

И. 39

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт- 77

Ф.М.Израйлев

Исследование стохастичности колебаний
струны с квадратичной нелинейностью



НОВОСИБИРСК 1966

+

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left\{ 1 + \varepsilon \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^{\rho-1} \right\} \quad (1.1)$$

Оно описывает продольные колебания нелинейной струны с закрепленными концами. Качественное поведение этих колебаний можно получить, численно интегрируя цепочку нелинейных осцилляторов, приближенно представляющих струну и подчиняющихся некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для $\rho=3$ (кубическая нелинейность) уравнение (1.1) сводится, например, к такой системе

$$\ddot{x}_\ell = (x_{\ell+1} + x_{\ell-1} - 2x_\ell) \left\{ 1 + \beta [(x_{\ell+1} - x_\ell)^2 + (x_\ell - x_{\ell-1})^2 + (x_{\ell+1} - x_\ell)(x_\ell - x_{\ell-1})] \right\} \quad (1.2)$$
$$\ell = 1, 2, \dots, N-1;$$

Систему (1.2) уже численно решали Ферми, Паста и Улам / 1 /. Авторы надеялись проследить появление статистических свойств у системы (1.2) с $N-1$ степенями свободы. При $\beta=0$ ее решение может быть представлено в виде набора $N-1$ независимых нормальных осцилляторов (мод) и, естественно, не имеет статистических свойств. Предполагалось, что при любом $\beta \neq 0$, т.е. при любой малой нелинейности, система будет иметь статистические свойства. В частности ожидалось, что сосредоточенная вначале в одной моде энергия рано или поздно распределится между всеми остальными модами. Однако, возбудив наинизшую (первую) моду, авторы получили любопытную картину — энергия действительно переходила в другие моды, но через некоторый промежуток времени с большой точностью вновь собиралась в первой моде, затем картина повторялась, т.е. движение носило ярко выраженный квазипериодический характер. Авторы предположили, что для нелинейных систем необходимо вводить новые нормальные координаты (квазимоды).

Примерно в то же время было доказано сохранение квазипериодического характера движения для широкого класса систем при малом,

но конечном возмущении (см. /2,3/).

Тем не менее, при достаточно большом N у системы с достаточно большой нелинейностью должны все-таки появиться статистические свойства. Таким образом, должна существовать некая граница между динамической областью и областью стохастичности. Под стохастичностью понимается наличие у системы наиболее существенных статистических свойств: эргодичности, перемешивания и положительной энтропии по Колмогорову /4/.

Таким образом, для какого-либо N должно существовать критическое значение величины нелинейности, определяющей границу стохастичности.

В работе /5/ был получен критерий стохастичности для системы (I.2). Предварительные численные расчеты подтвердили наличие (при малом параметре нелинейности) стохастичности в некоторой области и довольно резкой границы, отделяющей эту область от области динамической устойчивости.

Настоящая работа содержит аналитический вывод критерия стохастичности для так называемого "квадратичного" уравнения ($p=2$), которое имеет ряд интереснейших свойств и описывает некоторые физические процессы.

II. "КВАДРАТИЧНЫЙ" СЛУЧАЙ

Итак, рассмотрим следующую систему уравнений

$$\ddot{x}_e = (x_{e+1} - x_{e-1} - 2x_e) \left\{ 1 + \lambda (x_{e+1} - x_{e-1}) \right\} \quad (2.1)$$

$e=1, 2, \dots, N-1;$

Она приближенно соответствует уравнению (I.1) для $p=2$ и $\lambda=\xi$.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left\{ 1 + \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \right\} \quad (2.2)$$

Система (2.1) также численно решалась Ферми, Паста и Уламом /I/ и Таксом. Решение качественно имело строго периодический вид и никакой стохастичности не наблюдалось.

Целью является рассмотрение возможности стохастичности для системы (2.1) и получения критерия стохастичности.

