

Д. 45

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт . 66

Н.С. Диканский, М.М. Карлинер, А.Н. Скринский,
В.Е. Шапиро, И.А. Шехтман

**Взаимодействие когерентных бетатронных
колебаний с внешними системами**

НОВОСИБИРСК 1966

+

АННОТАЦИИ

Обнаруженное в накопителе ВЭП-2 ускоренное затухание бетатронных колебаний не может быть объяснено конечной проводимостью стенок камеры. В связи с этим было рассмотрено взаимодействие сгустка с различного рода паразитными диссипативными системами.

Показано, что при заданной частоте бетатронных колебаний возможно как ускоренное затухание, так и самовозбуждение когерентных колебаний в зависимости от сопротивлений взаимодействующего элемента для комбинационных частот. Найденные декременты и инкременты могут значительно превышать величины, обусловленные конечной проводимостью стенок камеры.

В электрон-позитронном накопителе ВЭП-2 Института ядерной физики (Новосибирск) было обнаружено, что когерентные вертикальные бетатронные колебания после удара инфлектором быстро затухают с декрементом, пропорциональным току пучка. Это затухание не может быть объяснено эффектом конечной проводимости стенок камеры, т.к. в / I / показано, что при $0,5 < \nu < 1$ потери в стенках могут привести только к раскачке колебаний.

Кроме того, при определенных условиях в накопителе ВЭП-2 наблюдалась неустойчивость радиальных и вертикальных бетатронных колебаний с инкрементами, значительно превышающими инкременты за счет конечной проводимости стенок.

Эти факты указывали на то, что кроме чисто стеночных эффектов имеются другие, более сильные, способные вызвать как раскачку, так и ускоренное затухание.

В связи с этим было рассмотрено взаимодействие сгустка с другими элементами вакуумной камеры накопителя.

На рис. I изображен отрезок камеры с резонансной полостью, которая вблизи камеры имеет форму радиальной линии с осью, совпадающей с осью камеры. Такую форму стенок имеет ускоряющий резонатор. Взаимодействие с бетатронными колебаниями будет эффективным, если напряженность продольного электрического поля какой-нибудь паразитной резонансной моды вблизи орбиты быстро изменяется в одном из направлений, перпендикулярных оси камеры (в данном случае - в направлении оси η), т.е. в линейном приближении

$$E_{\eta} = E_{\eta}(0) + E'_{\eta}(0)\eta. \quad (1)$$

Величина $E_{\theta}(0)$ не играет роли в дальнейшем, поэтому положим

$$E_{\theta} = E'_{\theta}(0) y. \quad (2)$$

Из уравнений Максвелла следует, что в этом случае на оси камеры имеется также магнитное поле, перпендикулярное плоскости чертежа рис. 1

$$H = \frac{E'_{\theta}(0)}{f \omega_m}. \quad (3)$$

Такая конфигурация полей вблизи орбиты имеет место, например, для антисимметричных резонансных мод E_{1n0} в радиальной линии.

Предположим, что вдоль оси камеры движется сгусток, длина которого мала по сравнению с резонансной длиной волны полости. Ток пучка может быть представлен в виде ряда Фурье

$$I_n = I_0 \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k \omega_s t, \quad (4)$$

где ω_s - частота обращения частицы. При движении сгустка в резонаторе наводится ток

$$I_{нов} = I_n \frac{y}{a}, \quad (5)$$

где y - отклонение сгустка от оси камеры, a - полуширина камеры (см. рис. 1). Предположим, что сгусток совершает бетатронные колебания

$$y = A \sin \nu \omega_s t, \quad (6)$$

причем $\nu < 1$.

Тогда наведенный ток будет равен

$$I_{нов} = I_0 \frac{A}{a} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k \omega_s t \cdot \sin \nu \omega_s t = I_0 \frac{A}{a} \left\{ \sin \nu \omega_s t + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k [\sin(k+\nu) \omega_s t - \sin(k-\nu) \omega_s t] \right\}. \quad (7)$$

Наведенный ток создает между точками АВ (см. рис. 1) резонатора напряжение

$$U_{нов} = I_0 \frac{A}{a} \left\{ z_{\nu} \sin(\nu \omega_s t + \psi_{\nu}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k [z_{k+\nu} \sin[(k+\nu) \omega_s t + \psi_{k+\nu}] - z_{k-\nu} \sin[(k-\nu) \omega_s t + \psi_{k-\nu}]] \right\}. \quad (8)$$

где $z_{\nu} e^{j\psi_{\nu}}, z_{k\pm\nu} e^{j\psi_{k\pm\nu}}$ - импедансы резонансной полости для частот $\nu \omega_s, (k\pm\nu) \omega_s$, отнесенные к зажимам АВ.

