

К. 26

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт 56

В.И.Карпман

**К теории возмущений для нелинейных
колебаний в бесстолкновительной плазме**

НОВОСИБИРСК 1966

v+

А Н Н О Т А Ц И Я

Развивается динамическая теория возмущений для колебаний в бесстолбовительной плазме. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для "медленных" процессов, описывающим нелинейное взаимодействие волн с частицами плазмы и между собой.

Введение: В настоящей работе рассматривается динамическая теория возмущений для колебаний в бесстолбовительной плазме. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для "медленных" процессов, описывающим нелинейное взаимодействие волн с частицами плазмы и между собой.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается динамическая теория возмущений для колебаний в бесстолбовительной плазме. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для "медленных" процессов, описывающим нелинейное взаимодействие волн с частицами плазмы и между собой.

2. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается динамическая теория возмущений для колебаний в бесстолбовительной плазме. Суммирование секулярных членов теории возмущений приводит к уравнениям для "медленных" процессов, описывающим нелинейное взаимодействие волн с частицами плазмы и между собой.

$$F(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}'} F_0(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} + \dots \quad (3)$$

$$F(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}'} F_0(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}, \quad E(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} E_0(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \quad (4)$$

$$E_0(\omega) = \int E_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k}, \quad E_0(\mathbf{k}) = \int E_0(\omega) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\omega \quad (5)$$

и т.д. (все функции в аннотации даны в виде интегралов по частоте ω и волновому вектору \mathbf{k} , кроме тех, которые даны в виде функций от времени t и координаты \mathbf{r}).

ON THE PERTURBATION THEORY FOR NONLINEAR
OSCILLATIONS IN A COLLISIONLESS PLASMA.

by

V.I. Karpman

ABSTRACT

The dynamical perturbation theory for nonlinear oscillations in a collisionless plasma is derived. Summation of the series of secular terms leads to the equations for "slow" processes, describing nonlinear wave-particles and wave-wave interactions in a plasma.

I. В настоящем сообщении рассматривается теория возмущений для нелинейных плазменных колебаний, исходя из общей постановки задачи, указанной Л.Д.Ландау /1/. Мы ищем решение нелинейной системы уравнений Больцмана-Чласова и Пуассона для плазменных колебаний при заданном начальном возмущении в виде рядов по степеням этого возмущения и созданного им поля. Формальные разложения такого рода содержат последовательности секулярных членов, для исследования и суммирования которых разработана соответствующая диаграммная техника. В результате суммирования получаются уравнения для "перенормированных" функций распределения частиц и напряженностей поля колебаний, уже не содержащие секулярностей. В частности, оказывается, что суммирование наиболее "сильно" растущих членов приводит к уравнениям квазилинейного приближения /2,3/. Суммирование остальных классов диаграмм приводит к перенормированным величинам, учитывающим взаимодействие волн в различных порядках.

2. Основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial F_j}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial F_j}{\partial \vec{z}} + \frac{e_j}{m_j} \vec{E} \frac{\partial F_j}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = 4\pi \sum_j e_j N_j \int F_j(t, \vec{z}, \vec{v}) d\vec{v} \quad (2)$$

(j - индекс, указывающий сорт частиц. В дальнейшем этот индекс, а также суммирование по нему, для краткости опускаются; восстановленные суммирования в окончательных формулах не представят затруднений).

Следуя /1/, будем искать решение уравнений (1), (2) при начальном условии

$$F(t=0, \vec{z}, \vec{v}) = \sum_k F_k^0(\vec{v}) e^{i\vec{k}\vec{z}} = f(\vec{v}) + \sum_{k \neq 0} g_k(\vec{v}) e^{i\vec{k}\vec{z}} \quad (3)$$

Разложим $F(t, \vec{z}, \vec{v})$, $\vec{E}(t, \vec{z})$ в ряд Фурье

$$F(t, \vec{z}, \vec{v}) = \sum_k F_k(t, \vec{v}) e^{i\vec{k}\vec{z}}, \quad \vec{E}(t, \vec{z}) = \sum_k \vec{E}_k(t) e^{i\vec{k}\vec{z}} \quad (4)$$

(нормировочный объем всюду принят равным единице) и применим преобразование Лапласа к величинам, зависящим от времени

$$E_k(\omega) = \int_0^\infty \vec{E}_k(t) e^{i\omega t} dt, \quad E_k(t) = \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} E_k(\omega) e^{-i\omega t} d\omega/2\pi \quad (5)$$

и т.д. (все функции в лапласовском представлении являются аналитическими в верхней полуплоскости ω , кроме, может быть, некоторой

окрестности действительной оси). Разложим теперь функцию распределения в ряд по степеням поля

$$F_k(\omega, \vec{\sigma}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_k^{(n)}(\omega, \vec{\sigma}), \quad (6)$$