Перейдем от уравнения (2.1) к уравнению в нормальных (для линейного случая) координатах по формулам

$$x_e = \sqrt{\frac{2}{N-1}} \sum_{k=1}^{N-1} Q_k \sin \frac{k\pi e}{N}$$

В результате получим точную систему уравнений для Q_k :

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k = -2\sqrt{\frac{2}{N-1}} \left\{ 8 \sum_{i=1}^{N-k-1} Q_i Q_{k+i} \sin \frac{k+i}{2} \sin \frac{k-i}{2} \sin \frac{k}{2} + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=1}^{k-1} Q_i Q_{k-i} \sin^2 \frac{k-i}{2} \sin k_i + \right. \\ \left. + 4 \sum_{i=N-k+1}^{N-1} Q_i Q_{2N-k-i} \sin^2 \frac{2N-k-i}{2} \sin k_i \right\} \quad (2.3)$$

где $\omega_k = 2 \sin \frac{k\pi}{2N}$, $k_i = \frac{\pi i}{N}$

Решение ищется в виде $Q_k = C_k(t) \cos \theta_k(t)$. $\dot{\theta}_k = \dot{\omega}_k(t)$, где $C_k, \dot{\omega}_k$ - медленно меняющиеся амплитуды и частоты нормальных колебаний, штрих указывает, что частота включает в себя все поправки, связанные с возмущением.

Рассмотрим два предельных случая - когда возбуждены в начальный момент, либо низшие, либо высшие моды.

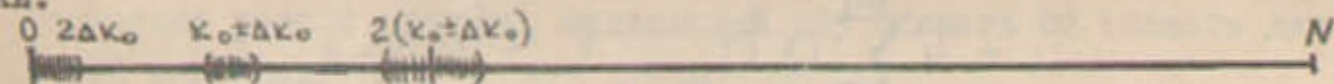
I. Низшие моды

Поскольку (2.3) представляет собой систему зацепляющихся уравнений для нормальных осцилляторов, энергия, сосредоточенная вначале в каком-либо интервале мод, будет перекачиваться в другие моды, причем эта перекачка будет обычной, динамической и, если нет стохастичности, рано или поздно будет восстанавливаться начальное состояние

Рассмотрим сначала это нестохастическое возбуждение мод. Пусть вначале возбуждена одна единственная первая мода. Тогда второй

член в правой части уравнения (2.3) возбуждает соседние, более высшие моды и, таким образом, возбуждение идет в сторону высших мод. Это продолжается до тех пор, пока первый и третий члены в правой части (2.3) не начнут возвращать энергию в низшие моды. Итак, имеем следующую картину: возбуждение распространяется до какого-то k_{max} (которое, кстати, зависит от N , ибо начало действия третьего члена зависит от N), а затем энергия должна вновь собраться в первой моде. Именно это и наблюдали Ферми, Паста и Улам, а также Так, численно решая уравнение (2.1).

Теперь возбудим вначале участок $(k_0 \pm \Delta k_0)$, причем $k_0 \ll N$ и $k_0 \gg 1$. Тогда первый член возбуждает участок $\Delta k_0 \pm \Delta k_0$, второй — участок $2(k_0 \pm \Delta k_0)$; третий же член вообще начинает действовать, когда возбуждение достигнет по крайней мере $N/2$. Будем считать, что и $2k_0 \ll N$, тогда мы имеем на первом этапе такие возбужденные участки:



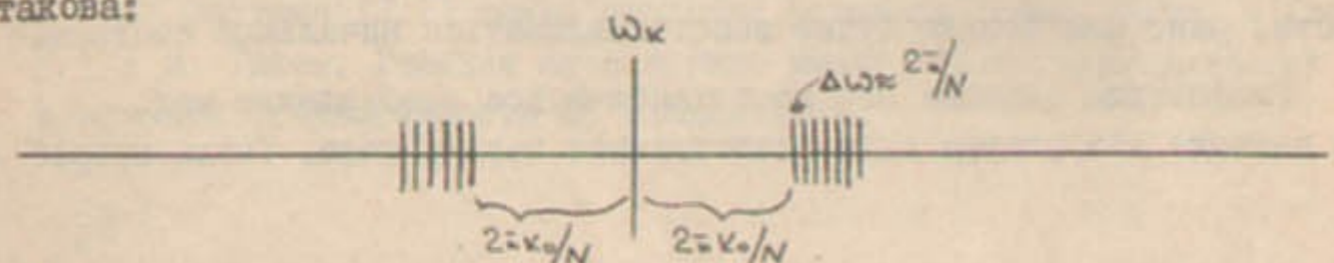
Естественно, далее каким-то сложным образом будут возбуждаться остальные моды, но мы будем рассматривать возможность стохастичности именно на этом этапе, поскольку будет показано, что ранее (когда возбужден только один участок $k_0 \pm \Delta k_0$) стохастичность вообще невозможна.

