

629

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 7

А.В.Баутин, В.М.Галицкий

**Рождение фотонов и позитронов при
прохождении быстрых электронов через
толстые фольги**



НОВОСИБИРСК 1966

v 4

А Н Н О Т А Ц И Я

Получено выражение для среднеквадратичного углового отклонения быстрых электронов при прохождении слоя вещества (толстой фольги) с учетом тормозных потерь. На основании кинетических уравнений двумерной каскадной теории ливней найдены первые два момента функций распределения по угловой переменной для фотонов и позитронов на глубинах вплоть до одной радиационной единицы. Отношение полученных выражений для моментов функций распределения определяет средний квадрат угла отклонения частиц вследствие многократного рассеяния. Рассмотрен предельный переход к случаю тонких фольг. Результаты находятся в хорошем согласии с численным расчетом.

I. Теоретическому рассмотрению прохождения частиц через вещество посвящено большое количество работ. Тем не менее остается ряд вопросов, требующих исследования. В частности, теория многократного рассеяния Ферми, изложенная в обзоре /1/, нерелятивистская теория Мольера /2/, теория Снайдера и Скотта /3/ дают выражение для среднего квадрата угла отклонения частиц при прохождении через тонкую фольгу без учета тормозных потерь. Это является совершенно справедливым для тонких фольг, толщина которых, с одной стороны, достаточно велика, чтобы электроны испытали в ней много столкновений, с другой стороны, достаточно мала, чтобы потерями энергии в фольге можно было пренебречь. В случае толстых фольг надо учитывать потери энергии за счет излучения тормозных квантов, которые в поле ядер рассеивателя могут породить электрон-позитронные пары; это в итоге приведет к образованию ливня. В этом аспекте задача о прохождении быстрых электронов через вещество по существу происходящих явлений есть задача каскадной теории ливней. Проходя слой вещества, быстрые заряженные частицы рассеиваются в кулоновском поле ядер, что приводит к определенному угловому и пространственному распределению ливневых частиц. Л.Д.Ландау впервые написал кинетические уравнения ливневых электронов и фотонов по углам и в пространстве в случае малых углов отклонения (приближение Ландау) и дал метод вычисления среднего квадрата угла отклонения ливневых частиц /4/. Исследование углового распределения частиц в ливне было продолжено С.З.Беленьким /5/, В.В.Гужавиным и И.П.Иваненко /6/ и другими. Работы /4/, /5/, /6/ опираются на метод интегральных преобразований Лапласа-Меллина, впервые примененный в /7/.

Результаты, полученные этими авторами, справедливы только в максимуме ливня /4/ или вообще на больших глубинах /5/, /6/. Это связано с тем, что на достаточно больших глубинах при $t > 1$ (где t - глубина в радиационных единицах) можно пренебречь одним из линейно-независимых решений уравнений каскадной теории, экспоненциально убывающим с глубиной. Если толщина пластинки не больше, чем одна радиационная единица, откидываемое решение дает вклад того же порядка, что и обычно оставляемое решение в случае больших глубин и поэтому им нельзя пренебречь. Именно этот факт приводит к значительному увеличению математических трудностей, которые, однако, оказалось возможным преодолеть, используя приближение по числу частиц (приближение первого поколения). Отметим, что в случае толстых фольг ($t \leq 1$), существенно необходим учет тормозных потерь, так как именно на одной радиационной единице энергия электрона убывает в среднем в 2,7 раз за счет излучения тормозных фотонов. Строгое теоретическое рассмотрение прохождения электронов через толстые фольги с учетом тормозных потерь и многократного рассеяния весьма сложно. Приближенное рассмотрение дано в работах /8/, /9/. Эти авторы строго учитывают начальные потери электрона и конечную диффузию, но пользуются некоторой интерполяцией для промежуточной области. Вильсон /10/ разработал более общую теорию, основанную на аналогичных идеях, но с учетом также потерь на излучения. В этой работе сначала пренебрегается многократным рассеянием, которое затем включается вблизи конца пробега электрона, когда его энергия становится близкой к критической энергии. При этом параметры подбираются так, чтобы получить совпадение с численными расчетами по методу Монте-Карло.

В настоящей работе рассмотрена задача об угловом откло-

в настоящей работе рассмотрена задача об угловом отклонении электронов при прохождении через толстые фольги с одновременным учетом многократного рассеяния и тормозных потерь и дано решение, точность которого определяется числом оставленных членов разложения по логарифму отношения начальной энергии E_0 к энергии E частицы на некоторой глубине. Рассмотрен вопрос об угловом отклонении ливневых частиц и в приближении первого поколения получены аналитические выражения для среднеквадратичного углового отклонения на глубинах $t \leq 1$.

2. Будем исходить из кинетических уравнений каскадной теории ливней, считая углы отклонения малыми и рассматривая рассеяние заряженных частиц как многократное (приближение Ландау /4/)

$$\frac{\partial P(t, E, \theta)}{\partial t} = L_1[P, \Gamma] + \frac{E_K^2}{4E^2} \Delta_\theta P(t, E, \theta), \quad (I)$$

$$\frac{\partial \Gamma(t, E, \theta)}{\partial t} = L_2[P, \Gamma].$$

Начальные условия $P(0, E, \theta) = \delta(E - E_0)\delta(\theta)$, $\Gamma(0, E, \theta) = 0$ соответствуют одному электрону, падающему нормально на границу слоя вещества.

Здесь $P(t, E, \theta)$ - дифференциальная функция распределения электронов и позитронов по энергии E , глубине t , измеряемой в радиационных единицах, и углу отклонения от оси ливня θ (θ - двумерный угол, $\Delta_\theta = \theta^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$), $\Gamma(t, E, \theta)$ - аналогичная функция для фотонов, L_1, L_2 - интегральные операторы, учитывающие радиационное торможение и образование пар, $E_K = 2I$ Мэв.

При записи системы (1) не учитываются все другие процессы, происходящие с электронами и фотонами в веществе, не существенные при высоких энергиях.