где $F_k^{(n)} \sim E_k^n$, $E_k \sim g_k$. За нулевое приближение примем $f(\sigma)$ (см. (3)). Из (1), (3) получается следующее выражение для общего члена

$$F_k^{(n)}(\omega, \vec{\sigma}) = \left(\frac{e}{2\alpha i m} \right)^n \sum_{\vec{k} = \vec{k}_1 + \dots + \vec{k}_n} \left\{ \int d\omega_1 \dots d\omega_n \frac{E_{k_s}(\omega_s)}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \dots \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{\vec{E}_{k_n}(\omega_n)}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma} - \sum_{i=1}^{n-1} (\omega_i - \vec{k}_i \vec{\sigma})} \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{f(\vec{\sigma})}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma} - \sum_{i=1}^n (\omega_i - \vec{k}_i \vec{\sigma})} + \dots \right. \\ \left. + \frac{2\alpha i^2 m}{e} \int d\omega_1 \dots d\omega_{n-1} \frac{\vec{E}_{k_s}(\omega_s)}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \dots \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{\vec{E}_{k_{n-1}}(\omega_{n-1})}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma} - \sum_{i=1}^{n-2} (\omega_i - \vec{k}_i \vec{\sigma})} \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{g_{k_n}(\vec{\sigma})}{\omega - \vec{k} \vec{\sigma} - \sum_{i=1}^n (\omega_i - \vec{k}_i \vec{\sigma})} \right\} \\ (\text{контуры интегрирования по } \omega_i \text{ должны удовлетворять условиям } \Im m(\omega - \sum \omega_i) > 0, \Im m \omega_i > 0).$$

Это выражение изображается диаграммой, приведенной на рис. 1.

Сплошным вертикальным линиям диаграммы соответствуют величины $E_{k_s}(\omega_s)$, горизонтальным - "пропэгаторы" $[\omega - \vec{k} \vec{\sigma} - \sum_{i=1}^s (\omega_i - \vec{k}_i \vec{\sigma})]^{-1}$, $0 \leq s \leq n$; s -й вершине отвечает интегродифференциальный оператор $(e/2\alpha i m) \partial/\partial \vec{\sigma} \int d\omega_s$, кружок в конце первого члена рис. 1 изображает функцию $f(\vec{\sigma})$, а вертикальная пунктирная линия в конце второго члена - функцию $g_k(\vec{\sigma})$. Порядок члена равен числу вершин.

Рассмотрим теперь уравнение для поля волны (2). Учитывая (5) и (6), перепишем его в виде

$$\kappa E_k(\omega) = -4\pi i c N \sum_{n=1}^{\infty} \int F_k^{(n)}(\omega, \vec{\sigma}) d\vec{\sigma} \quad (8)$$

Если отбросить в правой части все члены с $n > 1$ и подставить сюда (7) с $n=1$, то получится известное уравнение для поля волны в линейном приближении, впервые полученное Л.Д. Ландау [1]:

$$\kappa E_k(\omega) E_k(\omega) = 4\pi e N \int \frac{g_k(\vec{\sigma}) d\vec{\sigma}}{\omega - \kappa \vec{\sigma}} \quad (9)$$

где $E_k(\omega)$ - диэлектрическая проницаемость плазмы

$$E_k(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\kappa^2} \int \frac{d\vec{\sigma}}{\omega - \kappa \vec{\sigma}} \frac{df}{d\vec{\sigma}} \quad (10)$$

Из (9) следует, что в линейном приближении

$$E_k(t) \approx E_k^0 e^{-i\omega_k t}, \quad E_k^0 = \frac{4\pi e N \vec{e}}{\kappa^2} \left(\frac{dE_k(\omega_k)}{d\omega_k} \right)^{-1} \int \frac{g_k(\vec{\sigma}) d\vec{\sigma}}{\omega_k^0 - \vec{e} \vec{\sigma} + i0}, \quad (II)$$

где частота $\omega_k = \omega_k^0 + i\delta_k$ является корнем дисперсионного уравнения $E_k(\omega) = 0$, обладающим наибольшей мнимой частью. В дальнейшем предполагается, что выполнено условие $\delta_k/\omega_k^0 \ll 1$, без которого излагаемые ниже результаты неприменимы.

В формальном разложении (7) не все нелинейные члены являются действительно малыми (в том смысле, что после перехода к t -представлению они могут стать большими при достаточно больших t). Для получения правильной асимптотики при больших t такие члены должны быть выделены и просуммированы.

Для выявления "больших" членов представим, сначала, в выражении для общего члена (7) вместо точных компонент поля $E_k(\omega)$, удовлетворяющих уравнению (8), их значения в линейном приближении (9), причем пренебрежем мнимыми частями частот δ_k . В лапласовском представлении соответствующие выражения будут иметь вид

$$E_k(\omega) \approx E_k^0 (\omega - \omega_k^0)^{-1}, \quad (12)$$

где E_k^0 - амплитуда колебаний в линейном приближении, определяемая равенством (II). Благодаря простому виду (12), можно легко выполнить интегрирование по всем ω_i в общем члене (7), в результате чего величины ω_i заменяются на $\omega_{k_i}^0$, а $E_{k_s}(\omega_s)$ - на $E_{k_s}^0$. Заметим теперь, что среди различных диаграмм в сумме по k_i на рис. 1 будут диаграммы, в которых рядом стоящие линии отвечают сопряженным компонентам поля ($k_s = -k_{s+1}$, $\omega_{k_s}^0 = -\omega_{k_{s+1}}^0$). Такие линии мы будем называть спаренными. Спаренные линии на диаграммах замыкаются в петли (см. рис. 2, 3). Пропагаторы, стоящие с двух сторон петли оказываются одинаковыми, что приводит к появлению в $F^{(n)}(\omega, \vec{\sigma})$ кратных полюсов по ω . В t -представлении соответствующие члены будут секулярными, т.е. пропорциональными $t^{\lambda-1}$, где $\lambda-1$ - кратность полюса в лапласовском представлении.

