ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт· 86

В.Н.Байер,В.М.Катков

Радиационная поляризация электронов в неоднородном магнитном поле

НОВОСИБИРСК 1966

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрен процесс поляризации электронов вследствие излучения в произвольном неоднородном магнитном поле с помощью операторной формулировки квазиклассического приближения. Получено общее выражение для вероятности радиационного перехода с переворотом спина в произвольном магнитном поле. Показано, что радиационная поляризация, в принципе, может наблюдаться в современных ускорителях со встречными пучками.

При движении в магнитном поле электроны и позитроны могут поляризоваться вследствие излучения. Поляризация возникает потому, что вероятность радиационного перехода с переворотом спина зависит от ориентации начального спина. На существование эффекта радиационной поляризации в однородном магнитном поле впервые указали Соколов, Тернов и сотрудники [1,2]. Радиационная поляризация рассматривалась также в работе авторов [3], где был сформулирован подход, существенно учитывающий квазиклассический характер движения электронов большой энергии в магнитном поле, позволяющий, в принципе, рассмотреть радиационную поляризацию в неоднородном магнитном поле.

В данной работе, в развитие подхода статьи [3], мы использовали операторную формулировку квазиклассического приближения, которая оказалась весьма адекватной нашей задаче и позволяет найти вероятность радиационного перехода с переворотом спина в произвольном электромагнитном поле.[x)]

Следует заметить, что характерное время радиационной поляризации одного порядка с временем работы ускорителей со встречными пучками, поэтому вопрос о радиационной поляризации в неоднородном поле имеет большой практический интерес.

Движение электрона высокой энергии в магнитном поле можно рассматривать квазиклассически, если энергия излучаемых фотонов $\hbar\omega$ много меньше энергии электрона E .

$$\hbar\omega \ll E \; ; \qquad \omega \sim \omega_0 \gamma^3 \tag{I}$$

где

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \; ; \quad \omega_0 = \frac{v_t}{R} \; ; \; R = \frac{c P_t}{eH} \tag{2}$$

R - мгновенный радиус кривизны, H - магнитное поле. В этом случае можно описывать движение электрона с помощью классических характеристик. Поскольку во всех существующих установках неравенство (I) выполняется с большим запасом, мы ограничимся рассмотрением этого случая.

---

x) Подобная методика применялась Швингером [4] для нахождения квантовых поправок к интенсивности излучения электронов в магнитном поле.

Выражение для вероятности радиационного перехода запишем в виде[x]:

$$d w = \frac{\alpha}{(2\pi)^2}\,\frac{d^3 k}{\omega}\,\langle i|\int dt_1 \int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)} M(t_1) M^*(t_2)|i\rangle \qquad (3)$$

где

$$M(t) = u^+(\vec{\xi}_f)(\vec{\alpha}\vec{e})\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}\,u(\vec{\xi}_i) \qquad (4)$$

$u(\vec{\xi})$ – решение уравнения Дирака в операторной форме в произвольном электромагнитном поле, $\vec{\xi}_i$, $\vec{\xi}_f$ – начальное и конечное спиновые состояния.

Для описания спиновых состояний мы будем пользоваться двухкомпонентными спинорами φ_i, φ_f. Поскольку нас интересуют переходы с переворотом спина, оказывается удобным представить

$$\varphi_f = e^{i\vec{\sigma}\vec{a}\frac{\pi}{2}}\varphi_i = i(\vec{\sigma}\vec{a})\varphi_i \qquad (5)$$

где $\vec{a}$ – единичный вектор, перпендикулярный направлению оси квантования спина $\vec{\xi}$.