В отличие от обычного, для дальнейшего нам удобно ввести отдельные функции распределения для электронов и позитронов $f^{(e)}(t, E, \theta)$ и $f^{(p)}(t, E, \theta)$ вместо суммарной функции $P(t, E, \theta)$ в (1), а функцию распределения квантов обозначим через

$f^{(k)}(t, E, \theta)$. Тогда уравнения каскадной теории принимают следующий вид:

$$\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t} = - \int_0^E f^{(e)}(t, E', \theta) W_e(E, E') dE' + \int_E^{E_0} f^{(p)}(t, E', \theta) W_e(E', E-E') dE' + \int_E^{E_0} P(t, E', \theta) W_p(E', E) dE' + \frac{E_0^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(e)}(t, E, \theta), \quad (2a)$$

$$\frac{\partial f^{(p)}}{\partial t} = \int_0^E \{ f^{(e)}(t, E', \theta) + f^{(p)}(t, E', \theta) \} W_e(E', E) dE' - \int_0^E f^{(p)}(t, E', \theta) W_p(E', E) dE', \quad (2b)$$

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = - \int_0^E f^{(k)}(t, E', \theta) W_e(E, E') dE' + \int_E^{E_0} f^{(p)}(t, E', \theta) W_e(E', E-E') dE' + \int_E^{E_0} P(t, E', \theta) W_p(E', E) dE' + \frac{E_0^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(k)}(t, E, \theta), \quad (2c)$$

с начальными условиями:

$$f^{(e)}(0, E, \theta) = \delta(E - E_0) \delta(\theta), \quad f^{(p)}(0, E, \theta) = f^{(k)}(0, E, \theta) = 0$$

Здесь $W_e(E, E') dE'$ - вероятность испускания на одной радиационной единице электроном или позитроном энергии E тормозного кванта с энергией в интервале $(E', E' + dE')$, $W_p(E', E) dE'$ - вероятность рождения фотоном энергии E' пары с энергиями позитрона E и электрона энергии $E' - E$ также на единице длины.

Работая с уравнениями в форме (2) оказывается возможным на глубинах вплоть до одной радиационной единицы развить приближение по числу частиц, которое позволит решить задачу на-

хождения моментов функций распределения для электронов, фотонов и позитронов.

3. Суть этого приближения состоит в том, что на глубинах $t \ll 1$ можно пренебречь третьим членом в (2a) и первым членом в (2b). Физически это соответствует тому, что учитывается только первое поколение электронов, т.е. только начальные электроны, и учитываются только те кванты, которые были излучены электронами первого поколения. В связи с этим данное приближение можно назвать приближением первого поколения. Подчеркнем, что дальнейшее рассмотрение будет проведено специально для случая весьма энергичных частиц второго поколения с энергией E порядка начальной энергии E_0 первичной частицы, т.е. $E \approx 0,6 E_0$. Из общих соображений в силу малости сечений каскадных процессов ясно, что вторичных частиц таких энергий в расчете на одну первичную будет приходиться весьма мало, что и является аргументом в пользу сделанных выше приближений. Эти соображения подтверждаются расчетом коэффициента конверсии начальных электронов через кванты в позитроны, который согласно [11] по порядку равен 10^{-2} для позитронов с энергией $E \approx 0,6 E_0$ (E_0 - начальная энергия первичной частицы) в довольно широком интервале глубин $0 \leq t \leq 1,5$.

Таким образом, в приближении первого поколения уравнения (2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t} = - \int_0^E f^{(e)}(t, E', \theta) W_e(E, E') dE' + \int_E^{E_0} f^{(p)}(t, E', \theta) W_e(E', E-E') dE' + \frac{E_0^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(e)}(t, E, \theta), \quad (3a)$$

$$\frac{\partial f^{(p)}}{\partial t} = \int_0^E \{ f^{(e)}(t, E', \theta) + f^{(p)}(t, E', \theta) \} W_e(E', E) dE' - \int_0^E f^{(p)}(t, E', \theta) W_p(E', E) dE', \quad (3b)$$

$$\frac{\partial f^{(k)}}{\partial t} = \int_0^E f^{(p)}(t, E', \theta) W_p(E', E) dE' + \frac{E_0^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(k)}(t, E, \theta). \quad (3c)$$

(3с)

В уравнении (3с) мы пренебрегли "straggling'au" позитронов. Оценки показывают, что согласно результатам /II/, пренебрежение "straggling'au" для позитронов приводит для полного числа позитронов в интервале $(0, 5E_0, E_0)$ к ошибке не большей, чем 20%.

Из (3) видно, что прежде замкнутая система уравнений (2) в приближении первого поколения расщепляется. Это позволит получить аналитические выражения для среднего квадрата углов отклонения электронов $\overline{\Theta_{(e)}^2}(t, E)$, квантов $\overline{\Theta_{(p)}^2}(t, E)$ и позитронов $\overline{\Theta_{(p)}^2}(t, E)$:

$$\overline{\Theta_{(e)}^2} = \frac{\int f_{(e)}^{(1)}(t, E, \theta) \theta^2 d\Omega}{\int f_{(e)}^{(1)} d\Omega} \equiv \frac{P_1^{(e)}}{P_0^{(e)}}; \quad \overline{\Theta_{(p)}^2} = \frac{\int f_{(p)}^{(1)}(t, E, \theta) \theta^2 d\Omega}{\int f_{(p)}^{(1)} d\Omega}; \quad (4)$$

$$\overline{\Theta_{(p)}^2} = \frac{\int f_{(p)}^{(0)}(t, E, \theta) \theta^2 d\Omega}{\int f_{(p)}^{(0)}(t, E, \theta) d\Omega} \equiv \frac{P_1^{(p)}}{P_0^{(p)}};$$

где $d\Omega$ - элемент телесного угла.