Легко видеть, что типичный член, вносящий вклад в функцию распределения (6), после выполнения всех дифференцирований имеет вид (для простоты записи мы не учитываем векторного характера величин $\vec{\sigma}$ и \vec{p})

$$R(\omega, \sigma) = \frac{\psi(\sigma)}{(\omega - a)^{m+1} (\omega - \epsilon_1 - p_1 \sigma)^{n_1} \dots} \quad (I3)$$

где все $p_i \neq 0$, а $\psi(\sigma)$ — пропорциональна производной определенного порядка от начальной функции распределения $f(\sigma)$ или начального возмущения $g_k(\sigma)$. Следуя /I/, мы будем считать эти функции целыми (хотя, вообще говоря, достаточно было бы потребовать аналитичности этих функций в некоторой окрестности действительной оси).

В выражении (I3) мы выделили отдельно полюс кратности $m+1$, не зависящий от σ (величина a будет определена ниже). Нетрудно видеть, что m равно числу петель, лежащих между крайней правой вертикальной линией и правым концом диаграммы (такие петли мы будем называть **с в о б о д н ы м и**). При этом перекрывающиеся и пересекающиеся петли считаются за одну. Так, например, в диаграмме $2n+1$ -го порядка на рис.2а имеется n свободных петель; поэтому $m = n$. В диаграммах, изображенных на рис.2в (перекрывающиеся и пересекающиеся петли) $m = 1$. Что касается величины a , то нетрудно видеть, что последняя равна сумме всех частот, отвечающих вертикальным линиям диаграммы ($a = \sum \omega_k$). Так, для диаграмм на рис.2а,б имеем, соответственно, $a = \omega_k, 0$.

Полюс, не зависящий от σ играет особую роль потому, что в правую часть уравнения для поля (8) входят интегралы вида

$$\int R(\omega, \sigma) d\sigma = (\omega - a)^{-(m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \psi(\sigma) (\omega - \epsilon_1 - p_1 \sigma)^{-n_1} \dots \quad (I4)$$

Поскольку интеграл в правой части (I4) не имеет особенностей в любой конечной области комплексной плоскости ω , то после перехода от (I4) к t -представлению, мы получим выражение типа

$$\int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} d\omega e^{-i\omega t} \int R(\omega, \sigma) d\sigma = \text{const} [t^m + O(t^{m-1})] e^{-ia t} \chi(t), \quad (I5)$$

где $\chi(t)$ — экспоненциально мало по сравнению с первым членом. (Чтобы получить (I5), необходимо сместить интегрирование по ω в нижнюю полуплоскость, обходя при этом полюс при $\omega = a$, так, чтобы он все время находился ниже контура интегрирования. Тогда интеграл сведется к вычету относительно полюса и интегралу по горизонтальной прямой, лежащей ниже точки $\omega = a$. Последний обозна-

*) Действительно, в верхней полуплоскости этот интеграл является аналитической функцией по определению. При продолжении её в нижнюю полуплоскость мы можем, следуя приёму, указанному в /I/, деформировать контур интегрирования таким образом, чтобы полюса оставались всю время выше контура. Таким образом, единственная особенность этого интеграла — существенно — особая точка при $\lim_{\omega \rightarrow -\infty}$

чен в (I5) через $\chi(t)$.

Итак, мы видим, что степень секулярности произвольного члена теории возмущений после интегрирования по σ будет равна числу свободных петель в диаграмме, изображающей этот член (с учетом того, что пересекающиеся или перекрывающиеся петли эквивалентны одной свободной петле). Из всех членов данного порядка необходимо выделить член, обладающий наибольшей степенью секулярности; его мы будем называть **главным**. Очевидно, главный член должен содержать максимально возможное (при данном порядке) число свободных петель, непересекающихся и непёрекрывающихся. Такие члены в правой части уравнения (8) изображаются диаграммами, приведенными на рис.2А. В первом приближении можно ограничиться суммированием главных секулярных членов, как наиболее сильно растущих, а затем уже учитывать остальные члены, обладающие меньшей секулярностью при заданном порядке.

До сих пор предполагалось, что вместо $E_k(\omega)$ в (7) подставляется линейное приближение (I2). Если подставлять точные $E_k(\omega)$ или (I2), но с комплексной частотой $\omega_k = \omega_k^0 + i\gamma_k$, то после перехода к t -представлению секулярные члены не будут появляться. Однако если $|E_k(t)|$ медленно зависит от времени, то члены, содержащие t , будут хотя и не секулярными, но большими при достаточно больших t . Если, например, вместо $E_k(\omega)$ подставлять (I2) с комплексными ω_k , то, как нетрудно убедиться, вместо секулярного множителя t^2 будет стоять $(\omega_k^0 / \gamma_k)^2 \gg 1$, так что соответствующие члены попрежнему следует считать большими. Основное отличие результатов настоящей работы от результатов, полученных в /4/, связано с тем, что в теории возмущений, развиваемой в /4/, указанные большие члены не суммируются.