В правой части уравнения (2.3) имеется набор сил с различными частотами. Установим структуру резонансов этих возмущающих сил.

I. Возбужден участок $k_0 \pm \Delta k_0$ ($k_0 \ll N$). Тогда в правой части (2.3) k, i — из этого участка и надо учесть лишь два первых члена. Они дают следующие частоты:

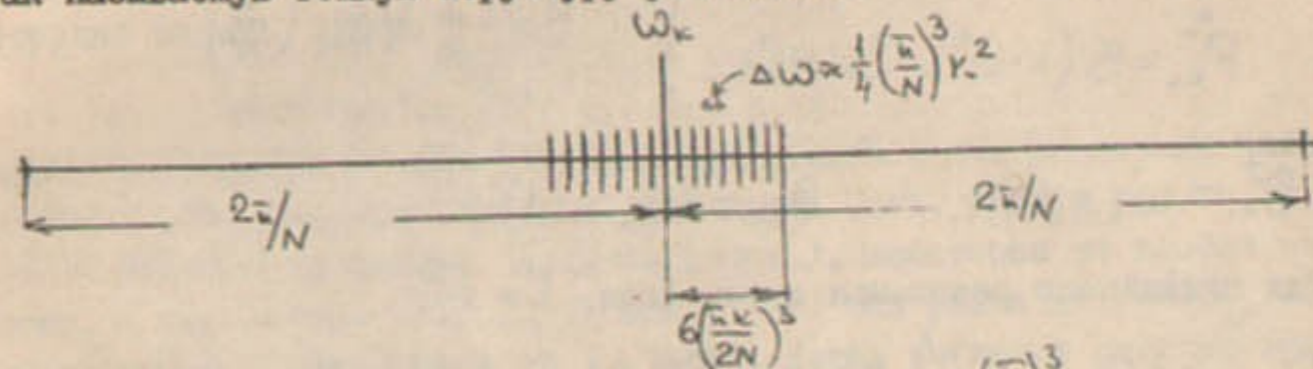
$$\omega_{k+i} + \omega_i; \quad \omega_{k-i} - \omega_i; \quad \omega_{k-i} + \omega_i; \quad \omega_{k+i} - \omega_i,$$

Поскольку $k, i \ll N$, то $\omega_{k+i} \approx \frac{2\pi(k+i)}{N}$; $\omega_i \approx \frac{2\pi i}{N}$ и тогда первые две частоты примерно равны $\omega_{k \pm 2i}$. Резонансная структура сил с этими частотами такова:



Видно, что имеется щель, шириной $2\pi k_0/N$. Однако, если учесть первоначальное нестохастическое возбуждение первых $2\Delta k_0$ мод, то в правой части (2.3) уже надо учесть члены с наимизшими модами, и они-то уничтожат щель. Действительно, i может тогда принимать значения $1, 2, 3, \dots$ и $(\Delta\omega)_{min} = \omega_k - \omega_{k-2} \approx 2\pi/N$. Итак, расстояние между резонансами равно $2\pi/N$.

Два оставшиеся члена (с частотами $\omega_{k-i} + \omega_i$; $\omega_{k+i} - \omega_i$) дают так называемую тонкую структуру резонансов:



где среднее расстояние между резонансами $\Delta\omega \approx \frac{1}{4} \left(\frac{k}{N}\right)^3 k^2$ и максимальная расстройка относительно частоты ω_k равна $\Delta\omega_{max} \approx 6 \left(\frac{k}{2N}\right)^3$, что много меньше расстояния до ближайшего резонанса, полученного из первых двух членов.

Теперь выделим в правой части (2.3) член с Q_k . Этот член получается из второй суммы при $i=k$ и он равен

$$-2 \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot 8 \cdot Q_k Q_{2k} \sin \frac{\pi k}{N} \cdot \sin^2 \frac{\pi k}{2N}$$

Смысл этого разделения состоит в том, что только этот член дает поправку к частоте (Ω_k), зависящей от амплитуды и характеризует собой нелинейное изменение частоты нормальных колебаний.