4. Найдем функцию $\overline{\Theta_{(e)}^2} = \frac{P_1^{(e)}}{P_0^{(e)}}$, дающую среднеквадратичное угловое отклонение начальных электронов. Для этого умножим уравнение (3а) с обеих сторон на Θ^2 и проинтегрируем его по всем телесным углам. В результате получим:

$$\frac{\partial P_1^{(e)}(t, E)}{\partial t} = L[P_1^{(e)}] + \frac{E_k^2}{E_0^2} P_0^{(e)}(t, E). \quad (5)$$

8

Здесь $P_0^{(e)}$ и $P_1^{(e)}$ моменты функций распределения электронов по угловой переменной (4), L - интегральный оператор, отвечающий "straggling'y". Интегрируя (3а) по всем углам, находим, что функция $P_0^{(e)}(t, E)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial P_0^{(e)}(t, E)}{\partial t} = L[P_0^{(e)}] \quad (6)$$

с граничным условием

$$P_0^{(e)}(0, E) = \delta(E - E_0)$$

Применение к (6) преобразования Лапласа-Меллина дает для известного выражения "straggling'a" Бете-Гайтлера /I2/:

$$P_0^{(e)} = \frac{1}{E_0} \frac{u^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}, \quad (7)$$

где $\tau = \frac{t}{\ln 2}$, $\Gamma(\tau)$ - гамма-функция, $u = \ln \frac{E_0}{E}$.

При выводе формулы (7) в работе /I2/ сечение тормозного излучения взято в приближенной математической форме, соответствующей полному экранированию:

$$\varphi(\nu) d\nu = - \frac{d\nu}{\ln 2 \cdot \ln(1-\nu)}, \quad (8)$$

где $\nu = \frac{\omega}{E_0}$, ω - энергия фотона.

Рассматривая второй член в (5) как неоднородность, запишем решение уравнения (5) с помощью функции Грина:

$$P_1^{(e)}(t, E) = E_k^2 \ln 2 \int_0^t \int_{E_0}^E \frac{dE'}{(E')^2} d\tau G(\tau, \tau' | E, E') P_0^{(e)}(\tau', E')$$

Нетрудно видеть, что функция $P_0^{(e)}$ и есть функция Грина оператора $\frac{\partial}{\partial t} - L$;

9

Тогда

$$P_i^{(1)}(\tau, E) = \ln 2 \cdot \frac{E_K^2}{E_0} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \frac{dE'}{E'^2} \alpha' \frac{(\ln \frac{E'}{E})^{\tau-1}}{\Gamma(\tau-1)} \frac{(\ln \frac{E_0}{E'})^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} \quad (9)$$

Интегрирование по E' в предыдущем выражении дает (см. приложение I):

$$P_i^{(1)}(\tau, u) = \frac{E_K^2}{E_0^2} \frac{\ln 2}{E_0} \frac{e^{-2u}}{\Gamma(u)} \int_0^{\tau} \alpha' F_1(\tau', \tau, 2u) \quad (9a)$$

Здесь $F_1(\tau', \tau, 2u)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Для гипергеометрической функции $F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ используем представление в виде степенного ряда [13]:

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

При $E > 0,6 E_0$ ($u \leq 0,5$) можно ограничиться выписанными членами. Выполняя интегрирование в (9), имеем:

$$P_i^{(1)} = \frac{E_K^2}{E_0^2} \ln 2 \frac{u^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)} \tau \left(1 + u + \frac{2\tau+3}{3(\tau+1)} u^2 + \frac{u^3}{3} \frac{\tau+2}{\tau+1} \right) \quad (11)$$

С помощью (7) и (11) для среднего квадрата угла отклонения электронов $\overline{\Theta_{e_i}^2}$, получаем окончательное выражение:

$$\overline{\Theta_{e_i}^2}(\tau, E) = \frac{E_K^2}{E_0^2} \ln 2 \cdot \tau \left(1 + u + \frac{2\tau+3}{3(\tau+1)} u^2 + \frac{u^3}{3} \frac{\tau+2}{\tau+1} \right) \quad (12)$$

Выражение (12) справедливо при $0 \leq \tau \leq 1,4$ и $E > 0,6 E_0$. Случай $E < 0,6 E_0$ легко получить аналогичным образом, надо только оставить больше членов в разложении (10).

Формула (12) дает средний квадрат угла отклонения электронов, падающих нормально на пластинку вещества.

Имеющиеся до сих пор формулы не учитывали влияния тормозного излучения на среднеквадратичное угловое отклонение. Из (12) следует, что средний квадрат угла отклонения $\overline{\Theta_{e_i}^2}$ зависит только от относительных потерь E/E_0 .

Обсуждение случая малых глубин $t \ll 1$ и почти непрерывных тормозных потерь будет дано ниже.

Формула (12) для различных значений параметра E/E_0 представлена графически на рис. I, причем по оси абсцисс отложена величина $\overline{\Theta_{e_i}^2} \equiv \sqrt{\frac{P_i^{(1)}}{P_0^{(1)}}} \cdot 57,3^\circ$, $E_0 = 200 \text{ нэВ}$.

5. Определим средний квадрат угла отклонения фотонов $\overline{\Theta_{\gamma}^2} = \frac{P_{\gamma}^{(1)}}{P_0^{(1)}}$, испущенных электронами первого поколения. Отклонение фотонов, происходящее при радиационном торможении, сравнительно невелико в случае высоких энергий и им можно пренебречь. Но электроны излучающие кванты, испытывают многократное рассеяние, вследствие чего кванты имеют некоторое угловое распределение.

Интегрируя (3a) по всем телесным углам, получаем уравнение для :

$$\frac{\partial P_0^{(1)}}{\partial t} = \int_0^{E_0} P_0^{(1)}(t, E') W_c(E, E') dE' - \int_0^E P_0^{(1)}(t, E) W_p(E, E') dE' \quad (13)$$

с граничным условием

$$P_0^{(1)}(0, E) = 0.$$

Для вероятности излучения электроном энергии E' тормозного кванта энергии E на одной радиационной единице возьмем упрощенное математическое выражение, которое при полной экранировке в релятивистском пределе имеет следующий вид (/I/, /5/):

$$W_E(E', E) dE' = \frac{dE'}{E} \quad (14)$$

Для вероятности рождения фотоном энергии E пары с энергиями позитрона E' и электрона $E-E'$ на единице длины также возьмем упрощенное релятивистское выражение, соответствующее полной экранировке:

$$W_p(E, E') dE' = \sigma_0 \frac{dE'}{E} \quad (15)$$

где $\sigma_0 = 0,773$.