Заметим, наконец, что ниже, при суммировании диаграмм, мы не будем заменять $E_k(\omega)$ на приближенные выражения (I2). Последнее нам было необходимо только для выявления "больших" членов.

4. Приступим теперь к суммированию главных секулярных членов, имеющих в правой части уравнения (8). Как уже указывалось, эти члены изображаются диаграммами на рис.2а. Обозначим их сумму через $\phi_k(\omega, \sigma)$. Легко убедиться, что эта величина очень просто выражается

через функцию $\Phi(\omega, \sigma)$, являющуюся суммой диаграмм, приведенных на рис.26, а именно:

$$\Phi_k(\omega, \sigma) = \frac{e}{im} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\vec{E}_k(\omega')}{\omega - \vec{k}\sigma} \cdot \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', \sigma)}{\partial \vec{\sigma}} \quad (16)$$

Величина $\Phi(\omega, \sigma)$ является пространственно однородной частью функции распределения, в приближении, учитывающем лишь главные члены. (Её можно называть функцией распределения "фона"). Из вида диаграмм на рис.26 следует, что $\Phi(\omega, \sigma)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению Дайсона в квантовой теории поля

$$-i\omega \Phi(\omega, \sigma) = f(\sigma) + \frac{i}{(2\pi)^2} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \sum_q \int \vec{E}_q(\omega') \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{\vec{E}_q(\omega'')}{\omega - \vec{q}\sigma - \omega''} \cdot \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', \omega'', \sigma)}{\partial \vec{\sigma}} \quad (17)$$

Из (8) и (16) нетрудно получить уравнение для поля в рассматриваемом приближении

$$\int \frac{d\omega'}{2\pi} \varepsilon_k(\omega, \omega') \vec{E}_k(\omega') = 4\pi e N \frac{\vec{E}_k}{k^2} \int \frac{g_k(\vec{\sigma})}{\omega - \vec{k}\sigma} d\vec{\sigma} \quad (18)$$

где

$$\varepsilon_k(\omega, \omega') = \frac{i}{\omega - \omega'} + \frac{\omega^2}{k^2} \int \frac{d\vec{\sigma}}{\omega - \vec{k}\sigma} \vec{k} \cdot \frac{\partial \Phi(\omega - \omega', \sigma)}{\partial \vec{\sigma}} \quad (19)$$

Если заменить здесь функцию $\Phi(\omega, \sigma)$ её нулевым приближением (первое слагаемое на рис.26), то есть положить $\Phi(\omega, \sigma) = f(\sigma)/\omega$, то (18) переходит в обычное линейное уравнение для поля (9).

(17)-(19) представляют собой полную систему уравнений для функции распределения и поля в приближении, учитывающем главные секулярные члены. Эта система подробно исследуется в /5/, где показано, что в случае, когда спектр колебаний достаточно широк, (17)-(19) переходят в известные уравнения квазилинейной теории, полученные в /2,3/.

5. Рассмотрим, наконец, диаграммы, характеризующиеся меньшей степенью секулярности, по сравнению с рассмотренными. Такие диаграммы при $k \neq 0$ могут содержать уже более одной вертикальной линии, а также петли, расположенные левее этих линий, или между ними. Такие петли не дадут секулярных множителей после интегрирования по $\vec{\sigma}$; поэтому петля, расположенная левее хотя бы одной вертикальной линии, даёт такой же вклад, как и две неспаренные линии, стоящие на её месте, так что диаграммы с такими петлями не имеет смысла выделять отдельно. Таким образом, мы можем рассматривать диаграммы, со-

стоящие только из вертикальных линий и свободных петель.

Рассмотрим, например, диаграммы, состоящие из двух вертикальных линий и произвольного числа свободных петель (рис.3). Обозначая их сумму через $\Phi_k^{(2)}(\omega, \sigma)$, получим

$$\Phi_k^{(2)}(\omega, \sigma) = \left(\frac{e}{im} \right)^2 \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \int \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(2\pi)^2} \frac{\vec{E}_{\vec{k}_1}(\omega_1)}{\omega - \vec{k}_1\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\sigma}} \frac{\vec{E}_{\vec{k}_2}(\omega_2)}{\omega - \omega_1 - (\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\sigma} \cdot \frac{\partial \Phi(\omega - \omega_1, \omega_2, \sigma)}{\partial \vec{\sigma}} \quad (20)$$

где $\Phi(\omega, \sigma)$ - является суммой диаграмм без вертикальных линий. В первом приближении, рассмотренном в п.4, $\Phi(\omega, \sigma)$ удовлетворяет уравнению (17); в следующем приближении необходимо написать уравнение Дайсона, учитывающее перекрывающиеся и пересекающиеся диаграммы. За недостатком места мы не будем здесь приводить соответствующее уравнение; укажем лишь, что оно отличается от уравнения (17) наличием дополнительных членов (четвертого порядка по σ) соответствующих диаграммам, изображенным на рис.2в^x).

Совершенно аналогичные результаты получаются при суммировании диаграмм с большим числом вертикальных линий.

