.С.Моисеев, А.М.Фридман

**Низкочастотные неустойчивости плазмы
в системах с непараллельными силовыми
линиями магнитного поля**

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
Физики СО АН СССР
Инд. № _____

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время довольно интенсивно изучалась неустойчивость плазмы в полях сложной геометрии (см., например, / 1 / - / 3 /). Особое внимание при этом было уделено случаю $\omega \gg k_z v_{Ti}$: (k_z - проекция волнового вектора на направление магнитного поля H_0 , ω - частота волны, v_{Ti} - тепловая скорость ионов). Именно для таких частот были обнаружены, например, опасные дрейфовые неустойчивости магнитного удержания плазмы. Однако, в диапазоне частот $\omega < k_z v_{Ti}$, кроме дрейфово-температурной неустойчивости при $\frac{d \ln T}{d \ln n} > 2$ / 4 /, насколько нам известно, других неустойчивостей не было обнаружено. (T - температура, n - плотность плазмы). В системах с непараллельными силовыми линиями H_0 условие $\omega \approx k_z v_{Ti}$ для дрейфовых волн сводится к условию $\Delta x \lesssim \frac{r_i}{\theta}$, где Δx - размер области локализации возмущения; r_i - ларморовский радиус ионов, θ - угол поворота силовых линий магнитного поля на расстоянии порядка размеров системы ("shear"). При достаточной величине θ ($\theta \gtrsim \frac{1}{10}$) диффузия за счет дрейфовых неустойчивостей, развивающихся при $\omega > k_z v_{Ti}$ существенно падает / 3 / ($D \sim \gamma \Delta x^2$, где D - коэффициент диффузии, а γ - инкремент неустойчивости).

Именно это обстоятельство явилось одним из весьма обнадеживающих факторов в пользу устойчивости тороидальных установок с "shear'ом". Что же касается дрейфово-температурной неустойчивости, то использование "диверторов" в установках типа "стелларатор", позволит, очевидно, выйти за пределы неустойчивого режима.

Вопрос об эффективности использования установок с "shear'ом" в значительной степени сводится, как видим, к вопросу о том, насколько устойчивым в действительности является диапазон частот $\omega < k_z v_{Ti}$, повышенную устойчивость которого предполагали в связи с ожидаемым стабилизирующим действием ионного затухания Ландау (см. / 1 /, / 2 /).

В настоящей работе исследуется устойчивость указанного диапазона частот, согласно результатам / 5 / - / 10 / по отношению к потенциальным и непотенциальным возмущениям. При этом, в частнос-

ти, оказывается, что здесь существуют, как гидродинамические неустойчивости, так и неустойчивости при слабых столкновениях, а также бесстолкновительные неустойчивости. Так, новые гидродинамические неустойчивости связаны с учетом вязких сил, действующих на продольное движение ионов. Эти неустойчивости позволяют, по-видимому, объяснить аномальную диффузию Бома в современном режиме установок типа "стелларатор" / II /. Неустойчивости при слабых столкновениях, когда гидродинамика становится уже неприменимой, развиваются при $\omega < K_z V_{Ti}$ на непотенциальных возмущениях. Эти неустойчивости могут оказаться особенно опасными в высокотемпературном режиме.

Роль непотенциальности, несмотря на малую частоту возмущений, связана с тем, что при учете продольного движения частиц непотенциальность начинает сказываться, если выполнено соотношение

$$\frac{\Omega_i^2}{K_z^2 V_A^2} \frac{\omega^2}{K_z^2 V_{Ti}^2} > 1 \quad (I.1)$$

где Ω_i - ларморовская частота ионов, V_A - их альфвеновская скорость, K_z - проекция волнового вектора на направление перпендикулярное H_0 .

Из критерия (I.1) следует, что непотенциальность существенна при больших плотностях плазмы. Так, например, фактор $\frac{\Omega_i^2}{K_z^2 V_A^2} > 1$ при $n > 10^{13} \text{ см}^{-3}$, если $K_z \approx \frac{1}{5} \text{ см}^{-1}$. Обратим внимание, что критерий (I.1) отличается от обычно применяемого критерия непотенциальности $\omega < K_z V_A$ (подробнее о роли непотенциальности см. в IV).

Дисперсионное уравнение в случае малых столкновений было получено методом интегрирования по траекториям / I2 / из кинетического уравнения с интегралом столкновений вида аналогичного / I3 /.

Использование *Stop* - члена вида / I3 / рядом авторов (см., например, / 2 /) в области частот $\omega > K_z V_{Ti}$ привело к результатам, качественные особенности которых ранее были усмотрены в гидродинамике (см., например, / I5 / - / I7 / и в кинетическом уравнении в τ - приближении (см., например, / I8 /).

В области низких частот неустойчивости плазмы при слабых столкновениях существуют лишь ввиду наличия в интеграле столкно-

вений члена, включающего в себя среднюю возмущенную скорость частиц \vec{P} , который отсутствует в τ - приближении. Таким образом, все результаты в IV основаны лишь на выборе *Stop* -члена именно в виде аналогичной / I3 /.

Насколько изменятся результаты при использовании точного интеграла столкновений Ландау - вопрос открытый. Пренебрежение всеми малостями типа $\frac{\omega}{K_z V_{Ti}}$ в IV позволяет надеяться, что, по крайней мере, качественно полученные здесь результаты не изменятся.

В заключение данного параграфа заметим, что, как следует из (I.1), непотенциальный фактор в случае дрейфовых возмущений существует в системах с "shear" для областей локализации возмущения, удовлетворяющих условию

$$(\Delta x)^2 \leq \frac{\Omega_i^2}{K_z^2 V_A^2} \frac{z_i^2}{\theta^2} \quad (I.2)$$

Как видно из (I.2), с ростом плотности размер опасных областей Δx , где непотенциальность существенна, растет и её влияние, таким образом, существенно распространяется на область низкочастотного диапазона.

II. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Исходным уравнением в настоящей работе, в случае потенциальных возмущений, является кинетическое уравнение для возмущенной функции распределения вида:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{V} \Delta f_a + [\vec{V} \cdot \vec{\Omega}_a] \frac{\partial f_a}{\partial v} + \frac{e_a}{m_a} \vec{E} \frac{\partial f_a}{\partial v} = - \sum_{\beta} \nu_{a\beta} [f_a - f_a^0 (Q_a \cdot \frac{\vec{v} \cdot \vec{P}_a}{V_{Ti}^2})] \quad (II.1)$$

где $f_a = (\frac{m_a}{2\pi T_a})^{3/2} \exp[-\frac{m_a v^2}{2T_a}]$, а Q_a и P_a представляют собой первые моменты функции распределения:

$$Q_a = \frac{1}{n_a} \int f_a d^3V \quad (II.2)$$

$$\vec{P}_a = \frac{1}{n_a} \int \vec{V} f_a d^3V \quad (II.3)$$

имеющие смысл безразмерной возмущенной плотности и средней возмущенной скорости частиц каждого сорта; $\nu_{a\beta}$ есть частота столкновений частиц сорта a с частицами сорта β . Невозмущенные величины от возмущенных будем отличать индексом "0". Столкновительный член в (II.1), в отсутствие невозмущенных токов, текущих в плазме, удовлетворяет законам сохранения числа частиц и импульса. Вообще

говоря, интеграл столкновения типа / 13 / соответствует так называемой "изотермической модели", т.е. приближению, не учитывающему возмущения температуры.

В работе /14/ было проведено исследование кинетического уравнения I) с интегралом столкновения вида, аналогичного / 13 /. Однако, нам кажется целесообразным провести более компактный, на наш взгляд, вывод дисперсионного уравнения.

Одной из причин этого является та, что приведенный здесь вывод для потенциального случая удалось сравнительно просто распространить и на непотенциальный случай.