Поправка к частоте определяется стандартным методом усреднения, описанным в / 6 /, причем в первом порядке она равна нулю и необходимо вычислять следующее приближение. Громоздкое по виду, но несложное по существу вычисление дает

$$\Omega_k = \frac{(zA)^2 C_{2k}}{64 \omega_k^3} \quad (2.4)$$

где zA — коэффициент при $Q_k Q_{2k}$. Видно, что поправка зависит не только от "соответственной" амплитуды Q_k , но и от Q_{2k} . Теперь видно, что если Q_{2k} еще не возбуждена, то Ω_k равна нулю.

Оценим теперь по порядку величины внешние силы в уравнении (2.3) и преобразуем его с учетом малости ($k, i \ll N$) возбужденных мод:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 - \frac{\varepsilon A}{\omega_k^2} Q_{2k}\right) = \sum_{i=1}^{N-k-1} F_{ki}^+ \cos \theta_{ki}^+ + \sum_{i=1}^{k-1} F_{ki}^- \cos \theta_{ki}^- \quad (2.5)$$

где
$$\left. \begin{aligned} F_{ki}^+ &\approx B(k+i) \cdot k \cdot i \cdot C_{k+i} \cdot C_i \\ F_{ki}^- &\approx B(k-i) \cdot i \cdot C_{k-i} \cdot C_i \end{aligned} \right\} B = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{N-1}} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^3$$

$$\dot{\theta}_{ki}^+ = \omega_{k+i}^1(t); \quad \dot{\theta}_{ki}^- = \omega_{k-i}^1(t);$$

Для ближайшего резонанса имеем (при $i=1$):

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 - \frac{\varepsilon A}{\omega_k^2} Q_{2k}\right) = F_{k1} \left\{ \cos \omega_{k+2} t + \cos \omega_{k-2} t \right\}$$

где
$$F_{k1} \approx -\frac{1}{2} k^2 C^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{N-1}} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^3;$$

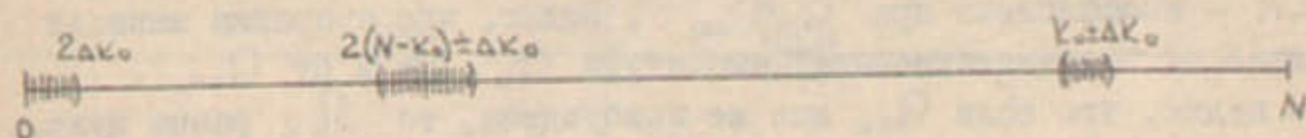
Здесь предполагается, что все C_k одного порядка. Поправка к частоте в данном случае имеет вид:

$$\Omega_k = \frac{\varepsilon^2 C_{2k}^2}{8N} \cdot \left(\frac{\varepsilon k}{N}\right)^3 \quad (2.8)$$

Прежде чем перейти к уравнению в медленных переменных (для C_k и $\Psi_{ki} = \theta_k - \theta_{ki}$), рассмотрим случай высших мод.

2. Высшие моды

Пусть возбуждены вначале моды $k_0 + \Delta k_0$ и $i \ll N - k_0 \ll N$. Детальное рассмотрение уравнения (2.3) дает интересную картину: возбуждаются (оперва) те же участки, что и в случае малых мод, хотя "работают" другие члены в правой части (2.3) (первый и третий). Итак, имеем аналогичную картину:



Далее рассмотрим систему резонансов внешних сил уже с учетом первоначального нестохастического возбуждения.

Имеются частоты

$$\omega_{k+i} \pm \omega_i; \quad \omega_{k-i} \pm \omega_i; \quad \omega_{2N-k-i} \pm \omega_i; \quad (2.9)$$

причем теперь i может быть как малым, так и большим ($\approx k_0$). Среднее расстояние между резонансами для всех этих частот, как нетрудно видеть, равно

$$(\Delta\omega)_{cp} \approx \frac{\varepsilon}{N}$$

Однако расстояние до первого резонанса ($\Delta\omega_0$) для различных наборов частот (2.9) различно. Часть из них имеет цель, равную $\Delta\omega_0 \approx \frac{\varepsilon}{N}$ (i - мало), для других $\Delta\omega_0 \approx 1$ ($i \approx k_0$), некоторые ее вообще не имеют, а для набора $\omega_{2N-k-i} \pm \omega_i$ (при $i \approx k_0$) она равна $\Delta\omega_0 \approx \frac{2\varepsilon(N-k_0)}{N}$. Тем не менее, независимая от i цель, здесь не имеет особого значения, у нас достаточно сил, ее неимеющих, необходимо только правильно выбрать эти силы. Для этого надо оставить в правой части (2.3) лишь небольшие члены. Они получаются при малых i и для них $\Delta\omega_0 \approx \frac{\varepsilon}{N}$, но поскольку i принимает значение от единицы, то цель исчезает также, как и в случае малых мод.