Учитывая, что $E'_{\theta}(0) = \frac{U_{нов}}{h \cdot a}$ и пользуясь соотношением (3), можно найти магнитное поле H в камере:

$$H = \frac{I_0 A}{h a^2 \omega_s m_0} \left\{ \frac{z_{\nu}}{\nu} \cos(\nu \omega_s t + \psi_{\nu}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[\frac{z_{k-\nu}}{k-\nu} \cos[(k-\nu) \omega_s t + \psi_{k-\nu}] - \frac{z_{k+\nu}}{k+\nu} \cos[(k+\nu) \omega_s t + \psi_{k+\nu}] \right] \right\}. \quad (9)$$

Поле в момент прихода сгустка в зазор резонатора получается, если в (9) заменить $k \omega_s t$ на $2\pi n$. Сила, действующая на положительно заряженную частицу, равна

$$F = e c m_0 H = \frac{I_0 e c A}{h a^2 \omega_s} \left\{ \cos \nu \omega_s t \left[-\frac{R_{\nu}}{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{R_{k-\nu}}{k-\nu} - \frac{R_{k+\nu}}{k+\nu} \right) \right] + \sin \nu \omega_s t \left[\frac{X_{\nu}}{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{X_{k-\nu}}{k-\nu} + \frac{X_{k+\nu}}{k+\nu} \right) \right] \right\}, \quad (10)$$

где $R_{\nu} = z_{\nu} \cos \psi_{\nu}$, $R_{k\pm\nu} = z_{k\pm\nu} \cos \psi_{k\pm\nu}$ - активные составляющие импеданса резонансной полости, $X_{\nu} = z_{\nu} \sin \psi_{\nu}$,

$X_{k\pm\nu} = z_{k\pm\nu} \sin \psi_{k\pm\nu}$ - реактивные составляющие. Средняя мощность, получаемая частицей под действием силы F .

$$P = \overline{F \dot{y}} \cdot \frac{h}{L}. \quad (11)$$

где L - полная длина орбиты. Инкремент нарастания колебаний равен

$$\delta = \frac{P}{2W}. \quad (12)$$

где $W = \frac{\gamma m_0 \dot{y}^2}{2}$ - энергия колебаний, m_0 - масса покоя частицы.

Используя соотношения (6), (10), (11) и (12), для инкремента получаем следующее выражение

$$\delta = \frac{I_0}{4\pi \nu \omega_s} \cdot \frac{e}{\gamma m_0} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot \left[-\frac{R_{\nu}}{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(\frac{R_{k-\nu}}{k-\nu} - \frac{R_{k+\nu}}{k+\nu} \right) \right]. \quad (13)$$

Если одна из частот ω_s или $(k\pm\nu) \omega_s$ близка к резонансу, так что можно пренебречь остальными, то инкремент отрицателен, т.е. имеет место затухание. При резонансе на одной из частот

$(k-v)\omega_s$, наоборот, $\delta > 0$, что соответствует неустойчивости.

Другой вариант взаимодействия иллюстрируется рис. 2. В камере накопителя помещаются две параллельные пластины, между которыми пролетает сгусток. Пластины соединены между собой сопротивлением Z . Похожая задача ранее решалась Б.В. Чириковым / 2 /, но его результат отличается от полученного в данной работе.