Интегрируя в (13) с учетом (14) и (15), получаем:

$$\frac{\partial P_0^{(n)}}{\partial \tau} = -\ln 2 \cdot \sigma_0 \cdot P_0^{(n)}(\tau, E) + \frac{\ln 2}{E} \frac{\gamma(\tau, u)}{\Gamma(\tau)}, \quad (16)$$

при условии

$$P_0^{(n)}(0, E) = 0.$$

Здесь $\Gamma(\tau)$ - гамма-функция, $\gamma(\tau, u)$ - неполная гамма-функция.

Решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям $P_0^{(n)}(0, E) = 0$, можно представить в виде:

$$P_0^{(n)}(\tau, E) = \frac{\ln 2}{E} e^{-\alpha \tau} \int_0^\tau \frac{e^{-\alpha \tau'}}{\Gamma(\tau')} \gamma(\tau', u) d\tau'. \quad (17)$$

Для вычисления интеграла (17) используем представление неполной гамма-функции в виде ряда /13/:

$$\gamma(\tau, u) = \Gamma(\tau) e^{-u} u^{\tau-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{\Gamma(\tau+n)} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!}, \quad (18)$$

а функции Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(z)$ представим в виде ряда по четным степеням аргумента /13/:

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

или

$$I_{n\tau}(2\sqrt{u}) = u^{\frac{n\tau}{2}} \left[\frac{1}{\Gamma(n\tau+1)} + \frac{u}{\Gamma(n\tau+2)} + \frac{u^2}{2! \Gamma(n\tau+3)} + \frac{u^3}{6! \Gamma(n\tau+4)} + \dots \right] \quad (19)$$

Поскольку ряд (19) даже при $n=0$ и $\tau=0$ достаточно быстро сходится ($0 \leq u \leq 0,5$), можно для дальнейшего взять лишь первые выписанные члены. Подставляем (19) в (18):

$$\gamma(\tau, u) \approx \Gamma(\tau) e^{-u} u^\tau \sum_{n=0}^{\infty} u^n \left[\frac{1}{\Gamma(n\tau+1)} + \frac{u}{\Gamma(n\tau+2)} + \frac{u^2}{2! \Gamma(n\tau+3)} + \frac{u^3}{6! \Gamma(n\tau+4)} \right] \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!}. \quad (20)$$

Из-за наличия в (15) фактора $\sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!}$ в сумме по n второе слагаемое при $n=1$ обращается в нуль, поэтому с хорошей точностью

$$\gamma(\tau, u) = \Gamma(\tau) e^{-u} u^\tau \left[\frac{1}{\Gamma(\tau+1)} + \frac{u}{\Gamma(\tau+2)} + \frac{u^2}{\Gamma(\tau+3)} + \frac{2}{3} \frac{u^3}{\Gamma(\tau+4)} \right] \quad (21)$$

Используя известное соотношение $\Gamma(\tau+n) = (\tau+n-1)! \Gamma(\tau)$ в (21) выносим множитель $\frac{1}{\Gamma(\tau)}$, который на отрезке $0 \leq \tau \leq 1,4$ можно с хорошей точностью аппроксимировать параболой:

$$\frac{1}{\Gamma(\tau)} = \frac{1}{2} (1+\tau)(2-\tau).$$

После этого интегрирование в (17) совершается просто.

Окончательно:

$$P_0^{(a)}(\tau, E) = \frac{\ln 2}{2E_0} e^{-a\tau} \left\{ (2u - u^2) \frac{e^{-\beta\tau} - 1}{\beta} + (1-u) \left(\frac{\tau e^{-\beta\tau}}{\beta} - \frac{e^{-\beta\tau} - 1}{\beta^2} \right) - \tau^2 \frac{e^{-\beta\tau}}{\beta} + \frac{2(1-e^{-\beta\tau})}{\beta^3} + \frac{2\tau e^{-\beta\tau}}{\beta^2} + 4e^{-2a} \left(1 + \frac{2}{3}u \right) \left[E_i((2+\tau)\beta) - E_i(2\beta) \right] - \frac{10}{3} e^{-3a} \left[E_i((3+\tau)\beta) - E_i(3\beta) \right] \right\}; \quad (22)$$

Здесь $E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$, $x < 0$, $\beta = \ln u$. $P_0^{(a)}$ дает полное число квантов, которые были излучены электронами первого поколения.

Для определения среднего квадрата угла отклонения гамма-квантов $\overline{\theta^2} = \frac{P_1^{(a)}}{P_0^{(a)}}$, остается вычислить второй момент функции распределения $P_1^{(a)}(\tau, E) = \int \theta^2 f^{(a)}(\tau, E, \theta) d\Omega$.

Уравнение для $P_1^{(a)}$ получим, умножая (3в) на θ^2 и интегрируя по всем телесным углам:

$$\frac{\partial P_1^{(a)}(\tau, E)}{\partial \tau} = \frac{\ln 2}{E} \int_E^{E_0} P_1^{(a)}(\tau, E') dE' - a P_1^{(a)}$$

где

$$a = 6 \cdot \ln 2.$$

Отсюда

$$P_1^{(a)}(\tau, E) = \frac{\ln 2}{E} e^{-a\tau} \int_E^{E_0} e^{a\tau'} \int_E^{E_0} P_1^{(a)}(\tau', E') dE' dE'$$

Поступая аналогично предыдущему, после довольно длинных вычислений, получаем следующее выражение для $P_1^{(a)}$:

$$P_1^{(a)} = \frac{(\ln 2)^2}{2E_0} \frac{E\tau^2}{E_0} e^{-a\tau} \left\{ (1+u + \frac{2}{3}u^2 + \frac{u^3}{3}) \left[e^{\beta\tau} \left(\frac{\tau}{\beta^4} - \frac{6\tau}{\beta^3} + \frac{3\tau}{\beta^2} - \frac{\tau^2}{\beta} + \frac{2}{\beta^3} - \frac{2\tau}{\beta^2} + \frac{\tau^2}{\beta} \right) - \frac{2\tau}{\beta^3} \left(\frac{3}{\beta} + 1 \right) \right] + \left[2(1+u) - \frac{5}{3}u^2 + u^3 \right] \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{\beta} + e^{\beta\tau} \left(\tau - \frac{1}{\beta} \right) \right] + \frac{1}{\beta} (1-e^{-\beta\tau}) \left(\frac{4}{3}u^2 + u^3 \right) + \frac{8}{3} e^{-2a} (1+2u) \left[E_i((2+\tau)\beta) - E_i(2\beta) \right] - 5 e^{-3a} \left[E_i((3+\tau)\beta) - E_i(3\beta) \right] \right\}; \quad (23)$$

где $\beta = \ln u$.