Поправку к частоте дает лишь один член, содержащийся в последней сумме при $i = 2(N-k)$ и равный

$$-4\varepsilon \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot \frac{2\varepsilon(N-k)}{N} Q_k \cdot Q_{2(N-k)}$$

С учетом $(N-k) \ll N$ имеем

$$\Omega_k \approx \frac{1}{4} \varepsilon^2 C_{2(N-k)}^2 \frac{\varepsilon^2 (N-k)^2}{N^3} \quad (2.10)$$

Оставляя в (2.3) наибольшие внешние силы, получим

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 - \frac{\varepsilon A}{\omega_k^2} Q_{2(N-k)}\right) = -4\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{N}\right) \sqrt{\frac{2}{N-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{N-k-1} i \cdot Q_i \cdot Q_{k+i} + \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot Q_i \cdot Q_{k-i} + \sum_{i=N-k+1}^{N-1} i \cdot Q_i \cdot Q_{2N-k-i} \right\} \quad (2.11)$$

где $\varepsilon A = -4\varepsilon \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot \frac{2\varepsilon(N-k)}{N}$ и $i \ll N$

Или:

$$\ddot{Q}_k + \omega_k^2 Q_k \left(1 - \frac{\varepsilon A}{\omega_k^2} Q_{z(N-k)}\right) = \sum_i F_{ki} \cos \theta_{ki} \quad (2.12)$$

где $F_{ki} = 6 \alpha \overline{c^2} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right) \sqrt{\frac{2}{N-1}} \cdot i$ (2.13)

3. Получение границы стохастичности

Применяя метод усреднения /6/, получим следующие уравнения в медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{C}_k = \frac{F_{ki}}{2\omega_k} \sin \Psi_{ki} \\ \dot{\Psi}_{ki} = \omega_k - \omega_{ki} + \frac{F_{ki}}{2C_k \omega_k} \cos \Psi_{ki} \end{cases} \quad \Psi_{ki} = \theta_k - \theta_{ki} \quad (2.14)$$

из которых можно получить так называемое фазовое уравнение

$$\ddot{\Psi}_{ki} = \frac{d\Omega_k}{dC_k} \cdot \frac{F_{ki}}{\omega_k} \cdot \sin \Psi_{ki} \quad (2.15)$$

Оно дает размер сепаратрисы $|\dot{\Psi}_{ki}|_{\max}$ на фазовой плоскости $(\Psi_{ki}, \dot{\Psi}_{ki})$ (см. например /13 /):

$$|\dot{\Psi}_{ki}|_{\max} = \sqrt{\frac{2F_{ki}}{\omega_k} \cdot \frac{d\Omega_{ki}}{dC_k}} \quad (2.16)$$

В работах /7,8/ было показано, что граница стохастичности зависит от соотношения между размером сепаратрисы и средним расстоянием между резонансами и имеет вид

$$\chi \equiv \frac{|\dot{\Psi}_{ki}|_{\max}^2}{(\Delta\omega_{cp})^2} \sim 1 \quad (2.17)$$

Здесь надо сказать несколько слов о выборе $\Delta\omega_{cp}$ для случая малых мод. Дело в том, что при изменении частоты нормального колебания на всю величину "тонкой" структуры, т.е. на $2\Delta\omega_{\max}$ энергия осциллятора меняется лишь очень незначительно и, если

мы хотим наблюдать некоторую "грубую" стохастичность, то необходимо выбрать $\Delta\omega_{cp} \approx 2\varepsilon/N$, т.е. ту систему резонансов, при движении по которой энергия нормального колебания меняется на значительную величину.