Из всего изложенного вытекает, что уравнение для поля колебаний (8) можно преобразовать к виду

$$\int \varepsilon_k(\omega, \omega') \vec{E}_k(\omega') \frac{d\omega'}{2\pi} = \frac{4\pi e N}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \int \Phi_k^{(n)}(\omega, \vec{\sigma}) d\vec{\sigma} + (4\pi e N/k) \sum_{n=1}^{\infty} \int G_k^{(n)}(\omega, \vec{\sigma}) d\vec{\sigma} \quad (21)$$

где $\varepsilon_k(\omega, \omega')$ - ядро оператора диэлектрической проницаемости, определенное формулой (19), $\Phi_k^{(n)}$ - "перенормированная" функция распределения n -го порядка, определяемая аналогично $\Phi_k^{(2)}(\omega, \sigma)$, а $\sum_{n=1}^{\infty} G_k^{(n)}(\omega, \sigma)$ - сумма всех диаграмм, содержащих пунктирную линию на конце, т.е. явно зависящих от начального возмущения.

Левая часть (21), как уже отмечалось выше, описывает резонансное взаимодействие волн с частицами, т.е. учитывает эффекты, рассматриваемые в квазилинейной теории. Члены, содержащие $\Phi_k^{(n)}$, отвечают взаимодействию волн между собой в соответствующем порядке. С помощью этих членов можно определить нелинейные отклики, опреде-

x) Эти члены имеют очень простой смысл: они описывают влияние эффектов взаимодействия волн на функцию распределения фона.

ляющие кинетические уравнения для волн (подробнее об этом см. /6,7/).

6. Рассмотрим теперь коротко члены $G_k^{(n)}(\omega, \nu)$. Из общего выражения для $G_k^{(n)}$ следует, что эта величина зависит от времени как $t^{\nu} e^{-i k \nu t}$ (ν - некоторое целое число). При интегрировании по ν осциллирующий множитель обеспечивает достаточно быстрое стремление к нулю интеграла $\int G_k^{(n)}(t, \nu) d\nu$. Однако возникает вопрос, не могут ли секулярные множители в сумме по n привести к столь быстро растущей функции, которая привела бы к росту всей суммы интегралов. Можно показать, что это невозможно, т.е. второе слагаемое в правой части (21) достаточно быстро стремится к нулю с ростом t . Мы не будем здесь развивать строгое доказательство этого факта, а ограничимся простыми соображениями, показывающими суть дела.

Если ограничиться вкладом в $G_k(t, \nu) = \sum_n G_k^{(n)}$ только главных секулярных членов, которые, как нетрудно убедиться изображаются диаграммами на рис.4, то для $G_k(\omega, \nu)$ получается уравнение

$$-i(\omega - k\nu) G_k(\omega, \nu) = g_k(\nu) + i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_q \int \frac{d\omega' d\omega''}{(2\pi)^2} \frac{E_q(\omega') E_q(\omega'')}{\omega - \omega' - (q+k)\nu} \frac{\partial G_k(\omega - \omega' - \omega'', \nu)}{\partial \nu} \quad (22)$$

(волновой пакет для простоты, подразумевается одномерным). Полагая, что амплитуда поля достаточно медленно изменяется во времени, мы можем считать, что величины $E_q(\omega)$ имеют острый максимум при $\omega \sim \omega_q$, так что уравнение (22) принимает вид

$$-i(\omega - k\nu) G_k(\omega, \nu) = g_k(\nu) + i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_q \frac{|E_q^0|^2}{\omega - (q+k)\nu + \omega_q} \frac{\partial G_k(\omega, \nu)}{\partial \nu} \quad (23)$$

Если пренебречь вторым членом в правой части (23), то получится решение, отвечающее первому приближению: $G_k(t, \nu) = g_k(\nu) \exp(-i k \nu t)$.

Будем искать решение уравнения (23) в виде $G_k(t, \nu) = g_k(t, \nu) \exp(-i k \nu t)$, где $g_k(t, \nu)$ - медленно меняющаяся функция t . В лапласовском представлении это означает, что функция $G_k(\omega, \nu) \equiv g_k(\omega - k\nu, \nu)$ существенно отличается от нуля лишь при $\omega \sim k\nu$. При этих значениях ω , уравнение (23) приближенно можно записать в виде

$$-i(\omega - k\nu) G_k(\omega, \nu) = g_k(\nu) + i \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_q \frac{|E_q^0|^2}{\omega_q - q\nu + i0} \frac{\partial G_k(\omega, \nu)}{\partial \nu} \quad (23a)$$

Переводя теперь (23a) в t -представление, получаем асимптотическое уравнение, справедливое при достаточно больших t :

$$\frac{\partial G_k(t, \nu)}{\partial t} + i k \nu G_k(t, \nu) = \frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{D}(\nu) \frac{\partial G_k(t, \nu)}{\partial \nu}, \quad (24)$$

$$\mathcal{D}(\nu) = \pi \sum_q |E_q^0|^2 \delta(\omega_q - q\nu) \sim \frac{\kappa}{\omega_q} \left(\frac{e}{m}\right)^2 |E|^2 (\Delta k)^{-1}, \quad (25)$$