Представляя возмущенные величины в виде:

$$Q_d = \tilde{Q}_d e^{i\vec{k}\vec{z} - i\omega t}; P_d = \tilde{P}_d e^{i\vec{k}\vec{z} - i\omega t}; \vec{E} = -i\vec{k}\tilde{\varphi} e^{i\vec{k}\vec{z} - i\omega t} \quad (\text{II.4})$$

решение уравнения (I) можно записать так:

$$f_d = -e^{-\sum \nu_{d\beta} t} \int_{-\infty}^t dt' \left[\frac{e_{d\beta} \tilde{\varphi}}{T_d} (i\vec{k}\vec{v} - i\omega_d) - \sum_{\beta} \nu_{d\beta} (\tilde{Q}_d + \frac{V_d \tilde{P}_d}{V_{Td}^2} + \frac{V_d \tilde{P}_d}{V_{Td}^2}) \right] f_d^0 e^{i\vec{k}\vec{z}(t') - i\vec{k}\vec{z}(t) - i\omega(t-t) - \sum_{\beta} \nu_{d\beta} t'} \quad (\text{II.5})$$

Здесь $\omega_d = K_y \frac{cT_d}{e_n H_0} K_0$ - дрейфовая частота частиц сорта d ; $K_0 = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$.

Пользуясь методом интегрирования по траекториям / 12 /, в системе координат $(\frac{K_x}{K_1}, \frac{[K_y - K_1]}{K_1}, \vec{r})$, где \vec{r} - единичный вектор магнитного поля \vec{H}_0 , окончательно получаем возмущенную функцию распределения в виде:

$$f_d = \left\{ -\frac{e_{d\beta} \tilde{\varphi}}{T_d} + \left[\frac{e_{d\beta} \tilde{\varphi}}{T_d} (\omega + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} - \omega_d) + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} \tilde{Q}_d + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{\tilde{P}_{d\beta} V_d}{V_{Td}^2} \right] \frac{Y_0(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) \sum_m Y_m(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) e^{-im(\theta - \varphi - \Omega_d t)}}{\omega - K_x V_d + K_y \frac{c}{\Omega_d} + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta}} - \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{V_d ([K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d)}{K_1 V_{Td}^2} \cdot \frac{Y_1(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) \sum_m Y_m(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) e^{-im(\theta - \varphi - \Omega_d t)}}{\omega - K_x V_d + K_y \frac{c}{\Omega_d} + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta}} \right\} f_d^0 \quad (\text{II.6})$$

Здесь введены обозначения: $Y_m(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d})$ - функция Бесселя действительного аргумента; угол θ и член $K_y \frac{c}{\Omega_d}$ определяют компоненты скорости $\vec{v}(t)$:

$$\left. \begin{aligned} V_x(t) &= V_1 \cos(\theta - \Omega_d t) \\ V_y(t) &= V_1 \sin(\theta - \Omega_d t) - \frac{c}{\Omega_d} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.7})$$

а угол φ определяет компоненты волнового вектора \vec{K}_1 : $K_x = K_1 \cos \varphi, K_y = K_1 \sin \varphi$.

Из (II.2), (II.3), (II.6) находим \tilde{Q}_d и \tilde{P}_d .

$$\tilde{Q}_d = \frac{e_{d\beta} \tilde{\varphi}}{T_d} \left[1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} - \omega_d}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2) + i\sqrt{\pi} \frac{[K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d}{K_x V_{Td}} \frac{\tilde{P}_{d\beta}}{V_{Td}} \xi_d e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2) \right] + \frac{1 - \sqrt{\pi} \frac{\sum_{\beta} \nu_{d\beta}}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2)}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\sum_{\beta} \nu_{d\beta}}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2)} + \frac{i\sqrt{\pi} \frac{\sum_{\beta} \nu_{d\beta}}{K_x V_{Td}} \frac{([K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d)}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2}}{1 - \sqrt{\pi} \frac{\sum_{\beta} \nu_{d\beta}}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2)}; \quad (\text{II.8})$$

$$\tilde{P}_d = \frac{1}{K_1} \left\{ \left[\frac{e_{d\beta} \tilde{\varphi}}{T_d} (\omega + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} - \omega_d) + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta} \tilde{Q}_d \right] \left[-\frac{K_1}{K_x} \frac{i}{2} \sqrt{\pi} W(\xi_d) \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} + \frac{[K_x - K_1] \sqrt{\pi}}{K_x} \frac{1}{2} W(\xi_d) \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} - \frac{\tilde{P}_d \xi_d e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2)}{K_x} - \frac{K_1}{K_x} \frac{i}{2} \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{\tilde{P}_{d\beta}}{V_{Td}} \xi_d \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} + \frac{[K_x - K_1]}{K_x} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{\tilde{P}_{d\beta}}{V_{Td}} \xi_d \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} - \frac{\tilde{P}_d i \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{\tilde{P}_{d\beta}}{V_{Td}} \xi_d \xi_d e^{-\eta_d^2} I_0(\eta_d^2)}{K_x} + \frac{K_1}{K_x} i \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{([K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d)}{K_x V_{Td}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(\xi_d) \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} - \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{\sqrt{\pi} [K_x - K_1]}{K_x} \cdot \frac{([K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d)}{K_x V_{Td}} W(\xi_d) \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2} + \frac{\tilde{P}_d \sum_{\beta} \nu_{d\beta} \frac{([K_x - K_1] \cdot \tilde{P}_d)}{K_x V_{Td}} \xi_d \xi_d \frac{F_d(K)}{V_{Td}^2}}{K_x} \right\} \quad (\text{II.9})$$

В формулах (II.8) и (II.9) использованы следующие обозначения: $\eta_d^2 = \frac{K_1^2 V_d^2}{\Omega_d^2}$; $\xi_d = \frac{\omega + K_y \frac{c}{\Omega_d} + i\sum_{\beta} \nu_{d\beta}}{K_x V_{Td}}$; $\zeta_d = 1 + i\sqrt{\pi} \zeta_d W(\xi_d)$; (II.10)

$W(\xi_d)$ - функция Крампса;
 $F_d(K) = \int_0^{\infty} Y_0(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) Y_1(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) e^{-\frac{V_d^2}{2V_{Td}^2}} V_d^2 dV_d$; $\Phi_d(K) = \int_0^{\infty} Y_1^2(\frac{K_1 V_d}{\Omega_d}) e^{-\frac{V_d^2}{2V_{Td}^2}} V_d^3 dV_d$;

$I_0(\eta^2)$ - функция Бесселя мнимого аргумента.

Выражение для \tilde{P}_β в форме (П.9) может быть использовано для получения дисперсионного уравнения, после подстановки в правую часть его значения компонент средней возмущенной скорости, которые определяются из уравнений:

$$([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_e) = \frac{1}{K_1} \left\{ \left[-\frac{e\tilde{\gamma}}{T_e} (\omega + i\nu_e - \omega_e) + i\nu_e \tilde{Q}_e \right] K_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(\xi_e) \frac{F_e(K_1)}{V_{Te}^3} + \frac{K_1}{2} \frac{(\nu_{ee} \tilde{P}_{e2} + \nu_{ei} \tilde{P}_{i2})}{V_{Te}} \gamma_e \frac{F_e(K_1)}{V_{Te}^3} - \frac{\sum \nu_{e\beta} ([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{V_{Te}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(\xi_e) \frac{\Phi_e(K_1)}{V_{Te}^4} \right\}; \quad (П.11)$$

$$([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_i) = \frac{1}{K_1} \left\{ \left[\frac{e\tilde{\gamma}}{T_i} (\omega + i\nu_i - \omega_i) + i\nu_i \tilde{Q}_i \right] K_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(\xi_i) \frac{F_i(K_1)}{V_{Ti}^3} + \frac{K_1}{2} \frac{(\nu_{ii} \tilde{P}_{i2} + \nu_{ie} \tilde{P}_{e2})}{V_{Ti}} \gamma_i \frac{F_i(K_1)}{V_{Ti}^3} - \frac{\sum \nu_{i\beta} ([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{V_{Ti}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} W(\xi_i) \frac{\Phi_i(K_1)}{V_{Ti}^4} \right\}; \quad (П.12)$$