Итак, в первом случае (малые моды) $(\Delta\omega_{cp}) \approx 2\varepsilon/N$, во втором — $(\Delta\omega_{cp}) \approx \varepsilon/N$

Подставляя все известные величины в (2.17) для малых и больших мод (для ближайшего резонанса) и вводя безразмерную характеристику нелинейного возмущения (I.I) по формулам

$$L(\chi_{k,i} - \chi_{k-1}) \approx L\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)$$

также, как в работе /5/ можно получить критерий стохастичности:

$$\left[L\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_{\max} \right]^3 \sim \begin{cases} 32 \frac{\Delta K \cdot \sqrt{\Delta K}}{K} & K \ll N \\ \frac{2}{3} \frac{K^3 \Delta K \sqrt{\Delta K}}{(N-K)^2} \left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2 & N-K \ll N \end{cases} \quad (2.18)$$

где ΔK — интервал возбужденных мод.

4. Некоторые замечания и оценки

Выражение (2.18) представляет границу стохастичности лишь по порядку величины и при условии, что нелинейность мала:

$$L\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)_{\max} \ll 1$$

При $\chi \geq 1$ в системе должно происходить стохастическое (необратимое) перераспределение между модами и в конце концов система должна прийти в состояние равнораспределения энергии по модам.

Теперь перейдем к некоторым оценкам численного счета, представленным в /1/. Применение критерия (2.18) к данным этих вычислений показывает, что при параметрах, которые были выбраны, стохастичности действительно не должно было быть. Важно подчеркнуть,

что для наблюдения стохастичности наиболее невыгодным является случай, когда вначале возбуждаются низкие моды, в то время как в /1/ брались именно малые моды.

В 1962 году Н. Забузски получил аналитическое решение для (2.2) /9/. Однако при этом оно имело смысл только до некоторого времени $t_{max} \sim 1/\epsilon$, что много меньше периода нормального колебания. После t_{max} вторая производная претерпевала разрыв. Таким образом, уравнение (2.2) не совсем точно соответствовало (2.1) в дальнейшем М. Крускал и Н. Забузски указали /10/, что необходимо учесть следующий член в разложении при переходе от (2.1) к (2.2). Тогда уравнение, соответствующее (2.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \left\{ 1 + \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \right\} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^3 x}{\partial z^3} \quad (2.19)$$

где $h = 1/N$

Теперь перейдем от уравнения (2.19) для x к уравнению для $u = \frac{\partial x}{\partial z}$. Однако необходимо помнить, что такой переход возможен лишь при

$$\left| \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{max} \right| \ll 1 \quad (2.20)$$

($h^2/12$ обеспечивает малость последнему члену в (2.19)). В результате некоторых преобразований с учетом (2.20) получим:

$$u_{\tau} + u \cdot u_{\tau} + \delta^2 u_{\tau\tau} = 0 \quad (2.21)$$

где введено медленное время $\tau = \frac{1}{2} t$ и, где

$$\delta^2 = \frac{(\Delta z)^2}{12\lambda} \quad \Delta z = h = 1/N \quad (2.22)$$

характеризует собой величину дискретности цепочки; если длина всей цепочки равна 1, то Δz - расстояние между частицами. Дополнительный член $\delta^2 u_{\tau\tau}$ характеризует величину дисперсии, которая препятствует обычному нарастанию фронта ударной волны. Чем меньше δ , тем круче волна и наоборот.

Уравнение (2.21) является уравнением Кортевега-де-Вриза. Это одномерное нелинейное уравнение описывает поверхностные волны на воде, магнитогиродинамические волны в бесстолкновительной плазме и длинные волны в ангармонических кристаллах. Его численно решали Крускал и Забузски /11/ и получили довольно интересную картину - решением (2.21) при некоторых начальных данных является набор "солитонов", движущихся с различными скоростями. Но самое интересное, что эти "солитоны", проходя друг сквозь друга, совершенно не взаимодействуют и картина во времени получается строго периодичной. Попробуем применить критерий (2.18) к уравнению (2.21).