Пролетая между пластинами, сгусток наводит ток. Благодаря падению напряжения, на сопротивлении Z между пластинами образуется электрическое поле, действующее на сгусток. Предположим, что размеры пластин малы по сравнению с длинами волн, возбуждаемыми в системе сгустком, так что задачу можно решать в квазистационарном приближении. В этом приближении справедлива теорема Рамо:

$$L_{нов} = qv\vec{E}^{(i)} = q[cE_x^{(i)} + \dot{y}E_y^{(i)}], \quad (I4)$$

где q - заряд сгустка, $\vec{E}^{(i)}$ - напряженность электрического поля в точке, где находится заряд, при разности потенциалов между пластинами Iv . Поперечная составляющая поля может быть записана в виде

$$E_y^{(i)} = -\frac{1}{h}f(\theta), \quad (I5)$$

где $f(\theta)$ - периодическая функция с периодом 2π . С помощью уравнений Максвелла можно найти, что

$$E_x^{(i)} = -\frac{2\pi}{L} \cdot \frac{y}{h} f'(\theta), \quad (I6)$$

где L - длина орбиты.

Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их длиной, то с достаточной точностью

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\theta| < \alpha \\ 0, & \text{если } |\theta| > \alpha, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{\pi \ell}{L}$, ℓ - длина пластин. Функция $f(\theta)$ может быть

разложена в ряд Фурье

$$f(\theta) = \frac{\alpha}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k\pi} \cos k\theta. \quad (I7)$$

Полагая $y = A \sin v\omega_s t$ и, учитывая, что $\theta = \omega_s t$ и $q = \frac{2\pi}{\omega_s} I_0$, для наведенного тока получим следующее выражение:

$$I_{нов} = \frac{2\pi I_0 A}{h} \left\{ -\frac{v\alpha}{\pi} \cos v\omega_s t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k\pi} [(k-v) \cos(k-v)\omega_s t - (k+v) \cos(k+v)\omega_s t] \right\}. \quad (I8)$$

Разность потенциалов между пластинами будет равна (с учетом направления тока)

$$U = -\frac{2\pi I_0 A}{h} \left\{ -\frac{v\alpha}{\pi} z_v \cos(v\omega_s t + \psi_v) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k\pi} [z_{k-v} (k-v) \cdot \cos[(k-v)\omega_s t + \psi_{k-v}] - z_{k+v} (k+v) \cos[(k+v)\omega_s t + \psi_{k+v}]] \right\}. \quad (I9)$$

Сила, действующая на частицу в сгустке, равна

$$F = -e \frac{U}{h} f(\theta) = -e \frac{U}{h} f(\omega_s t). \quad (20)$$

Подставляя в (20) величину U из (I9) и, оставляя только составляющие с частотой $v\omega_s$, получим

$$F = \frac{2\pi I_0 A e}{h} \left\{ -\frac{v\alpha^2}{\pi} z_v \cos(v\omega_s t + \psi_v) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2 \pi^2} \cdot [-(k-v)z_{k-v} \cos(v\omega_s t - \psi_{k-v}) - (k+v)z_{k+v} \cos(v\omega_s t + \psi_{k+v}]] \right\}. \quad (21)$$

С помощью соотношений (II), (I2) и (21) найдем инкремент

$$\delta = \frac{\pi I_0}{\omega_s} \cdot \frac{e}{\gamma m_0} \cdot \frac{1}{h^2} \left\{ -\frac{\alpha^2}{\pi^2} R_v + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2 \pi^2} [(k-v)R_{k-v} - (k+v)R_{k+v}] \right\}. \quad (22)$$

Пусть, например $R_v = R_{k+v} = R$.

$$\text{Тогда } \delta = \frac{\pi I_0}{\omega_s} \cdot \frac{e}{\gamma m_0} \cdot \frac{R}{h^2} \left(-\frac{\alpha^2}{\pi^2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2 \pi^2} \right) = \frac{\pi I_0}{\omega_s} \cdot \frac{e}{\gamma m_0} \cdot \frac{R}{h^2} \cdot \frac{\alpha}{\pi} = -\frac{\pi I_0}{\omega_s} \cdot \frac{e}{\gamma m_0} \cdot \frac{R}{h^2} \cdot \frac{\ell}{L}, \quad (23)$$

т.е. наличие пластин приводит к затуханию когерентных колебаний.