$$(\tilde{K} \cdot \tilde{P}_e) = \frac{1}{K_2} \left\{ \left[\frac{e\tilde{\gamma}}{T_e} (\omega + i\nu_e - \omega_e) - i\nu_e \tilde{Q}_e \right] \xi_e e^{-\eta^2} I_0(\eta^2) - i(\nu_{ee} \tilde{P}_{e2} + \nu_{ei} \tilde{P}_{i2}) \frac{1}{V_{Te}} \xi_e e^{-\eta^2} I_0(\eta^2) + \sum_{\beta} \nu_{e\beta} \frac{([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{K_1 V_{Te}} \gamma_e \frac{F_e(K_1)}{V_{Te}^3} \right\}; \quad (П.13)$$

$$(\tilde{K} \cdot \tilde{P}_i) = \frac{1}{K_2} \left\{ \left[-\frac{e\tilde{\gamma}}{T_i} (\omega + i\nu_i - \omega_i) - i\nu_i \tilde{Q}_i \right] \xi_i e^{-\eta^2} I_0(\eta^2) - i \frac{(\nu_{ii} \tilde{P}_{i2} + \nu_{ie} \tilde{P}_{e2})}{V_{Ti}} \xi_i \gamma_i e^{-\eta^2} I_0(\eta^2) + \sum_{\beta} \nu_{i\beta} \frac{([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{K_1 V_{Ti}} \gamma_i \frac{F_i(K_1)}{V_{Ti}^3} \right\} \quad (П.14)$$

При выводе формул (П.8) - (П.14) использовалось единственное предположение: считалось $\omega \ll \Omega_\alpha$, что позволило положить ξ равной нулю.

Полученная система уравнений описывает потенциальные возмущения неоднородной плазмы в отсутствие градиента температуры. Как будет показано в IV, учет непотенциальности возмущений сводится к простой замене частоты столкновений ν , стоящей перед продольной составляющей средней возмущенной скорости \tilde{P}_α , на некую фиктивную частоту столкновений ν' , включающую в себя непотенциаль-

ный фактор $\frac{\Omega_\alpha^2}{K_1^2 V_\alpha^2}$. После проведения такой замены ν на ν' в уравнениях (П.8) - (П.14), последние описывают непотенциальные возмущения неоднородной плазмы с частотой ω , меньшей циклотронной частоты ионов.

Примеры циклотронной / 19 / и антидрейфовой / 20 / неустойчивостей, практически не подлежащих стабилизации "shear'om", заставляют думать, что область частот $\omega > \Omega_i$ является довольно опасной. Наш критерий непотенциальности $\frac{\Omega_i^2}{K_1^2 V_\alpha^2}$ в случае /20/ становится малым.

Попытка сделать антидрейфовые колебания / 20 / непотенциальными, оставаясь в области низких частот, приводит к первенству $\Omega_i < \omega < K_2 V_{Ti}$, т.е. к нереальному требованию $K_2 \gg K_1$.

П.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В дальнейшем нас будет интересовать область низких частот колебаний $\omega < K_2 V_{Ti}$ при $K_1 z_i \ll 1$. В этом случае выражения в (10) преобразуются следующим образом:

$$\eta^2 \ll 1; \quad \xi_\alpha \ll 1; \quad I_0(\eta^2) \sim 1; \quad F_\alpha(K_1) \approx \frac{K_1 V_{\alpha 2}^4}{\Omega_\alpha^2}; \quad \Phi(K_1) \approx 4 \frac{K_1^2 V_{\alpha 2}^6}{\Omega_\alpha^2}; \quad (П.15)$$

$$W(\xi_\alpha) \approx 1; \quad \gamma_\alpha \approx 1.$$

С учетом (П.15) уравнения (П.11) - (П.14) значительно упрощаются: $([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_e) = \frac{K_1}{K_2} \left\{ \left[-\frac{e\tilde{\gamma}}{T_e} (\omega + i\nu_e - \omega_e) + i\nu_e \tilde{Q}_e \right] \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_1 z_e + \frac{1}{2} \frac{(\nu_{ee} \tilde{P}_{e2} + \nu_{ei} \tilde{P}_{i2})}{V_{Te}} K_1 z_e \right\}$ (П.16)

$$([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_i) = \frac{K_1}{K_2} \left\{ \left[\frac{e\tilde{\gamma}}{T_i} (\omega + i\nu_i - \omega_i) + i\nu_i \tilde{Q}_i \right] \frac{\sqrt{\pi}}{2} K_1 z_i + \frac{1}{2} \frac{(\nu_{ie} \tilde{P}_{e2} + \nu_{ii} \tilde{P}_{i2})}{V_{Ti}} K_1 z_i \right\} \quad (П.17)$$

$$\tilde{P}_{e2} = \frac{1}{K_2} \left\{ \frac{e\tilde{\gamma}}{T_e} (\omega + i\nu_e - \omega_e) - i\nu_e \tilde{Q}_e - i(\nu_{ee} \tilde{P}_{e2} + \nu_{ei} \tilde{P}_{i2}) \frac{1}{V_{Te}} \xi_e + \sum_{\beta} \nu_{e\beta} \frac{([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{K_1 V_{Te}} K_1 z_e \right\} \quad (П.18)$$

$$\tilde{P}_{i2} = \frac{1}{K_2} \left\{ -\frac{e\tilde{\gamma}}{T_i} (\omega + i\nu_i - \omega_i) - i\nu_i \tilde{Q}_i - i(\nu_{ii} \tilde{P}_{i2} + \nu_{ie} \tilde{P}_{e2}) \frac{1}{V_{Ti}} \xi_i + \sum_{\beta} \nu_{i\beta} \frac{([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_\beta)}{K_1 V_{Ti}} K_1 z_i \right\} \quad (П.19)$$

Из (П.16) - (П.19) усматривается соотношение между компонентами средней возмущенной скорости \tilde{P} :

$$([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_e) \approx ([\tilde{K}_1 \cdot \tilde{K}] \cdot \tilde{P}_i) \ll \tilde{P}_{i2} \approx \tilde{P}_{e2} \quad (П.20)$$

Окончательно для описания потенциальных возмущений неоднородной плазмы при вышеупомянутых условиях имеем следующую систему уравнений:

$$\tilde{Q}_e = \frac{e\delta\tilde{\varphi}}{T_e} - i \frac{\nu_{ei}\tilde{P}_{iz} + \nu_{ee}\tilde{P}_{ez}}{K_z V_{Te}} \quad (\text{П.21})$$

$$\tilde{Q}_i = \frac{e\delta\tilde{\varphi}}{T_i} - i \frac{\nu_{ii}\tilde{P}_{iz} + \nu_{ie}\tilde{P}_{ez}}{K_z V_{Ti}} \quad (\text{П.22})$$

$$\tilde{P}_{ez} = \frac{1}{K_z} \left[\frac{e\tilde{\varphi}}{T_e} (\omega + i\nu_{ee} - \omega_e) - i\nu_{ee}\tilde{Q}_e \right] - \frac{i(\nu_{ee}\tilde{P}_{ez} + \nu_{ei}\tilde{P}_{iz})}{K_z V_{Te}} \xi_e \quad (\text{П.23})$$

$$\tilde{P}_{iz} = \frac{1}{K_z} \left[\frac{e\tilde{\varphi}}{T_i} (\omega + i\nu_{ii} - \omega_i) - i\nu_{ii}\tilde{Q}_i \right] - \frac{i(\nu_{ie}\tilde{P}_{ez} + \nu_{ii}\tilde{P}_{iz})}{K_z V_{Ti}} \xi_i \quad (\text{П.24})$$

Вследствие малости последних членов в правых частях уравнений (П.23), (П.24), система уравнений (П.21) - (П.24) имеет либо затухающие корни (с декрементом $\sim \nu_i$), либо приводит к безразличному равновесию ($\frac{\nu_i}{K_z V_{Ti}} < 1$).

В дальнейшем (см. IV) будет показано, что учет непотенциальности возмущений сказывается как раз в последних членах уравнений (П.23), (П.24), в результате чего при достаточно большой непотенциальности ранее малые по величине члены могут стать одного порядка с другими членами уравнений (П.23), (П.24). В этом случае система уравнений (П.21) - (П.24) имеет неустойчивые решения.

III. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

III.1. Гидродинамический случай

Как следует из анализа уравнений (П.1) в случае малых столкновений ($\frac{\nu_e}{K_z V_{Te}} < 1$) $\text{rot } \vec{E} = 0$ и при $K_z z_i < 1$ мы получаем при $\omega < K_z V_{Ti}$ либо затухающие решения (с декрементом порядка ν_i), либо безразличное равновесие. При больших столкновениях возможен более простой гидродинамический подход, чем мы и воспользуемся в данном параграфе.

В / 2I / было показано, что с учетом электрон-ионного трения в неоднородной плазме возникает дрейфово-диссипативная неустойчивость, описываемая следующим дисперсионным уравнением в системе отсчета, где невозмущенное электрическое поле $E_0 = 0$:

$$1 - i \frac{\omega_s}{\omega + \omega_i} \left(1 + \frac{\omega_e}{\omega} \right) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Здесь $\omega_i = \kappa_y \frac{c T_i}{e H_0} K_0$; $\omega_e = -\kappa_y \frac{c T_e}{e H_0} K_0$;

$$\omega_s = \left(\frac{K_z}{\kappa_y} \right)^2 \frac{\omega_{ne} \omega_{ni}}{\nu_{ei}}$$

Отсюда мы видим, что существует неустойчивость в плазме переменной плотности с конечной проводимостью.

Если, например, $\omega_i \ll |\omega_e|$, а $\omega_s \gg |\omega_e|$ (трение мало), то $\text{Re } \omega \sim \omega_e$, $\text{Im } \omega \sim \frac{\omega_e^2}{\omega_s}$; при $|\omega_e| \gg \omega_s$ $\text{Re } \omega \sim \text{Im } \omega \sim \sqrt{|\omega_e| \omega_s}$.

Таким образом, мы видим, что если ω_s велико, то инкремент дрейфово-диссипативной неустойчивости существенно падает. Для ряда экспериментов $\omega_e \ll \omega_s$, даже для $K_z \text{ min} \sim \frac{1}{R}$, где R - продольный размер системы. (См., например / II /). При этом режим аномальной диффузии Бома за счет данной неустойчивости не может быть достигнут / 2I /.

Большое значение ω_s означает, что в уравнении (III.1) становится несущественным первый член, учитывающий поперечные ионные токи (в частности, учитывающий в выражении для поперечной скорости ионов их инерцию). С другой стороны, (III.1) было получено в пренебрежении продольным движением ионов.

Целесообразно поэтому рассмотреть обратный предельный случай - пренебречь поперечными токами ионов, но учесть их продольное движение. Связь же продольного и поперечного движения учтем в выражении для продольной компоненты вязких сил, действующих на ионы. Воспользуемся следующей системой уравнений:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$V_{ze} - V_{zi} = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$i\omega n + \frac{c E_y}{H_0} n'_0 + i\kappa_z V_{ze} n_0 = 0 \quad (\text{III.4})$$

$$i\omega m n_0 v_z = -en_0 E_z - iK_z n T_0 - m v_{ei} n_0 (V_{ze} - V_{zi}) \quad (\text{Ш.5})$$

$$i\omega M n_0 v_{zi} = en_0 E_z - iK_z n T_0 + m v_{ei} n_0 (V_{ze} - V_{zi}) - \frac{\partial \pi_{zk}}{\partial x_k} \quad (\text{Ш.6})$$

Здесь (Ш.2) отражает потенциальность возмущения, (Ш.3) описывает факт сохранения заряда в рассматриваемом приближении (V_{ze}, V_{zi} —, соответственно, продольные возмущенные скорости электронов и ионов), (Ш.4) есть уравнение непрерывности для электронов. Уравнения (Ш.5) и (Ш.6) описывают, соответственно, движение электронов и ионов вдоль магнитных силовых линий, причем в (Ш.6), помимо силы трения между электронами и ионами, включен также тензор вязкости ионов с компонентами в следующем приближении:

$$\pi_{zz} = -\eta_0 \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{V} \right)$$

$$\pi_{zx} = -\eta_4 \frac{\partial v_z}{\partial y}; \quad \pi_{zy} = \eta_4 \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (\text{Ш.7})$$

$$\eta_0 = 0,96 \frac{n_0 T_0}{v_i}, \quad \eta_4 = \frac{n_0 T_0}{\omega_{Hi}}$$

В (Ш.7) учтем скорости электрического дрейфа ионов и дрейфа давления, которые при $K_x = 0$ имеют вид:

$$v_x = \frac{c E_y}{H_0} - \frac{i K_y n c T_0}{n_0 e H_0} \quad (\text{Ш.8})$$

Из системы (Ш.2)–(Ш.8) получим окончательно следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^3 + \omega^2 \left(+2\omega_i + \frac{4}{3} i K_z^2 v_{Ti}^2 \tau_i \right) + \omega \left(\frac{2}{3} i K_z^2 v_{Ti}^2 \tau_i \omega_i - \right.$$

$$\left. - 2 K_z^2 v_{Ti}^2 + \omega_i^2 \right) - \frac{2}{3} i K_z^2 v_{Ti}^2 \tau_i \omega_i^2 = 0$$

$$(\tau = \frac{1}{v_i}) \quad (\text{Ш.9})$$

Приведем некоторые из решений (Ш.9) в различных предельных случаях. Корни, для которых в (Ш.9) нельзя пренебречь ω^3 , имеют вид:

Во-вторых, в ходе работы установки могут возникать дополнительные потоки частиц и тепла, рассасывание которых поперек поля затруднено ввиду замагниченности плазмы.

Наконец, конструктивные особенности даже симметричных установок могут приводить к появлению не только радиальных, но также азимутальных градиентов. Примером может служить стелларатор.

На рис. I изображено сечение стелларатора, перпендикулярное силовым линиям H_0 . Поскольку силовые линии представляют собой в первом приближении поверхность тора, то эффективная "сила тяжести" за счет их кривизны направлена в одну сторону и образует различный угол с радиальным градиентом плотности¹⁾. С другой стороны, "сила тяжести" дает проекцию также на азимутальное направление и тогда из условий равновесия вытекает, что должен появиться азимутальный градиент плотности.

Переходя к расчету интересующего нас случая, обратим, прежде всего, внимание на то, что начальная неоднородность приобретает теперь существенно двумерный характер. Это приводит к изменению дрейфовой частоты.

В самом деле, пусть плотность n_0 есть теперь функция двух переменных — $n_0(x, y)$. Рассматривая возмущения $\sim \exp(i\omega t + iK_y y + iK_z z + iK_x x)$, выпишем обычные уравнения, из которых получаются дрейфовые колебания — уравнение непрерывности и уравнение равновесия электронов вдоль силовых линий H_0 :

$$-i\omega n + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial n_0}{\partial x} - c \frac{E_x}{H_0} \frac{\partial n_0}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ш.16})$$

$$-iK_z n T_0 - e n_0 E_z = 0$$

Из (Ш.16) имеем:

$$\omega = \frac{c T_0}{e H_0 n_0} \left(K_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - K_x \frac{\partial n_0}{\partial y} \right) \quad (\text{Ш.17})$$

Вывод дисперсионного уравнения в случае, когда начальные температура и плотность являются функцией двух координат, принципиально не отличаются от проводимого в бесстолкновительном случае

¹⁾ На существование такой естественной поперечной "гофрировки" а стеллараторе обратил внимание Р.З.Сагдеев.

для одномерной задачи (см., например, / 4 /). Необходимо только учесть, что равновесная функция f_0 , помимо зависимости от энергии частицы ϵ и $x + \frac{V_y}{\Omega_\alpha}$, должна также зависеть от $y - \frac{V_x}{\Omega_\alpha}$, т.е. $f_0(\epsilon, x + \frac{V_y}{\Omega_\alpha}, y - \frac{V_x}{\Omega_\alpha})$.