Среднеквадратичное отклонение квантов равно $\overline{\theta^2} = \frac{P_1^{(a)}}{P_0^{(a)}}$ и представлено графически на рис.2. По оси ординат отложена величина $\overline{\theta^2} = 57,3^\circ \sqrt{\overline{\theta^2}}$; по оси абсцисс - глубина t в радиационных единицах, $E_0 = 200 \text{ МэВ}$.

6. Перейдем к вычислению функции $\overline{\theta^2}$. Как обычно, уравнение для нулевого момента функции распределения $P_0^{(a)}(\tau, E)$ получается из исходного (3с) интегрированием по всем углам:

$$\frac{\partial P_0^{(a)}}{\partial \tau} = \ln 2 \int_E^{E_0} P_0^{(a)}(\tau, E') W_p(E', E) dE'. \quad (24)$$

Уже упоминалось, что в уравнении (3а) пренебрегли "straggling'ом" позитронов. Функцию $P_0^{(a)}$ берем в виде (22), сечение рождения пар, как и прежде, в форме (15). Мы не будем описывать интегрирования в (24). Оно весьма громоздко. Возникающие при этом типичные интегралы вынесены в приложение II. Приводим результат:

$$P_0^{(a)}(\tau, E) = \frac{a \ln 2}{2E_0} \left\{ \frac{1}{\beta} (2u - u^2 + \frac{u}{\beta}) \left[\frac{e^{-a\tau}}{a} + \frac{e^{-\beta\tau}}{\beta} \right] + \frac{u}{\beta} \left[\frac{e^{-\beta\tau}}{\beta} - \tau e^{-\beta\tau} \right] + \sum_{k=2}^4 C_k \psi(k) \right\},$$

где

$$\psi(k) = e^{-a(k\tau)} \left[E_i(k\beta) - E_i((k+\tau)\beta) + E_i((k+\tau)\beta) - E_i(k\beta) \right],$$

$$C_2 = \frac{1}{u} (1+u + \frac{u^2}{3}), C_3 = -\frac{5}{a} (1 + \frac{2}{3}u), C_4 = \frac{2}{a}; \beta = \ln u, \beta = \ln u.$$

Смысл функции $P_0^{(a)}$ состоит в том, что она дает полное число позитронов в приближении первого поколения в интервале $(E, E+dE)$.

Запишем уравнение для второго момента функции распределения позитронов $P_1^{(2)} = \int \theta^2 f^{(2)}(t, E, \theta) d\theta$:

$$\frac{\partial P_1^{(2)}}{\partial t} = \ln 2 \frac{E_k^2}{E_0^2} P_0^{(2)}(t, E) + \ln 2 \int_E^{E_0} P_1^{(2)}(t, E') W_p(E', E) dE' \quad (26)$$

Как и в предыдущем случае, мы не будем приводить весьма громоздкие выкладки при интегрировании в (26), а сразу выпишем результат (типичные интегралы собраны в приложении II):

$$P_1^{(2)} = \frac{a \ln 2}{2E_0} \frac{E_k^2}{E_0^2} \left\{ \left[u \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{\beta} \right) + 2u - u^2 \right] \frac{1}{\beta} \left[\frac{e^{-\tau g} - 1}{g^2} - \frac{\tau}{g} \right] + \frac{1}{a\beta} (2u - u^2 + \frac{u}{\beta}) \times \right. \\ \left. \left(\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} - \tau \right) + \frac{u}{\beta} \left[\frac{e^{-\tau g} - 1}{g^2} - \frac{\tau e^{-\tau g}}{g} \right] + \frac{1}{\beta} \left[u^2 + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{3} u^4 + \frac{1}{\beta} (2u + 3u^2 + \frac{2}{3} u^3 + \frac{5}{3} u^4) \right] \right\} \left[\frac{1 - e^{-\tau g}}{g} + \frac{1 - e^{-a\tau}}{a} \right] + \frac{1}{\beta} (2u + 3u^2 + \frac{2}{3} u^3 + \frac{5}{3} u^4) \left[\frac{1 - e^{-\tau g}}{g^2} + \frac{\tau e^{-\tau g}}{g} \right] + \frac{1}{\beta} \left[u + u^2 + \frac{2}{3} u^3 + \frac{u^4}{3} \right] \left[\frac{2(1 - e^{-\tau g})}{g^3} + \frac{2\tau e^{-\tau g}}{g^2} - \frac{\tau^2 e^{-\tau g}}{g} \right] + \frac{1}{\beta^2} (2u + 2u^2 + \frac{4}{3} u^3 + \frac{2}{3} u^4) \times \left[\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} + \frac{1 - e^{-\tau g}}{g} \right] + \beta \left[\frac{1 - e^{-\tau g}}{g^2} + \frac{\tau e^{-\tau g}}{g} \right] \right\} + \sum_{k=2}^4 b_k \varphi(k) + \sum_{k=2}^4 c_k \mathcal{F}(k),$$

где

$$\varphi(k) = e^{-a(k\tau)} [E_i(k\tau) - E_i(k\tau/\beta)] + E_i(k\tau/g) - E_i(k\tau/g).$$

$$b_2 = \frac{1}{a} \left[-\frac{4}{a} (1 + u + \frac{u^2}{3}) + 8(1 + \frac{u}{3} + \frac{u^2}{3}) \right], b_3 = \frac{5}{a} \left[\frac{1}{a} (1 + \frac{2}{3}u) + 3 - u \right], b_4 = \frac{1}{a} (1 - \frac{2}{a} + 2u),$$

$$\mathcal{F}(k) = (k\tau) [E_i(k\tau/g) - E_i(k\tau)] + \frac{u^k}{g} (1 + u^k), c_2 = \frac{4}{a} (1 + u + \frac{u^2}{3}),$$

$$c_3 = -\frac{2}{a} (1 + \frac{2}{3}u), c_4 = \frac{2}{a}, \beta = \ln u, g = \ln(u).$$

функция $\bar{\theta}_{(e)} = 57.3^\circ \sqrt{\bar{\theta}_{(e)}^2}$ представлена графически на рис. 3.