где $|E|^2$ - средний квадрат напряженности поля колебаний, а κ и Δk - среднее волновое число и ширина волнового пакета. Уравнение (24) отличается от основного уравнения квазилинейной теории только вторым членом в левой части. При этом $\mathcal{D}(\nu)$ - точно совпадает с коэффициентом квазилинейной диффузии в пространстве скоростей. Предполагая, что волновой пакет является достаточно узким, мы можем пренебречь изменением $\mathcal{D}(\nu)$ внутри резонансной области скоростей, где $\nu = \omega_q / q$. Тогда решение уравнения (24) в этой области примет вид

$$G_k(t, \nu) \approx g_k(\nu) e^{-i k \nu t} \exp(-\kappa^2 \mathcal{D} t^2 / 3). \quad (26)$$

Таким образом функция $G_k(t, \nu)$ в резонансной области скоростей затухает за время

$$\tau \sim (\kappa^2 \mathcal{D})^{-1/3} \sim \left[\frac{\kappa^3}{\Delta k \omega_q} \left(\frac{e}{m}\right)^2 |E|^2 \right]^{-1/3} \quad (27)$$

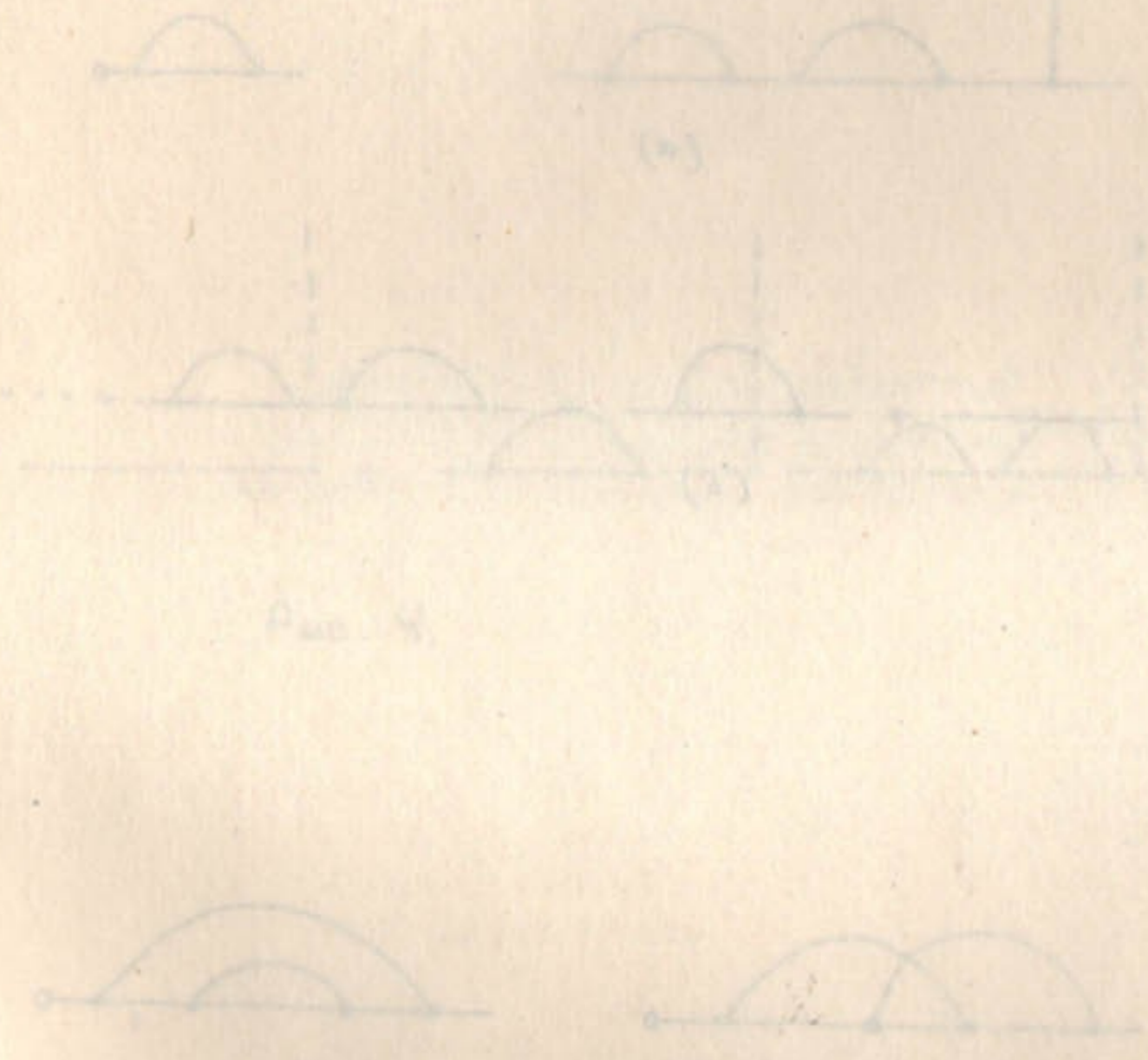
Физический смысл этого затухания нетрудно понять, если заметить, что время диффузионного размытия "неоднородностей" в пространстве скоростей есть $\tau \sim (\delta \nu)^2 / \mathcal{D}$, где $\delta \nu$ - протяженность неоднородности. Поскольку $G_k(t, \nu)$ осциллирует как $\exp(-i k \nu t)$, то нужно положить $\delta \nu \sim (k \tau)^{-1}$. Из этих двух соотношений для τ получается в точности выражение (27).