Нас интересуют частоты $\omega < K_z V_{Ti}$. Проводя стандартные выкладки аналогично, например, / 4 /, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$2 - A \frac{\omega_T^* \omega}{(K_z V_{Ti})^2} + i \sqrt{\pi} \frac{1}{K_z V_{Ti}} [\omega - \omega_i^* + \frac{1}{2} \omega_T^* (1 + \delta)] A(1 + i \frac{\omega}{K_z V_{Ti}} \frac{2}{\sqrt{\pi}}) = 0 \quad (III.18)$$

Здесь $\omega_T^* = \frac{c}{e n_0} (K_y \frac{\partial T_i}{\partial x} - K_x \frac{\partial T_i}{\partial y})$, $\omega_i^* = \frac{c T_i}{n_0 e n_0} (K_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - K_x \frac{\partial n_0}{\partial y})$

$$A = \exp(-\frac{\theta_i^2}{2}) I_0(\frac{\theta_i^2}{2}), \quad \theta_i = \frac{K_y (\frac{\partial T}{\partial M})^{\frac{1}{2}}}{\Omega_i}$$

$$\delta(\theta_i) = \theta_i^2 [1 - \frac{I_1(\frac{\theta_i^2}{2})}{I_0(\frac{\theta_i^2}{2})}]$$

В (III.18) не учтены малые вклады от электронных токов, что законно при $K_y \tau_i \ll 1$.

Решая (III.18) получим следующее выражение для инкремента:

$$\gamma_m \omega = -K_z V_{Ti} \frac{i \left(\frac{2}{A} \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} \frac{\omega_i^{*2}}{K_z^2 V_{Ti}^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha^*}{\beta^*} (1 + \delta) - 1 \right] \left\{ \frac{\alpha^*}{\beta^*} + 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha^*}{\beta^*} (1 + \delta) - 1 \right] \right\} \right)}{\frac{\omega_i^{*2}}{K_z^2 V_{Ti}^2} \left\{ \frac{\alpha^*}{\beta^*} + 2 \left[\frac{1}{2} \frac{\alpha^*}{\beta^*} (1 + \delta) - 1 \right] \right\}^2 + \pi} \quad (III.19)$$

Здесь $\alpha^* = \frac{1}{T_i} (K_y \frac{\partial T_i}{\partial x} - K_x \frac{\partial T_i}{\partial y})$; $\beta^* = \frac{1}{n_0} (K_y \frac{\partial n_0}{\partial x} - K_x \frac{\partial n_0}{\partial y})$

Выражение для $Re \omega$, которое, вообще говоря, меньше $\gamma_m \omega$, мы здесь не выписываем ($Re \omega \sim \frac{K_z^2 V_{Ti}^2}{\omega_i^*}$).

Из (III.19) следует условие неустойчивости:

$$Re \omega = \omega_i \pm \sqrt{2} K_z V_{Ti}$$

$$\gamma_m \omega \sim \frac{K_z^2 V_{Ti}^2}{V_i} \frac{\pm \omega_i + \frac{4}{\sqrt{2}} K_z V_{Ti}}{\pm \omega_i + \frac{2}{\sqrt{2}} K_z V_{Ti}} \quad (III.10)$$

Из (III.10) видим, что неустойчивость существует, если

$$\frac{4}{3 \sqrt{2}} K_z V_{Ti} < |\omega_i| < \frac{2}{\sqrt{2}} K_z V_{Ti} \quad (III.11)$$

Анализ (III.10) и (III.9) также показывает, что если размеры установки допускают условие (III.11), то можно подобрать такие K_z , для которых $\gamma_m \omega \sim \omega_i \min(\omega_i \min \sim \frac{1}{2} \frac{c T}{e n})$, τ - поперечный размер системы), что в свою очередь даёт диффузию, близкую к боровской. В частности, для параметров установки "стелларатор", указанных в / II /, можно достигнуть совпадения $\gamma_m \omega$ из (III.10) с $\omega_i \min$. Согласно результатам / II /, диффузия Бома действительно наблюдалась на данной установке.

Неустойчивые корни, для которых в (III.9) можно пренебречь ω^2 , имеют вид:

$$Re \omega \sim \gamma_m \omega \sim K_z V_{Ti} \sqrt{\omega_i \tau_i} \ll K_z V_{Ti} \quad (\omega_i^2 \approx 2 K_z^2 V_{Ti}^2) \quad (III.12)$$

$$\gamma_m \omega \sim \frac{\omega_i^2 \tau_i K_z^2 V_{Ti}^2}{\omega_i^2 - 2 K_z^2 V_{Ti}^2} \quad (2 K_z^2 V_{Ti}^2 > \omega_i^2) \quad (III.13)$$

Как видим, неустойчивое решение (III.12) фактически не подвержено влиянию "shear'a" и даёт диффузию при естественном допущении $K_y \sim K_x$ с коэффициентом

$$D \sim \frac{\tau_i^{3/2}}{\tau_i} \frac{V_{Ti}^{3/2}}{V_i^{1/2}} \quad (III.14)$$

Эта величина может заметно превышать $\chi_c = \tau_i^2 V_i$ - классический коэффициент температуропроводности.

Представляет еще интерес оценить диффузию для возмущений типа (III.12) при наличии "shear'a". Учитывая, что согласно / 3 /

наиболее сильно взаимодействуют ячейки возмущений, которые только начали перекрываться, получим для (Ш.12) следующий коэффициент диффузии:

$$D \sim \frac{z_i^2 \ell_i^2}{\theta \pm z_i^2} V_{Ti} \quad (\text{Ш.15})$$

(ℓ_i - длина свободного пробега ионов).

Здесь учтено, что, как следует из условий существования (Ш.12), размер области возмущения $\Delta X \sim \frac{z_i}{\theta}$, $K_y \sim \frac{1}{\Delta X}$. Этот коэффициент диффузии может быть также весьма большим.

Обратим внимание на тот факт, что существенную роль в возникновении данной неустойчивости играет продольная компонента вязких сил. Мы будем, поэтому, в дальнейшем называть её дрейфово-вязкой неустойчивостью. Известно (/ 15 /, / 22 /), что поперечная компонента вязких сил оказывает стабилизирующее действие на дрейфово-диссипативную неустойчивость. Однако, как следует из других примеров (см., например, / 23 /, / 24 /), она также может быть причиной неустойчивости.

Ш.2. Бесстолкновительный случай

Если столкновения отсутствуют, то особую роль приобретают возмущения, связанные с существованием температурных градиентов. На важность такого класса возмущений было обращено внимание в /25/, а в / 4 / была найдена неустойчивость, развивающаяся при $\frac{d \ln T}{d \ln n} > 2$ и не стабилизируемая "shear'au".

Уже в / 3 / было отмечено, что довольно трудно создать экспериментальные условия для выхода из неустойчивого диапазона градиентов плотности и температуры, поскольку суммарный поток частиц на стенку установки меньше потока тепла. Эти условия, естественно, могут только ухудшаться, если по какой-либо причине неустойчивая область градиентов увеличится.

Как оказывается, к расширению области неустойчивости может привести возможная неколлинеарность градиентов плотности и температуры. Эта возможность может быть оправдана по ряду причин. Во-первых, в реальных установках не существует такой высокой степени симметрии, чтобы возможные градиенты плотности и температуры были только радиальными. Но тогда из общих условий равновесия отнюдь не следует обязательная коллинеарность ∇n_0 и ∇T_0 .

$$\frac{(\frac{\partial T_i}{\partial x}) n_0}{(\frac{\partial n_0}{\partial x}) T_i} > \frac{2}{1+\delta} \frac{(1 - \frac{K_x}{K_y} \frac{\frac{\partial n_0}{\partial y}}{\frac{\partial n_0}{\partial x}})}{(1 - \frac{K_x}{K_y} \frac{\frac{\partial T_i}{\partial y}}{\frac{\partial T_i}{\partial x}})}$$

Согласно (Ш.20) видим, что если ∇n_0 и ∇T_i неколлинеарны, то область неустойчивости существенно расширяется. Так, если $\frac{\partial T_i}{\partial y} = 0$, то неустойчивость может возникать при $\frac{\partial T_i}{\partial x} \ll \frac{\partial n_0}{\partial x}$. При этом, если $\frac{\partial n_0}{\partial y} \ll \frac{\partial n_0}{\partial x}$, то $K_x \gg K_y$. Нужно, однако, иметь в виду, что минимальное значение β^* , которого мы ещё можем достигнуть, не должно нарушать условия $\omega_i^* \geq K_z V_{Ti}$ (иначе мы выйдем за пределы применимости выражения для $Re \omega$ и (Ш.19)).