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда пластины нагружены на параллельно соединенные емкость и сопротивление. Тогда приближенно

$$R_{k \pm \nu} \approx \frac{1}{(k \pm \nu)^2 \omega_s^2 C^2 R} \quad (24)$$

Подставляя в (22), получим

$$\delta = \frac{\pi I_0 \cdot e}{\omega_s \gamma m_0 h^2} \cdot \frac{1}{\omega_s^2 C^2 R} \left[-\frac{\alpha^2}{\pi^2 \nu^2} + \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k \alpha}{k^2 \pi^2} \left(\frac{1}{k-\nu} - \frac{1}{k+\nu} \right) \right]. \quad (25)$$

Можно показать, что если $0,5 < \nu < 1$, инкремент оказывается положительным, т.е. возможна неустойчивость.

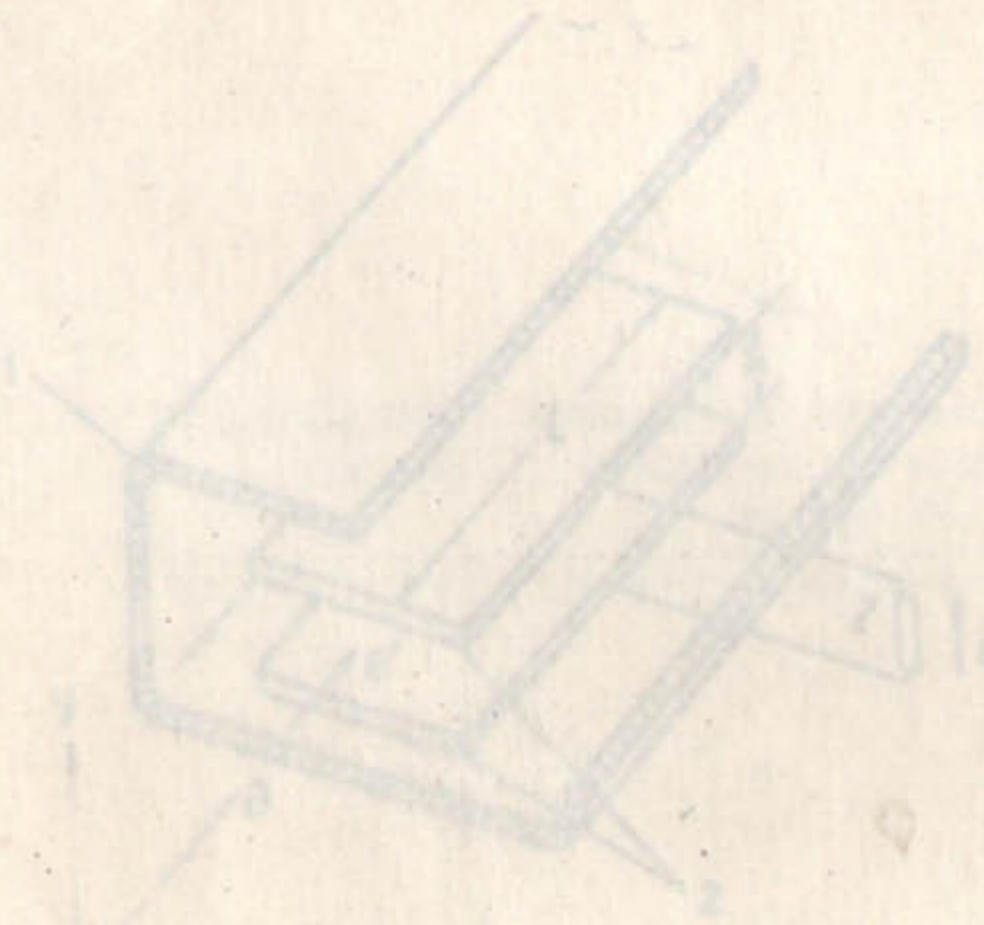
Особый интерес представляет случай, когда в камере расположены длинные пластины, на концах нагруженные на волновое сопротивление. Очевидно, что квазистационарное приближение в этом случае непригодно, т.к. вдоль пластин возбуждаются волны со скоростью, близкой к скорости движения ступки. Расчет удобно произвести в системе координат, движущейся в продольном направлении со скоростью, равной скорости ступки. В результате получается следующее выражение для инкремента

$$\delta = -\frac{\pi I_0 \cdot e}{2 \omega_s \gamma m_0 h^2 L} \cdot Z_0, \quad (26)$$

где Z_0 - волновое сопротивление линии, состоящей из двух пластин в металлической камере. В этом случае колебания затухают с декрементом, пропорциональным току.