Вне резонансной области $\mathcal{D}(\nu)$ исчезает и уравнение (24) приводит к решению первого приближения $g_k(\nu) \exp(-i k \nu t)$. Однако, в этом случае необходимо получить более точное уравнение для $G_k(t, \nu)$, которое приводит к другой зависимости от t .

Последнее имеет весьма сложный вид и получить его решение затруднительно. Однако, даже не зная этого решения, можно заключить, что вне резонансной области функция $G_k(t, \nu)$ возрастать не может, поскольку в этом случае возникали бы аномально большие градиенты на границе резонансной и нерезонансной областей. Поскольку, кроме этого $G_k(t, \nu)$ содержит осциллирующий множитель $\exp(-i k \nu t)$, то $\int G_k(t, \nu) d\nu$ затухает с ростом t . Характерное время этого затухания не меньше, чем $\tau_g \sim (k \nu_g)^{-1}$, где τ_g - время затухания интеграла $\int g_k(\nu) \exp(-i k \nu t) d\nu$, а ν_g - "ширина" функции $g_k(\nu)$, поскольку "ширина" $G_k(t, \nu)$ не меньше, чем ν_g .

Л и т е р а т у р а

1. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
2. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82, 1961.
3. W. Drummond, R. Pines. Nucl. Fusion Suppl. 1049, 1962. Part 3.
4. Д.Монтгомери (D. Montgomery). Phys. Fl. 6, 1109, 1963.
5. Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 49, 515, 1965.
6. Л.М.Альтшуль, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 47, 1552, 1964.
7. А.А.Галсез, В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 5, 20, 1965.



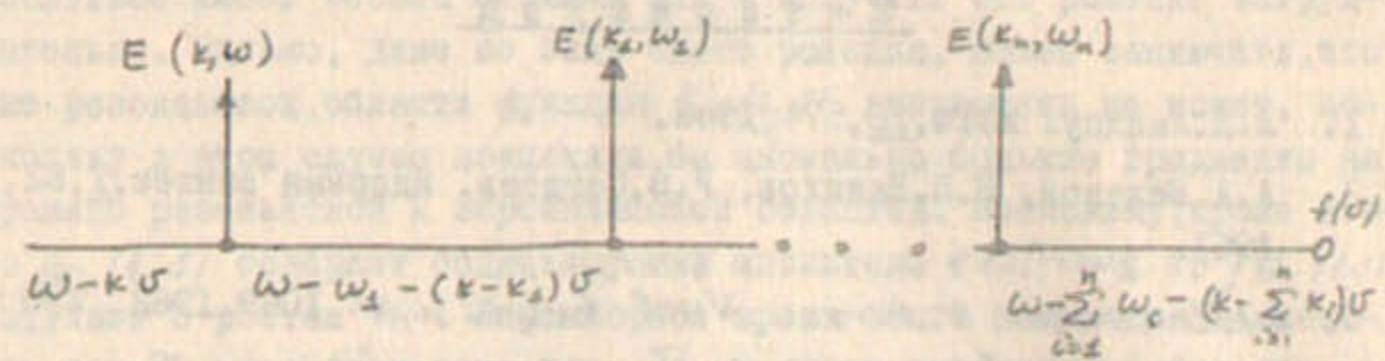


Рис. 1

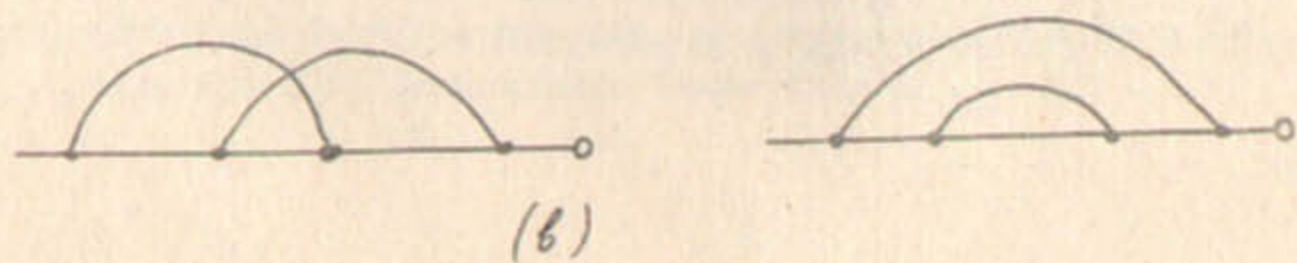
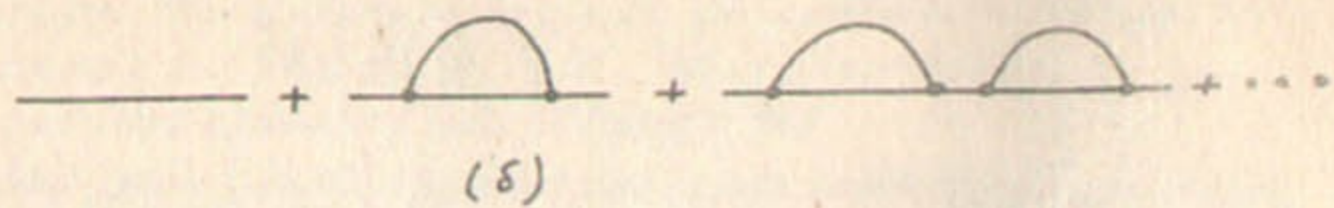
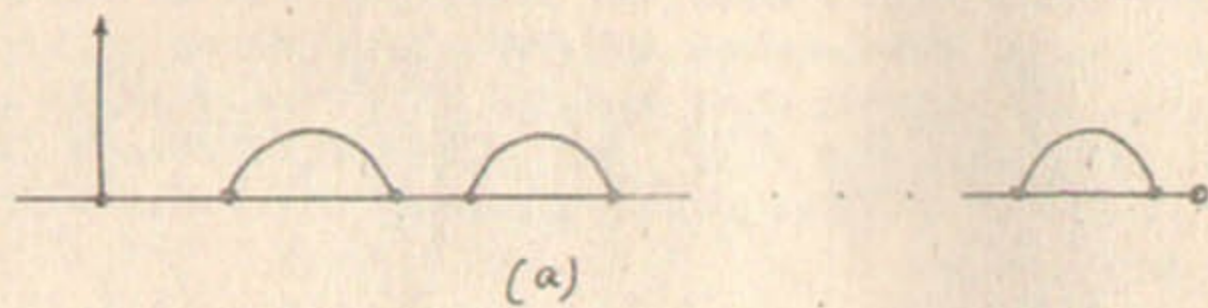