Из (Ш.20) далее следует, что возможно возникновение неустойчивости, если $\frac{\partial T_i}{\partial x}$ и $\frac{\partial n_0}{\partial x}$ имеют разные знаки.

Естественно, что качественная сторона результатов не изменится для случая цилиндрической геометрии ($x \rightarrow r$, $y \rightarrow \varphi$).

Обратим теперь внимание на то, что при $(K_z z_i) \gg 1$ возможна неустойчивость в плазме с неоднородной по x плотностью для случая потенциальных возмущений. В самом деле, дисперсионное уравнение теперь принимает вид:

$$2 + (\omega - \omega_i) \frac{i}{\sqrt{2} K_z V_{Ti} \sqrt{K_y z_i}} \left(1 + i \frac{\omega}{K_z V_{Ti}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{i \sqrt{\pi}}{K_z V_{Ti}} (\omega - \omega_e) = 0 \quad (\text{Ш.21})$$

Из (Ш.21) следует существование неустойчивого решения с $Im \omega \sim \frac{K_z V_{Ti} K_y z_i (K_z V_{Ti})^2}{\omega_i^2}$; $Re \omega \sim \frac{K_y z_i (K_z V_{Ti})^2}{\omega_i}$, если:

$$\frac{K_y z_i K_z V_{Ti}}{\omega_i} < 1; \quad K_y z_i \sim \sqrt{\frac{M}{m}} \quad (\text{Ш.22})$$

Однако эта неустойчивость приводит к малой диффузии, т.к. она развивается на коротких длинах волн.

Отметим также, что дисперсионное уравнение для потенциальных возмущений содержит неустойчивые решения при наличии эффективной "силы тяжести", а также продольного тока, но неустойчивости возможны лишь при нестандартных условиях эксперимента.

IV. НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Учтем теперь возмущение магнитного поля, для чего введем векторный потенциал $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\vec{k}\vec{z} - i\omega t}$,

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{H}; \vec{E} = -i\vec{k}\varphi + i\frac{\omega}{c}\vec{A} \quad (IV.1)$$

Интересуясь $\beta \ll 1$, устремим H_z к нулю. Тогда из условия калибровки $\text{div } \vec{A} = 0$:

$$A_z = -\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x k_z} A_x \gg A_x; k_x \gg k_z, H_z \rightarrow 0. \quad (IV.2)$$

Из (IV.1) с учетом (IV.2) получаем

$$A_z = \frac{i}{k_z^2} [\vec{k} \cdot \vec{H}]_z = \frac{4\pi}{ck_z^2} n^0 \sum_{\beta} e_{\beta} \rho_{\beta} \quad (IV.3)$$

Здесь c - скорость света.

Из (IV.2) и (IV.3) следует, что величина фактора непотенциальности зависит от величины возникающего в плазме продольного возмущенного тока. Это отличает приведенную ниже оценку непотенциальности возмущений от используемой обычно $\omega \ll k_z V_A$ (см., например, / I4 /, где учитывался вклад поперечных возмущенных токов, который в силу неравенства (II,20) мал.

Для выяснения особенностей влияния электрического и магнитного полей на непотенциальный фактор в возмущенной функции распределения проведем последовательное вычисление возмущенной функции распределения f_{α} . В случае непотенциальных возмущений f_{α} записывается в виде:

$$f_{\alpha} = -e^{-\sum_{\beta} \nu_{\beta} t} \int dt' e^{\sum_{\beta} \nu_{\beta} t'} \left\{ \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right] \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f_{\alpha} - \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} \left(\tilde{Q}_{\alpha} + \frac{\vec{v} \cdot \tilde{P}_{\beta}}{V_{T\beta}^2} \right) \right\} \quad (IV.4)$$

Используя выражения (IV.1), (IV.2) и (IV.3), имеем:

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\vec{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} \right] = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(i \frac{k \cdot \vec{v}}{V_{T\alpha}^2} \varphi - \sum_{\beta} i \frac{4\pi n_{\alpha} e_{\beta}}{c^2 k_x^2 V_{T\alpha}^2} \omega \rho_{\beta} V_{T\alpha} - i k_y \frac{\varphi}{\Omega_{\alpha}} \frac{d}{dx} \right) f_{\alpha} \quad (IV.5)$$

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} [\vec{v} \times \vec{H}] \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \vec{v}} = \sum_{\beta} i \frac{4\pi n_{\alpha} e_{\beta}}{c^2 k_x^2 m_{\alpha}} k_y \rho_{\beta} V_{T\alpha} \frac{1}{\Omega_{\alpha}} \frac{d}{dx} f_{\alpha} \quad (IV.6)$$

Из сопоставления формул (IV.5) и (IV.6) видно, что непотенциальный фактор входит в возмущение электрического поля пропорционально частоте ω , а в возмущение магнитного поля - пропорционально дрейфовой частоте. Это замечание будет использовано в следующем параграфе.

Введем эффективную "частоту столкновений" в виде

$$\sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} - \sum_{\beta} i \theta_{\alpha\beta} \frac{\omega_{\alpha}^2}{k_x^2 c^2} (\omega_{\alpha} - \omega) \quad (IV.7)$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = \beta \\ 0 & \text{при } \alpha \neq \beta \end{cases}; \omega_{\alpha}^2 = \frac{4\pi n_{\alpha} e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}} \quad \text{- ленгмюровская частота частиц (IV.8) сорта } \alpha.$$

Из (IV.4)-(IV.7) получим окончательно возмущенную функцию распределения в случае непотенциальных возмущений:

$$f_{\alpha} = -e^{-\sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta} t} \int dt' \left[\frac{e_{\alpha} \tilde{\varphi}}{T_{\alpha}} (i\vec{k}\vec{v} - i\omega_{\alpha}) - \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} \left(\tilde{Q}_{\alpha} + \frac{\vec{v} \cdot \tilde{P}_{\beta}}{V_{T\beta}^2} \right) - \sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta} \frac{\vec{v} \cdot \tilde{P}_{\beta}}{V_{T\beta}^2} \right] \times \\ \times f_{\alpha}^0 e^{i\vec{k}\vec{z}(t') - i\vec{k}\vec{z}(t) - i\omega(t'-t) + i \sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta} t'} \quad (IV.9)$$

которое только тем отличается от возмущенной функции распределения в случае потенциальных возмущений (II.5), что при $\frac{\nu_{\alpha\beta}}{V_{T\beta}^2}$ в (IV.9) стоит множитель $\sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta}$, определяемый выражением (IV.7), а не просто частота столкновений $\sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}$, как в (II.5).

Таким образом, вывод уравнений для \tilde{Q}_{α} и \tilde{P}_{α} в непотенциальном случае будет совершенно аналогичен выводу соответствующих уравнений в потенциальном случае, при условии замены в соответствующих местах $\sum_{\beta} \nu_{\alpha\beta}$ на $\sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta}$.