7. Рассмотрим предельный переход к случаю тонких фольг, т.е. к случаю малых τ . Раскладывая соответствующие выражения (22), (23), (25), (27) в ряд Маклорена по малой величине $\tau \ll 1$ и оставляя главные члены по τ и u получим для среднеквадратичных углов отклонения электронов, фотонов и позитронов следующие выражения:

$$\bar{\theta}_{(e)}^2 = \frac{E_k^2}{E_0^2} t, \quad \bar{\theta}_{(p)}^2 = \frac{1}{2} \frac{E_k^2}{E_0^2} t, \quad \bar{\theta}_{(n)}^2 = \frac{2}{3} \frac{E_k^2}{E_0^2} t; \quad (28)$$

Из (28) видно, что среднеквадратичное угловое отклонение позитронов $\bar{\theta}_{(p)}$ меньше соответствующей величины для электронов, но больше чем $\bar{\theta}_{(n)}$. Этот результат имеет весьма прозрачный смысл. Очевидно, что набираемый угол в результате многократного рассеяния зависит от длины пробега частицы в веществе. Ясно также, что длина пробега $\tau_{(p)}$ позитрона с определенным отношением E/E_0 удовлетворяет условию: $\tau_{(n)} < \tau_{(p)} < \tau_{(e)}$, где $\tau_{(e)}$ и $\tau_{(n)}$ - длины пробега электронов и фотонов с тем же значением параметра E/E_0 . Это совершенно понятно физически, так как позитрон часть пути в веществе (до своего рождения) проходит в виде фотона. Результат (28) можно получить непосредственно из кинетических уравнений, если интегральный член, соответствующий "straggling'у" заменить дифференциальным вида $E \frac{\partial f}{\partial t}$, где E средняя энергия, равная $E = E_0 e^{-t}$. На малых глубинах $\tau \ll 1$, раскладывая экспоненту в ряд по τ и оставляя главный член, находим, что рассматриваемый член имеет вид $E_0 \frac{\partial f}{\partial t}$. Смысл его состоит в том, что уменьшение энергии электрона происходит на малых глубинах в основном за счет почти непрерывного излучения фотонов. С учетом этих изменений, уравнения каскадной теории в приближении первого по-

коления приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} &= E_0 \frac{\partial f^{(n)}}{\partial E} + \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(n)}(4, E, \theta), \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} &= \int_0^{E_0} f^{(n)}(4, E', \theta) W_e(E', E) dE' - \int_0^E f^{(n)}(4, E, \theta) W_p(E, E') dE', \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} &= \int_0^{E_0} f^{(n)}(4, E', \theta) W_p(E', E) dE' + \frac{E_k^2}{4E^2} \Delta_0 f^{(n)}(4, E, \theta); \end{aligned} \quad (29)$$

Решая (29) методом характеристик, сразу получаем формулы (28).

8. При выводе приведенных выше результатов были использованы некоторые приближения, основным из которых является приближение по числу вторичных частиц.

Прогресс в решении поставленной задачи покоится именно на предположении о том, что третьи и последующие поколения на небольших глубинах не играют существенной роли и генезис ливня происходит в соответствии с физической картиной, описываемой приближением первого поколения.

Для сечений процессов радиационного торможения и образования пар были взяты асимптотические выражения в случае полного экранирования, что как раз и соответствует рассматриваемой ситуации, когда частицы являются релятивистскими.

Существенным пунктом является пренебрежение "straggling'ом" позитронов, которое вносит ошибку в выражении для полного числа позитронов, но не большую, чем 20%. Последовательный учет этого эффекта приводит к значительным математическим трудностям.

Чтобы проверить полученные результаты был использован метод интегральных преобразований Лапласа-Меллина, позволяющий выразить моменты функций распределения из полных уравнений

каскадной теории (I). Полученные при этом выражения в форме контурных интегралов в плоскости комплексной переменной вычислялись на электронно-счетной машине /I4/. Для сравнения на рис.4 приведены две кривые; сплошная соответствует расчетам на электронно-счетной машине, пунктирная - приближению первого поколения.

В заключение приносим благодарность В.С.Сынаху и В.В. Якимцу за обсуждение. Мы благодарны Л.А.Корневой и М.Л.Легостаевой за помощь в табулировании функций на электронной вычислительной машине.

Интеграл (9) заменой $x = \ln \frac{E}{E'}$ сводится к

$$P_1^{(c)} = \frac{E_k^2}{E^2} \frac{\ln 2}{E_0} \int_0^{\tau'} \int_0^{\tau'} e^{-2x} x^{\nu-1} (u-x)^{\mu-1} du'$$

где

$$\nu \equiv \tau - \tau' > 0, \mu = \tau' > 0, u' = \ln \frac{E_0}{E};$$

Совершая интегрирование по x [13], находим

$$P_1^{(c)} = \frac{E_k^2 \ln 2}{E^2 E_0} \int_0^{\tau'} dx' \frac{B(\tau', \tau - \tau') u^{\tau-1}}{\Gamma(\tau - \tau') \Gamma(\tau')} {}_2F_1(\tau - \tau', \tau, -2u)$$