Расчеты, выполненные в данной работе, несмотря на их недостаточную строгость, показывают, что когерентные эффекты - неустойчивость и быстрое затухание - могут иметь причиной не только потери в стенках, но и взаимодействие с другими диссипативными элементами камеры. Оценка инкрементов с учетом такого взаимодействия для накопителя ВЭИИ-2 показала, что они значительно больше станочных инкрементов.

Следует отметить, что обнаруженные эффекты могут быть использованы для подавления когерентных неустойчивостей. Наибольшие перспективы в этом отношении, по-видимому, имеет применение пластин, нагруженных на волновое сопротивление.



ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1 Резонансная полость

Рис. 2 Пластины в камере накопителя
1 - камера, 2 - пластины

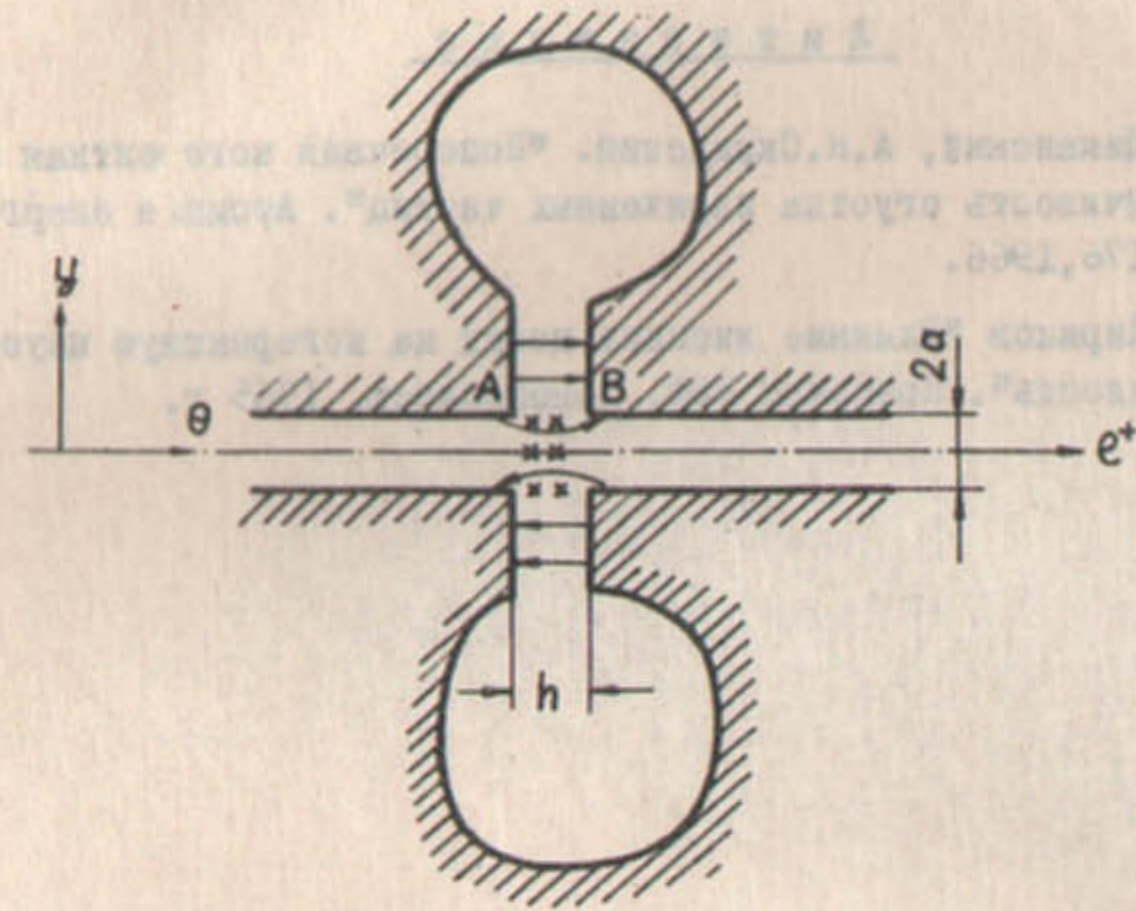


Рис. 1.