IV.2. Дисперсионное уравнение непотенциальных колебаний

Воспользовавшись равенством

$$\frac{\Omega_{\alpha}^2}{k_x^2 V_A^2} = \frac{\omega_{\alpha}^2}{k_x^2 c^2} \quad (IV.10)$$

перепишем систему уравнений (II.21)-(II.24) для непотенциальных возмущений

$$\tilde{Q}_{\alpha} = \frac{e\tilde{\varphi}}{T_{\alpha}} - i \frac{\sum_{\beta} \nu'_{\alpha\beta} \tilde{P}_{\beta}}{k_x V_{T\alpha}^2}; \tilde{Q}_i = -\frac{e\tilde{\varphi}}{T_i} - i \frac{\sum_{\beta} \nu'_{i\beta} \tilde{P}_{\beta}}{k_x V_{T_i}^2} \quad (IV.11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{\sum v_{ep} \tilde{P}_{e2}}{K_2 V_{Te}^2} &= -\frac{\Omega_i^2}{K_L^2 V_A^2} \frac{(\omega_e - \omega)}{K_2 V_{Ti}^2} \tilde{P}_{e2} + \frac{\Omega_i^2}{K_L^2 V_A^2} \frac{(\omega_e - \omega)}{K_2 V_{Ti}^2} \tilde{P}_{i2} \\
 -\frac{\sum v_{ip} \tilde{P}_{i2}}{K_2 V_{Ti}^2} &= -\frac{\Omega_i^2}{K_L^2 V_A^2} \frac{(\omega_i - \omega)}{K_2 V_{Ti}^2} \tilde{P}_{i2} + \frac{\Omega_i^2}{K_L^2 V_A^2} \frac{(\omega_i - \omega)}{K_2 V_{Ti}^2} \tilde{P}_{e2}
 \end{aligned} \right\} \text{(IV.12)}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{P}_{e2} &= \frac{1}{K_2} \left[\frac{e \tilde{\varphi}}{T_e} (\omega + i\nu_e - \omega_e) - i\nu_e \tilde{Q}_e \right] - i \frac{\sum v_{ep} \tilde{P}_{e2}}{K_2 V_{Te}^2} (\omega_e + i\nu_e) \\
 \tilde{P}_{i2} &= -\frac{1}{K_2} \left[\frac{e \tilde{\varphi}}{T_i} (\omega + i\nu_i - \omega_i) - i\nu_i \tilde{Q}_i \right] - i \frac{\sum v_{ip} \tilde{P}_{i2}}{K_2 V_{Ti}^2} (\omega_i + i\nu_i)
 \end{aligned} \right\} \text{(IV.13)}$$

В уравнениях (IV.11) - (IV.13) избегая громозкости выражений мы пренебрегали членами $\sim \frac{\omega}{K_2 V_{Ti}}$, считая

$$\frac{\omega}{K_2 V_A} > 1 \quad \frac{\Omega_i^2}{K_L^2 V_A^2} > 1 \quad \text{(IV.14)}$$

Однако, как будет видно в дальнейшем, пренебрежение членами порядка $\sim \frac{\omega}{K_2 V_{Ti}}$ аналогично отсутствию влияния непотенциальных возмущений на устойчивость плазмы. Последнее приводит (за исключением /4/) к затуханию колебаний в случае малых столкновений и к безразличному равновесию в бесстолкновительной плазме /6/.

Учет малых членов $\sim \frac{\omega}{K_2 V_{Ti}}$ приводит к неустойчивым решениям.

Вывод дисперсионного уравнения дадим, исходя из кинетического уравнения (II.1), соответственно, для электронов и ионов. Результаты исследования основных уравнений в II и анализ их в непотенциальном случае IV (/6/) позволили нам воспользоваться кинетическим уравнением в дрейфовом приближении (подробнее см. в /10/):

$$-i\omega f_i + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} + V_z \frac{H_x}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} + iK_2 V_z f_i + \frac{e E_z}{M} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} = 0 \quad \text{(IV.15)}$$

$$-i\omega f_e + c \frac{E_y}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} + V_z \frac{H_x}{H_0} \frac{\partial f_0}{\partial x} + iK_2 V_z f_e - \frac{e E_z}{m} \frac{\partial f_0}{\partial V_z} = f t_e. \quad \text{(IV.16)}$$

Проводимое ниже рассмотрение бесстолкновительной плазмы при наличии градиента температуры показывает, что для раскачки непотенциальных возмущений необходимым является присутствие сколь угодно малого градиента температуры, т.е.

$$\frac{d \ln T_0}{d \ln n_0} \neq 0$$

$$\frac{\omega}{k_z} < V_{Ti}$$

Наличие градиента температуры соответствует равенству

$$V_A > V_{Ti}$$

$$\frac{\partial f_{\alpha}^0}{\partial x} = \left[K_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{V_z^2}{V_{T\alpha}^2} - 1 \right) t_{\alpha\alpha} \right] f_{\alpha}^0 \quad (\text{IV.17})$$

$$\frac{\omega}{k_z} < V_A$$

где $K_0 = \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$; $t_{\alpha\alpha} = \frac{1}{T_{\alpha\alpha}} \frac{dT_{\alpha\alpha}}{dx}$ (IV.18)

Далее воспользовавшись выражениями (IV.5) и (IV.6), получаем возмущенную функцию распределения частиц сорта α в виде

$$f_{\alpha}^i = \frac{-\frac{e\varphi}{T_{\alpha}} \omega_{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t_{\alpha\alpha}}{K_0}\right) + \left[-A_{\alpha} K_z^2 \Delta P_z \omega_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t_{\alpha\alpha}}{K_0}\right) + \frac{e\varphi}{T_{\alpha}} K_z + A_{\alpha} K_z^2 \Delta P_z \omega\right] V_z}{\omega - K_z V_z} - \frac{\frac{e\varphi}{T_{\alpha}} \frac{t_{\alpha\alpha}}{K_0} \omega_{\alpha} \frac{V_z^2}{2 V_{T\alpha}^2} + \frac{1}{2} A_{\alpha} K_z^2 \Delta P_z \frac{\omega_{\alpha}}{V_{T\alpha}^2} \frac{V_z^3}{2} \frac{t_{\alpha\alpha}}{K_0}}{\omega - K_z V_z} \Bigg\} f_{\alpha}^0 \quad (\text{IV.19})$$

$$\frac{V_e}{k_z V_{Te}} < 1$$

Здесь A_{α} имеет размерность обратную квадрату частоты:

$$A_{\alpha} = \frac{\omega_{\alpha}^2}{k_z^2 c^2} \frac{1}{k_z^2 V_{T\alpha}^2}; \quad \Delta P_z = P_{e_z} - P_{i_z} \quad (\text{IV.20})$$

имеют
= имеют

Из (IV.20) имеем:

$$Q_i = -\frac{e\varphi}{T_i} \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega - \omega_i}{k_z V_{Ti}} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_i}{k_z V_{Ti}} \frac{t_{oi}}{K_0} \right) + A_i K_z \Delta P_z (\omega_i - \omega) \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{k_z V_{Ti}} \right) \quad (\text{IV.21})$$

$$Q_c = \frac{e\varphi}{T_c} - A_c K_2 \Delta P_2 (\omega_c - \omega) \quad (\text{IV.22})$$

$$P_{i2} = \frac{e\varphi}{T_i} \frac{1}{K_2} (\omega_i - \omega) \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{K_2 V_{Ti}} \right) + A_i \Delta P_2 (\omega_i - \omega) \omega \left(1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{K_2 V_{Ti}} \right) \quad (\text{IV.23})$$

$$P_{e2} = -\frac{e\varphi}{T_c} \frac{1}{K_2} (\omega_c - \omega) - A_c \Delta P_2 (\omega_c - \omega) \omega \quad (\text{IV.24})$$

Здесь опущены члены $\sim \frac{\omega}{K_2 V_{Te}}$.

Сравнивая систему полученных уравнений (IV.21)–(IV.24) в пределе $t_{oi}/k_0 \rightarrow 0$ с системой уравнений (IV.II)–(IV.I3) в пределе бесстолкновительной плазмы, видим их тождественность. Последнее обстоятельство доказывает правильность представления уравнения (П.I) в виде значительно упрощенных по форме уравнений (IV.I5) и (IV.I6).

Решая систему уравнений (IV.21) – (IV.24), приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 - 2\omega \frac{1}{A\omega_i} \frac{K_0}{t_{oi}} - \frac{1}{A} \left(1 - 2 \frac{K_0}{t_{oi}} - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \frac{T_i}{T} \frac{K_2 V_{Ti}}{\omega_i} \frac{K_0}{t_{oi}} \right) = 0 \quad (\text{IV.25})$$

где $A = A_c + A_i$; $\frac{1}{T} = \frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_i}$.