Здесь $B(\tau', \tau - \tau')$ Эйлерав интеграл второго рода, $\Gamma(\tau')$ - гамма-функция, ${}_2F_1(\tau - \tau', \tau, -2u)$ - вырожденная гипергеометрическая функция. Используя известные соотношения [13]:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad {}_2F_1(\alpha, \beta, z) = e^z {}_2F_1(\beta - \alpha, \beta, -z).$$

получаем (9a)

$$P_1^{(c)} = \frac{E_k^2 \ln 2}{E_0^2 E_0} e^{-2u} u^{\tau-1} \int_0^{\tau'} {}_2F_1(\tau', \tau, 2u) dx'$$

1. Интеграл вида $\int_0^u \frac{du' (u')^\delta}{(\ln du')^\alpha}$

заменой $x = \ln du'$ сводится к

$$\int_0^{-\tau} E_i((\delta+1)\ln du),$$

где

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x < 0.$$

2. Дифференцированием по параметру легко получить:

$$a) \int_0^u \frac{du' (u')^\delta}{(\ln du')^2} = \frac{(\delta+1)}{2^{\delta+1}} E_i((\delta+1)\ln du) - \frac{u^{\delta+1}}{\ln du},$$

$$b) \int_0^u \frac{du' (u')^\delta}{(\ln du')^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{(\delta+1)^2}{2^{\delta+1}} E_i((\delta+1)\ln du) - \frac{(\delta+1)u^{\delta+1}}{\ln du} - \frac{u^{\delta+1}}{(\ln du)^2} \right],$$

$$b) \int_0^u \frac{(u')^\delta du'}{(\ln du')^4} = \frac{1}{6} \left[\frac{(\delta+1)^3}{2^{\delta+1}} E_i((\delta+1)\ln du) - \frac{(\delta+1)^2 u^{\delta+1}}{\ln du} - \frac{(\delta+1)u^{\delta+1}}{(\ln du)^2} - \frac{2u^{\delta+1}}{(\ln du)^3} \right].$$

3. Интегрированием по частям можно легко установить, что:

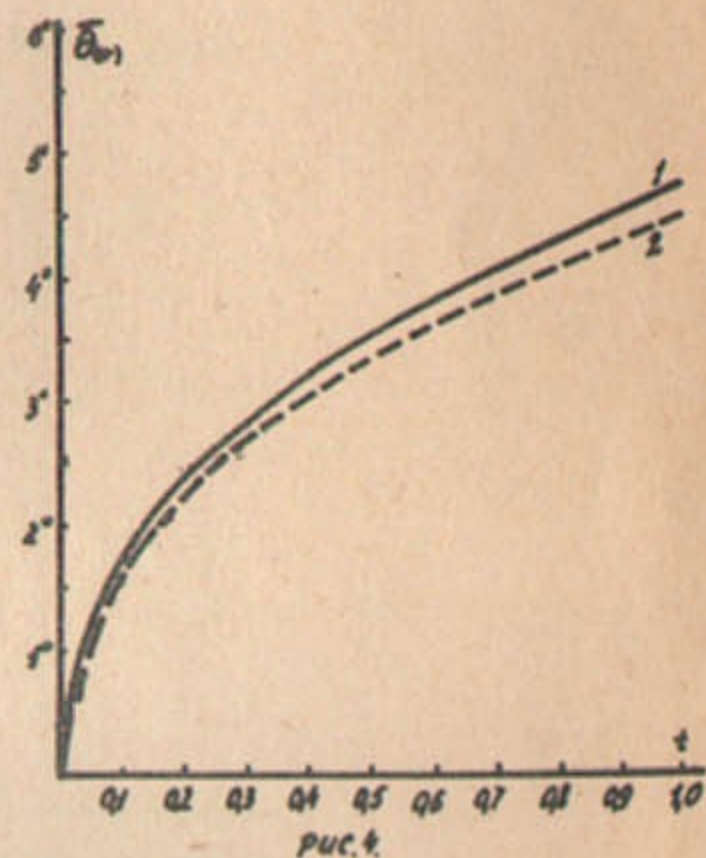
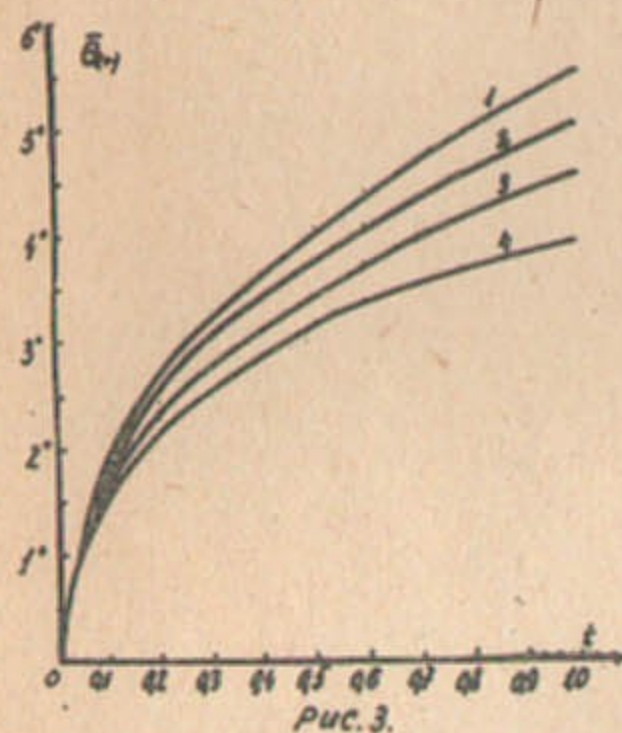
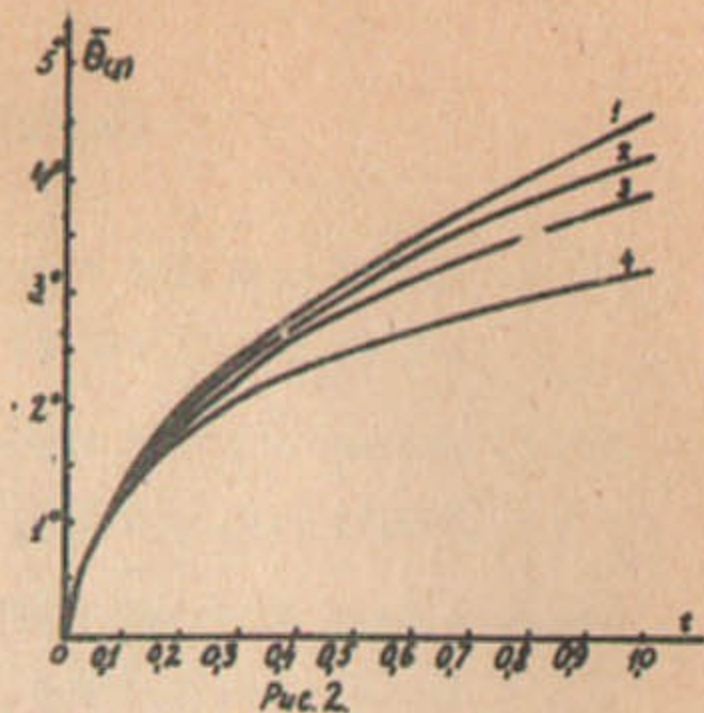
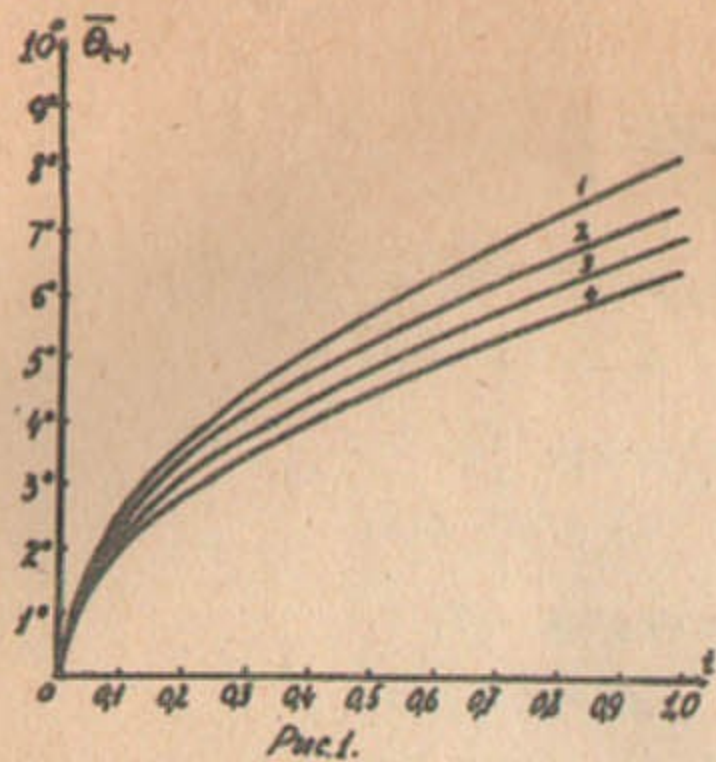
$$a) \int_0^u (u')^\beta E_i(\beta \ln du) du' = \frac{u^{\beta+1}}{\beta+1} E_i(\beta \ln du) - \frac{1}{(\beta+1)2^{\beta+1}} E_i((\beta+1)\ln du),$$