Рис. 2

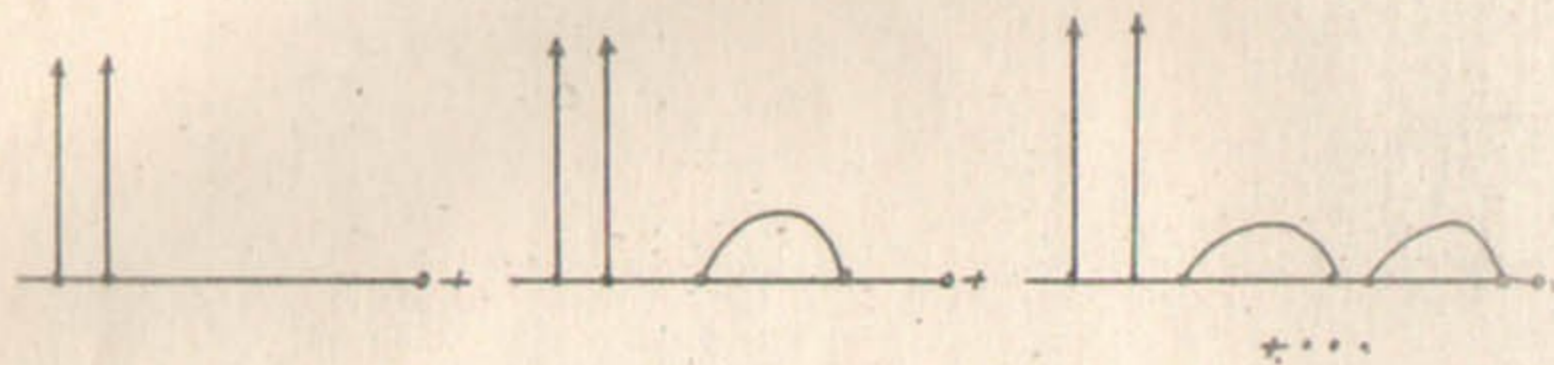


Рис. 3

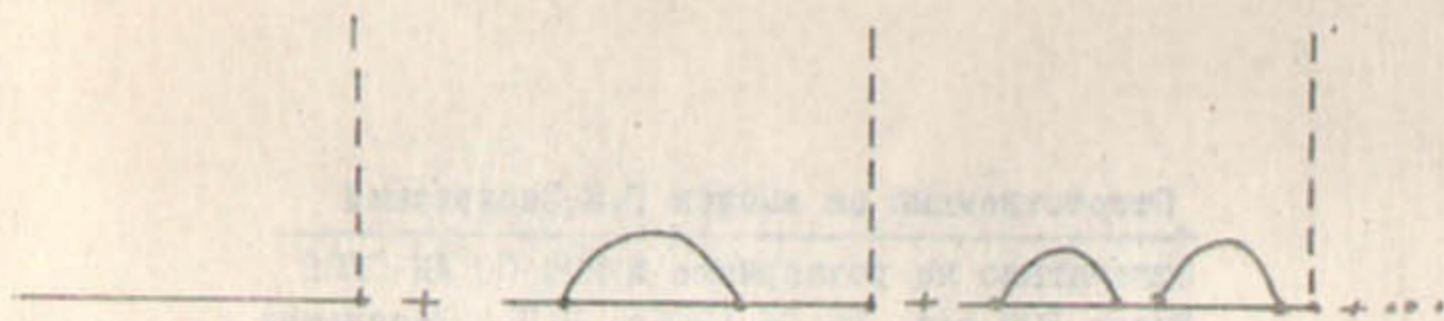


Рис. 4