Из (IV.25)

$$\omega_{4,2} = \frac{1}{A\omega_i} \frac{K_0}{t_{oi}} \pm \sqrt{\frac{1}{A^2\omega_i^2} \frac{K_0^2}{t_{oi}^2} + \frac{1}{A} \left[1 - 2 \frac{K_0}{t_{oi}} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{\pi}} \frac{T_i}{T} \frac{K_2 V_{Ti}}{\omega_i} \right) \right]} \quad (\text{IV.26})$$

Одним из условий существования максимального инкремента является $\omega_i < \kappa_z V_{Ti}$. С другой стороны система уравнений (IV.21) – (IV.24) написана в предположении $\frac{\omega_i}{\kappa_z V_{Ti}} > \kappa_1 z_i$, что является условием пренебрежения перпендикулярными магнитному полю возмущенными средними скоростями частиц. Учитывая малость отношения $\frac{\kappa_z}{\kappa_1} \ll 1$, что использовалось при выводе фактора непотенциальности, мы приходим к неравенству $\kappa_1 z_i < \frac{\kappa_z}{\kappa_0} \ll 1$, освобождающему нас от необходимости исследования влияния учета конечного ларморовского радиуса ионов на устойчивость системы.

Как показано в /4/ критерием возникновения аналогичной неустойчивости, связанной с наличием градиента температуры, для потенциальных колебаний является условие

$$\frac{d \ln T_0}{d \ln n_0} > 2, \quad \omega < \kappa_z V_{Ti} \quad (\text{IV.27})$$

Как видим, это условие, хотя и приводит к необходимости весьма жестких требований к созданию устойчивого режима, но, однако, не носит универсального характера.

Следующий из (IV.26) критерий неустойчивости для непотенциальных колебаний:

$$\frac{d \ln T_0}{d \ln n_0} \neq 0 \quad (\text{IV.28})$$

хотя и является универсальным, х) однако, существует лишь при достаточно большой плотности плазмы, что, как уже было отмечено выше, является отражением сильной непотенциальности колебаний ($A \omega_i^2 > \kappa_1 z_i$), что соответствует $\beta > \frac{z}{R}$.

х) С точностью до членов порядка $\sim \frac{\omega^2}{\kappa_z^2 V_{Ti}^2}$.

У. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенное рассмотрение показывает, что существует довольно широкий класс опасных неустойчивостей в диапазоне частот $\omega \ll k_z v_{Ti}$. Это ставит под сомнение целесообразность применения "shear'a", как фактора стабилизации неустойчивостей.

Конечно, если мы переходим в высокотемпературный режим, то роль "столкновительных" неустойчивостей падает. Однако, такие неустойчивости, как циклотронная / 19 / или рассмотренная в настоящей работе неустойчивость при $k_y r_c \gg 1$ (см. (Ш.21)), давая сами по себе малую диффузию, могут служить "затравкой" для столкновительных неустойчивостей (так называемые "двухэтажные" неустойчивости, см. / 23 /).

Дрейфово-температурная неустойчивость при малых азимутальных градиентах приводит, в первую очередь, к снятию неколинеарности ∇T и ∇n_0 . Однако, поскольку тенденция к возникновению неколинеарности в реальных условиях все время существует, то плазма по этой причине находится в режиме, близком к неустойчивому. При этом рассеяние частиц на флуктуациях полей может заметно возрасти (см., например / 28 / - / 30 /).

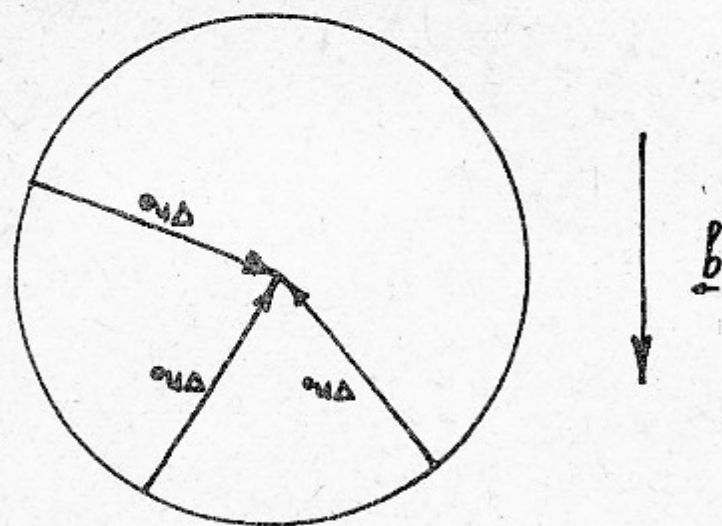
По-видимому, продольная гофрировка поля является более эффективным стабилизирующим фактором, поскольку при этом, по крайней мере, становятся менее опасными неустойчивости, развивающиеся на возмущениях $\Delta x \lesssim \frac{r_c}{\theta}$.

Выражаем большую благодарность А.А.Галееву и Р.З.Сагдееву за ценные советы и плодотворные дискуссии, Е.Я.Когану, В.Н.Оравскому, совместные работы с которыми весьма способствовали появлению данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- / 1 / *B. Coppi, M. N. Rosenbluth*, доклад на Международной конференции, Калэм, сентябрь, 1965 г.
- / 2 / *N. A. Krall, M. N. Rosenbluth, Phys. Fl. V. 8, 1488 (1965)*.
- / 3 / Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, доклад на Международной конференции, Калэм, сентябрь, 1965 г.
- / 4 / А.А.Галеев, В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 44, 903 (1963).
- / 5 / С.С.Моисеев, ЖЭТФ (в печати).
- / 6 / А.М.Фридман, ЖЭТФ (в печати).
- / 7 / Е.Я.Коган, С.С.Моисеев, В.Н.Ораевский, ПМТФ (в печати).
- / 8 / Е.Я.Коган, С.С.Моисеев, ЖТФ (в печати).
- / 9 / С.С.Моисеев, ПМТФ (в печати).
- / 10 / А.М.Фридман, ЖТФ (в печати).
- / 11 / *W. Stodiek, D. J. Grove, J. O. Hessler*, доклад на международной конференции, Калэм, сентябрь, 1965 г.
- / 12 / *M. N. Rosenbluth, N. Krall, N. Rostoker* ядерный синтез, Дон, 1962, кн. I, 143 (1962).
- / 13 / *E. Gross, M. Krook. Phys. Rev. 102, 593 (1956)*.
- / 14 / А.Б.Михайловский, О.П.Погуце, препринт ИАЭ, Москва (1964).
- / 15 / Г.М.Заславский, С.С.Моисеев, ЖТФ, XXXIV, 410 (1964).
- / 16 / А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. Атомная энергия, 15, 451 (1963).
- / 17 / А.М.Фридман, ПМТФ, I, 99 (1964).
- / 18 / Б.Б.Кадомцев, ЖЭТФ, 43, 1688 (1962).
- / 19 / А.Б.Михайловский. Вопросы теории плазмы, вып. 3, стр. 141, 1963, Атомиздат, Москва.
- / 20 / А.М.Фридман, ДАН, 154, 567 (1964).
- / 21 / С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 44, 763, (1963).
- / 22 / А.Б.Михайловский, О.П.Погуце, ДАН, 156, 64 (1964).
- 23 / Е.Я.Коган, С.С.Моисеев, В.К.Ораевский, ПМТФ, 6 (1965).

- /24/ Н.С.Ерохин, С.С.Моисеев, ПМТФ (в печати).
- /25/ Л.П.Рудаков, Р.З.Сагдеев, ДАН, 138, 581 (1961).
- /26/ Б.Б.Кадамцев. Вопросы теории плазмы, в. IУ, Атомиздат, 1964.
- /27/ Б.Р.Сайдем. Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, т. I, стр. 89, Атомиздат, 1959 г.
- /28/ *S. Ichimaru, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Lett., 8, 231, (1962)*
- /29/ Л.С.Богdashkevich, А.А.Рухадзе, В.П.Силин, Радиофизика, 5, 1093 (1962).
- /30/ И.А.Ахиезер, Диссертация, г.Харьков (1965).



Ответственный за выпуск Г.М.Заславский

Тираж 200 экз. Бесплатно
 Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР
 13.01.1966 г.