Прежде всего надо оценить k'_{max} , до которого доходит возбуждение в результате образования ударной волны. Из (2.21) находим:

$$k'^2_{max} \sim u/\delta^2 \quad (2.23)$$

В вычислениях Крускала $\delta = 0.022$; $u|_0 = \cos \tau(z - ut)$, $N = 200$, следовательно, $k \sim 2 \cdot 10^{-2}$, т.е. $k'_{max} \sim 50$, что относится скорее к случаям малых мод. Поэтому критерий с учетом того, что

$$k' = \left(\frac{k}{N} \right) \cdot k \quad (2.24)$$

будет иметь вид:

$$(2u)^3 \sim 10^2 \frac{\Delta k \cdot \sqrt{\Delta k}}{N \cdot k'_{max}} \quad (2.25)$$

Правая часть (2.25) для этих параметров $\sim 10^{-2} \Delta k \cdot \sqrt{\Delta k}$ в то время как левая $\sim 8 \cdot 10^{-6}$, откуда видно, что система должна находиться в области глубокой устойчивости.

В отчете Забузски /12/ приводятся результаты численного счета для (2.1) с возбуждением высших мод. По словам автора, при некоторых начальных данных наблюдался "катастрофический" переход энергии во все остальные моды. Приводится рисунок, дающий величину энергии в модах в различные моменты времени и экспериментально полученный для некоторых начальных данных критерий стохастичности:

$$\lambda(x_{e+1} - x_{e-1}) \sim 0.65 \quad (2.26)$$

Оценка по (2.18) для $N-k \ll N$ (с такими примерно параметрами: $N = 100$, $k \approx 80$, $\Delta k \approx 10$) дает критерий

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{max} \right]^3 \sim 25 \quad \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{max} \sim 3 \quad (2.27)$$

Видно, что (2.27) является более жестким условием, чем (2.26). Оказывается, что критерий надо брать в более поздний момент времени (когда возбуждены, и малые, и большие моды) и для малых κ . Тогда, проведя аналогичный анализ системы резонансов и, оценив внешние силы, можно получить новый критерий:

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\min} \right]^3 \sim \frac{\Delta \kappa \cdot \sqrt{\Delta \kappa}}{\kappa} \left(\frac{b \kappa}{N} \right)^2 \quad (2.28)$$

Последний критерий для указанного счета, но уже для малых κ ($\kappa = 5$, $\Delta \kappa = 5$, $N = 100$) дает

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\min} \right]^3 \sim 0,056 \quad \lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_{\min} \sim 0,38$$

что неплохо согласуется с (2.26).

Можно показать, что критерий (2.18) для $N - \kappa \ll N$ и (2.27) применимы и к случаю, когда возбуждены в среднем все моды.

Во всех выражениях для границы стохастичности входит $(\Delta \kappa)^{1/2}$ и, так как $\Delta \kappa$ будет в результате стохастичности увеличиваться, то возможность стохастичности будет уменьшаться и даже вообще исчезать.

Остается отметить, что для $\kappa \approx N/2$ поправка к частоте $\Omega = 0$ (это сразу видно из (2.3)). Критерий для этого случая имеет вид

$$\left[\lambda \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right) \right]^3 \sim 20 \cdot \frac{\Delta \kappa \cdot \sqrt{\Delta \kappa}}{(N/2 - \kappa)^2} \cdot N \quad (2.29)$$

Таким образом, для $\kappa \approx N/2$ стохастичности практически нет.

В заключение приношу свою благодарность Б.В. Чирикову за весьма полезные советы.

Л и т е р а т у р а

1. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, *Studies of Nonlinear Problems I*, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955
2. А.Н. Колмогоров. ДАН, 98, 527, 1954
3. В.И. Арнольд, УМН, XUN, 9I, 1963
4. А.Н. Колмогоров. ДАН, 119, 861, 1958
5. Ф.М. Израйлев, Б.В. Чириков. ДАН, т.166, № 1, 1966
6. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958
7. Б.В. Чириков. Атомная энергия, 6, 630, 1959
Б.В. Чириков, диссертация, Новосибирск, 1959
8. Г.М. Заславский, Б.В. Чириков. ДАН, 159, 306, 1964
9. N. J. Zabusky, *Journ. Mathem. Phys.* 3, 1028, (1962)
10. M. D. Kruskal, N. J. Zabusky, *Journ. Mathem. Phys.* 5, v2, 231, (1964)
11. M. D. Kruskal, N. J. Zabusky, *Phys. Rev. Lett.* vol 15, v6, (1965)
12. N. J. Zabusky. A energetic approach to Problems of Nonlinear dispersive wave propagation an interaction (A Symposium on Methods of Solution), 1965
13. Б.В. Чириков. ДАН, 125, 1015, 1959