Выполняя необходимые коммутации легко получить следующее выражение для матричного элемента радиационного перехода с переворотом спина

$$M(t) = \frac{\hbar}{2(E+m)}\,e^{-i\vec{k}\vec{r}}\left(\vec{b}\cdot[\vec{q}\vec{e}]\right) \qquad (6)$$

где

$$\vec{b} = \vec{a} + i[\vec{\xi}\vec{a}]\ ; \quad \vec{q} = \frac{\vec{P}\omega}{E+m} - \vec{k} \qquad (7)$$

Видно, что выражение (6) для матричного элемента пропорционально $\hbar$, поэтому некоммутацией входящих операторов можно пренебречь, поскольку учет ее дает поправки высшего порядка по $\hbar$, которые нас не интересуют.

В интеграле (3) основной вклад дает область $\omega_0\tau = \omega_0(t_1-t_2)\sim\frac{1}{\gamma}$, поэтому мы будем разлагать все входящие величины по степеням $\omega_0\tau$, что соответствует разложению по $\frac{1}{\gamma}$, и оставлять только старшие члены разложения. Кроме того, как это обычно делается при рассмотрении классического излучения, мы будем пренебрегать величинами

$$|\dot{\vec{H}}|\tau / |\vec{H}| \ll 1. \qquad (8)$$

---

x) В дальнейшем c = I.

где $|\dot{\vec{H}}|$ характеризует изменение магнитного поля на траектории. Если поле описывать через показатель неоднородности n, то условие (8) имеет вид $n/\gamma \ll 1$.

Нас интересует полная вероятность радиационного перехода с переворотом спина, поэтому мы просуммируем по поляризациям фотона и проинтегрируем по его импульсу. Последнее оказывается удобным выполнить до интегрирования по τ; воспользовавшись формулой

$$\int e^{-i(ky)} f(k_\mu)\frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\ \dots \qquad (9)$$
$$y^2 = y_0^2 - \vec{y}^{\,2}$$

После этого интегрирование по τ сводится к взятию простых контурных интегралов. В итоге получаем следующую формулу для полной вероятности радиационного перехода с переворотом спина в единицу времени

$$\frac{dw^{\mp}}{dt} = W^{\mp} = \frac{5\sqrt{3}}{16}\,\alpha\,\frac{\hbar^2}{m^2}\,\gamma^5|\dot{\vec{v}}|^3\left\{1 - \frac{2}{9}(\vec{\xi}\vec{v})^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15|\dot{\vec{v}}|}\left(\vec{\xi}[\dot{\vec{v}}\vec{v}]\right)\right\} \qquad (10)$$

В однородном магнитном поле выражение (10) переходит в известную вероятность радиационного перехода с переворотом спина для случаев поперечной поляризации $(\vec{\xi}\vec{v}) = 0$ и продольной поляризации $(\vec{\xi}\vec{v}) = 1$ для электронов $e<0$ и позитронов $e>0$ [2]. В неоднородном магнитном поле сохраняется вывод, что для продольной поляризации $(\vec{\xi}\vec{v}) = 1$ вероятность радиационного перехода с переворотом спина не зависит от ориентации спина, в то время как для поперечной поляризации такая зависимость, вообще говоря, имеет место.

Выражение (10) содержит величины, зависящие от времени. Нас же, естественно, интересует среднее по времени. Для общего анализа радиационной поляризации в конкретных условиях необходимо решить классические уравнения движения частицы и вектора спина [5], подставить их в (10) и провести усреднение по времени. В случае аксиально симметричного слабо-фокусирующего неоднородного магнитного поля среднее по времени выражение для вероятности радиационного перехода с переворотом спина с точностью до поправочных членов $a^2/\bar{R}^2$ (a – амплитуда поперечных колебаний, $\bar{R}$ – средний радиус кривизны орбиты) имеет такой же вид, как в однородном магнитном поле (в качестве радиуса входит $\bar{R}$). Величины $a^2/\bar{R}^2$ весьма малы (10^{-3} – 10^{-4}) для всех современных установок.

Таким образом эффект радиационной поляризации, вообще говоря, имеет место и в неоднородном магнитном поле и, следовательно, может наблюдаться в современных накопителях, если устранить влияние деполяризующих факторов [6].