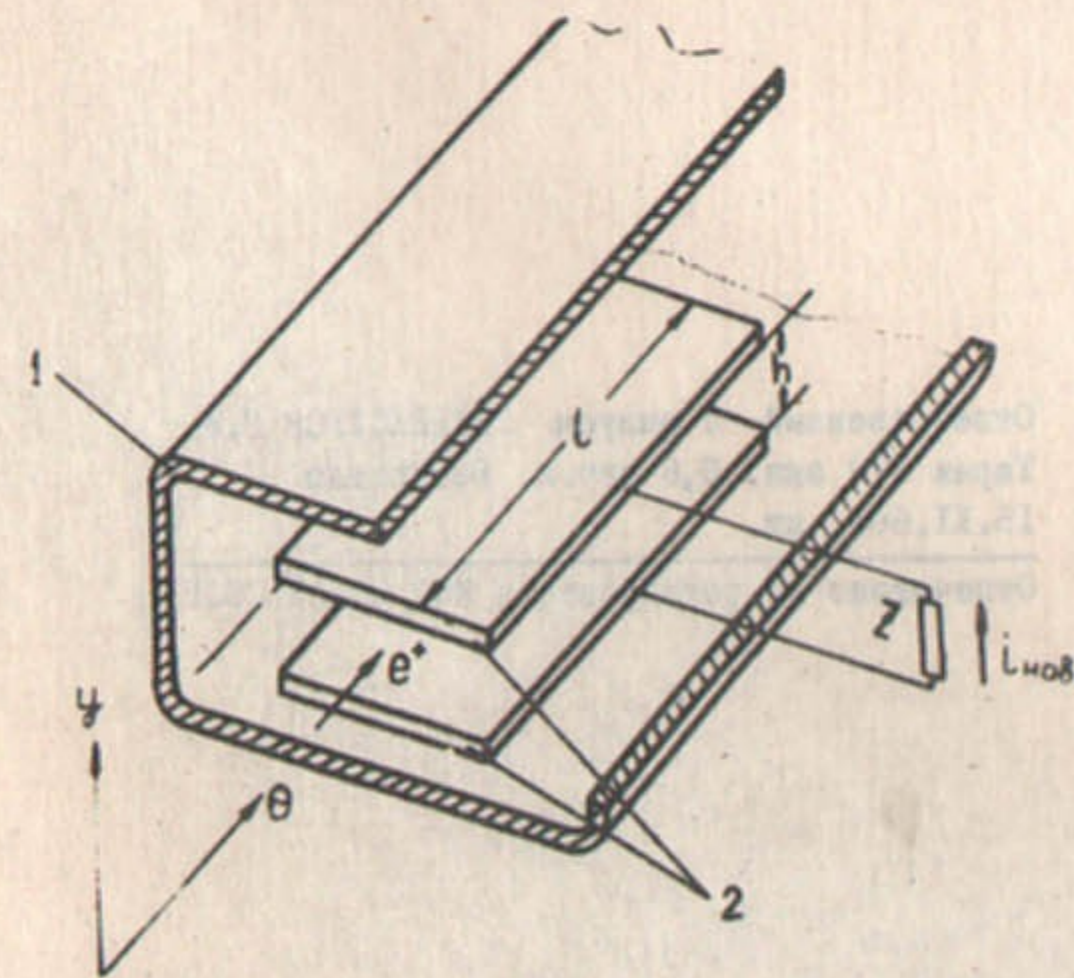


Рис. 2.

Л и т е р а т у р а

1. Н.С.Диканский, А.Н.Скринский. "Поперечная когерентная неустойчивость сгустка заряженных частиц". Атомная энергия 21, 176, 1966.
2. Б.В.Чириков "Влияние внешних цепей на когерентную неустойчивость". Препринт ИЯФ, Новосибирск, 1965 г.