$$b) \int_0^{\tau'} e^{-\tau' \ln du} E_i((n+\tau') \ln du) = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\tau'} E_i((n+\tau') \ln du) - \int_0^{\tau'} E_i(n \ln du) + E_i(n \ln du) - \int_0^{\tau'} E_i((n+\tau') \ln du) \right].$$

$$b) \int_0^{\tau'} \alpha' E_i((n+\tau') \ln u) = (n+\tau') E_i((n+\tau') \ln u) - n E_i(n \ln u) + \frac{u^n}{\ln u} (1-u^\tau).$$

ЛИТЕРАТУРА

- /I/ Б.Росси, К.Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом. М. (1948), § 23.
- 12/ G. Molise. *Zs. für Naturforsch.* 3a, 78, (1948)
- 13/ N.S. Snyder, W.T. Scott. *Phys. Rev.* 76, 220 (1949)
- /4/ Л.Д.Ландау *ЖЭТФ*, 10, 1007 (1940)
- /5/ С.З.Беленький. Лавинные процессы в космических лучах, глава 7. М-Л (1948).
- /6/ В.В.Гужавин и И.И.Иваненко *Изв. Академии Наук СССР, сер. физ.*, 28, 1841 (1964).
- 17/ L. Landau and G. Lumer. *Proc. Roy. Soc.* 166, 213 (1938)
- 18/ H.A. Bethe, Rose M.E., Smith L.P. *Proc. Am. Phil. Soc.* 78, 573 (1938)
- 19/ Bothe W, *Handb. d. Phys. Berlin, vol 22, 2* (1933).
- /10/ R.R. Wilson. *Phys Rev*, 84, 100 (1951).
- /11/ В.С.Сымак, *ЖЭТФ*, 40, 194 (1961).
- /12/ L. Eyges. *Phys. Rev* 76, 264 (1949).
- /13/ И.С.Рыжик и И.М.Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений (1962).
- /14/ А.Баутин и О.Койфман. В печати.



ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1. Кривые отвечают значениям параметра E/E_0 :

1-0,6; 2-0,7; 3-0,8; 4-0,9; $E_0 = 200$ Мэв.

Рис.2. Кривые отвечают значениям параметра E/E_0 :

1-0,6; 2-0,7; 3-0,8; 4-0,9. $E_0 = 200$ Мэв.

Рис.3. Кривые отвечают значениям параметра E/E_0 :

1-0,6; 2-0,7; 3-0,8; 4-0,9. $E_0 = 200$ Мэв.

Рис.4. Кривые отвечают значениям параметра E/E_0 :

1-0,8; 2-0,8; $E_0 = 200$ Мэв.

Ответственный за выпуск С.А.Хейфец

Отпечатано на ротапринтере в Институте
Ядерной физики СО АН СССР
Тираж 150 экз. б е с п л а т н о