RADIATIONAL POLARIZATION OF ELECTRONS IN AN INHOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

V.N.BAIER,V.M.KATKOV

A B S T R A C T

The process of electron polarization due to radiation in an arbitrary inhomogeneous magnetic field is considered. by the method of operator formuliration of WKB-approximation.General expression for probability of radiation spin--flip transition in arbitrary magnetic field is found.It is shown,that the radiational polarization may be observed in modern colliding beams accelerators.

Electrons and positrons when moving in magnetic field can be polarized due to radiation. The polarization arises due to the fact that the probability of radiational spin-flip transition depends upon orientation of initial spin. The existence of the effect of radiational polarization in the homogeneous magnetic field was first pointed out by Sokolov, Ternov and coworkers in [1,2]. Radiational polarization was also considered in the paper [3] where the authors of this paper formulated an approach which essentially takes into account the quasiclassical character of motion of high energy electrons in the magnetic field which allows one, in principle, to consider the radiational polarization in the inhomogeneous magnetic field.

In the present paper an operator formulation of the quasiclassical approximation x) has been used in the development of the approach of the paper [3], which turned out to be adequate

---

x) Similar methods were applied by Schwinger [4] for finding the quantized corrections for the intensity of electron radiation in the magnetic field.

with our problem and allows one to find the probability of spin-flip radiational transition in an arbitrary electromagnetic field.

It should be noted that the characteristic time of radiational polarization is of the same order as the time of operation of colliding beams accelerators, therefore the problem of radiational polarization in the inhomogeneous magnetic field, is of great practical importance.

The motion of high energy electron in magnetic field may be regarded quasiclassical if the energy of radiated photons is much less than electron energy

$$\hbar\omega \ll E \,, \quad \omega \sim \omega_0 \gamma^3 \tag{1}$$

where

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \,, \quad \omega_0 = \frac{v_t}{R} \,, \quad R = \frac{cP_t}{eH} \tag{2}$$

R — instantaneous radius of curvature, H — magnetic field. In this case one can describe electron motion by means of classical characteristics. Since in all the existing machines the value $\frac{\hbar\omega}{E}$ is extremely small, we shall restrict ourselves to consideration of this case.

The expression for the probability of radiational transition will be written down in the form:[x)]

$$dw = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \langle i | \int dt_1 \int dt_2 \, e^{i\omega(t_1-t_2)} M(t_1) M^*(t_2) | i \rangle \tag{3}$$

$$M(t) = u^+(\vec{\xi}_f)(\vec{\alpha}\vec{e}) e^{-i\vec{k}\vec{z}} u(\vec{\xi}_i) \tag{4}$$

---

x) For the further $c=1$.

$u(\vec{\xi}_f), u(\vec{\xi}_i)$ are the solutions of the Dirac equation in arbitrary electromagnetic field in operator form; $\vec{\xi}_i$, $\vec{\xi}_f$ the initial and finite spin states.

For the description of spin states we shall make use of two component spinors φ_i, φ_f. Since we are interested in the spin-flip transitions it will be convenient to express

$$\varphi_f = e^{i\vec{\sigma}\vec{a}\frac{\pi}{2}} \varphi_i = i(\vec{\sigma}\vec{a})\varphi_i \tag{5}$$

where $\vec{a}$ is the unit vector, ortogonal to the direction of the axis of the quantization of the spin $\vec{\xi}$.

By fulfilling the required commutations, one can easily obtain the following expression for the matrix element of the spin-flip radiational transition (s.f.t.)

$$M(t) = \frac{\hbar}{2(E+m)} e^{-i\vec{k}\vec{z}} (\vec{b}[\vec{q}\vec{e}]) \tag{6}$$

where

$$\vec{b} = \vec{a} + i[\vec{\xi}\vec{a}] \,, \quad \vec{q} = \frac{\vec{\mathcal{P}}\omega}{E+m} - \vec{k} \tag{7}$$

It is evident that the expression (6) for the matrix element is proportional to $\hbar$, therefore one can ignore the non-commutation of the operators involved since i ; taking into account gives corrections of highest order with respect to $\hbar$, which are not interesting to us.