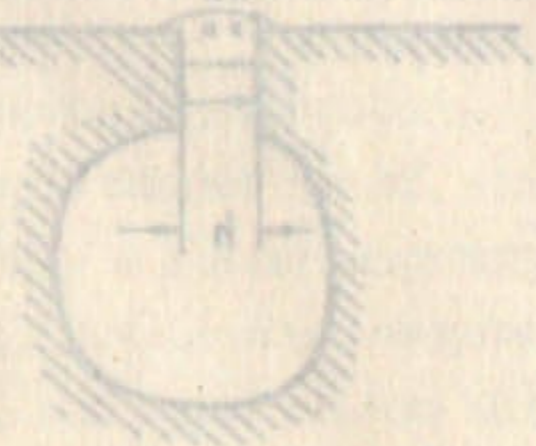
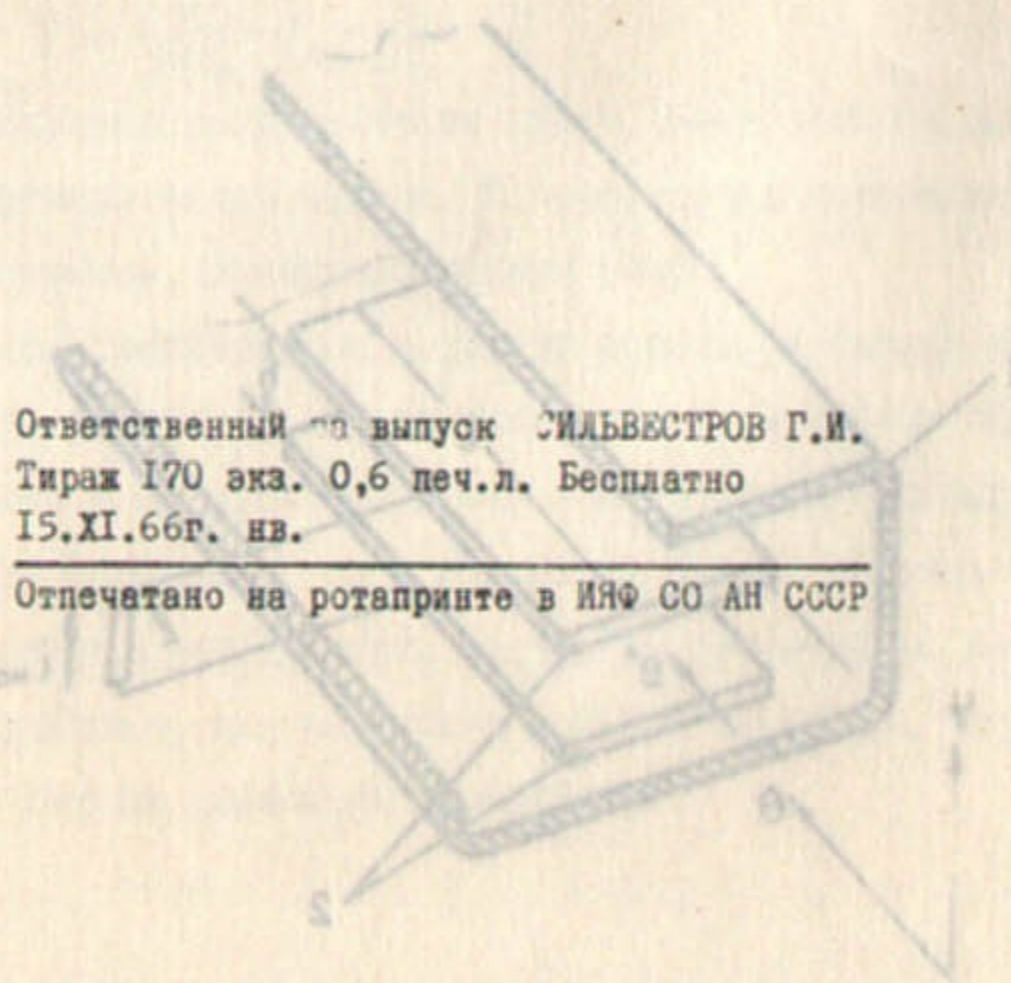


Рис. 1.



Ответственный за выпуск СИЛЬВЕСТРОВ Г.И.
Тираж 170 экз. 0,6 печ.л. Бесплатно
15.XI.66г. нв.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР

Рис. 2.