In the integral (3) the main contribution is given by the region $\omega_0\tau = \omega_0(t_1-t_2) \sim \frac{1}{\gamma}$, therefore we shall expand all the incoming values in powers $\omega_0\tau$, which correspond to expansion in $1/\gamma$ and leave only the expansion terms of highest order of magnitude. Moreover, as it is usually accepted in considering the classical radiation, we shall ignore the terms

$$|\dot{\vec{H}}|\tau / |\vec{H}| \ll 1 \qquad (8)$$

where $|\dot{\vec{H}}|$ characterizes the change of magnetic field on the trajectory. If the field will be described by the index of inhomogenity "n", then the condition (8) has the form $n/\gamma \ll 1$.

We are interested in the total probability of s.f.t., therefore we shall sum over photon polarization and integrate over its momentum.The later turns to be convenient to perform up to the integration over τ with the aid of the relation

$$\int e^{-i(ky)} f(k_\mu) \frac{d^3k}{\omega} = -f(i\partial_\mu)\frac{4\pi}{y^2 - i\varepsilon}\;;\; y^2 = y_0^2 - \vec{y}^{\,2} \qquad (9)$$

After this procedure the integration over τ is reduced to taking of simple contour integrals. As a result we obtain the following formula for the total probability of s.f.t. per unit time

$$\frac{dw^{\xi}}{dt} \equiv W^{\xi} = \frac{5\sqrt{3}}{16}\alpha\frac{\hbar^2}{m^2}\gamma^5|\dot{\vec{v}}|^3\left\{1 - \frac{2}{9}(\vec{\xi}\vec{v})^2 - \frac{8\sqrt{3}}{15|\dot{\vec{v}}|}\left(\vec{\xi}[\dot{\vec{v}}\vec{v}]\right)\right\} \qquad (10)$$

In the homogeneous magnetic field the expression (10) has been transformed to the known probability of the spin-flip radiational transition for the cases of transverse polarization $(\vec{\xi}\vec{v}) = 0$ and longitudinal polarization $(\vec{\xi}\vec{v}) = 1$ for electrons $e < 0$ and positrons $e > 0$ [2].In the ingomogeneous magnetic field it remains that for longitudinal polarization the probability of the s.f.t. does not depend upon spin orientation,while for transverse polarization such dependence generally takes place.

The expression (10) contains values which depend upon time. We are naturally interested in the mean values over time. For general analysis of radiational polarization under specific conditions , it is necessary to solve the classical equations of motion of particle and spin vector [5] to substitute them in (10) and to carry out averaging over time. In the case of axial-symmetric weak-focussing ingomogeneous magnetic field, the average expression over time for the probability of the s.f.t. with the accuracy up to correction terms $\sim \frac{a^2}{\bar{R}^2}$ (a is the amplitude of transverse oscillations, $\bar{R}$ mean radius of orbit curvature) has the same form as in the homogeneous magnetic field ($\bar{R}$ enters as a radius) . The quantities $a^2/\bar{R}^2$ are extremely small (10^{-3} - 10^{-4}) for all modern machines.

In this way, the effect of radiational polarization, generally speaking, also takes place in the inhomogeneous magnetic field and, consequently, may be observed in the modern storage rings, if the effects of depolarizing factors were eliminated [6] .

ЛИТЕРАТУРА

I. А.А.Соколов, И.М.Тернов, ДАН СССР 153, 1052, 1963.

2. И.М.Тернов, В.Г.Багров, Р.Я.Рзаев. Вестник МГУ серия Ш, № 4, 1964.

3. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЯФ, 3, 81, 1966.

4. J.Schwinger.Proc.Nat.Acad.Sci.40,132,1954.

5. D.Fradkin,R.Good.Rev.Mod.Phys.33,343,1961.

6. В.Н.Байер, Ю.Ф.Орлов. ДАН СССР 165, 783, 1965.