

С.С.Моисеев

**Применение асимптотических методов в
теории устойчивости и трансформации
волн в плазме**

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Физически очевидно, что если в некоторой окрестности неоднородной среды длины волн, соответствующие различным типам нормальных колебаний, становятся близкими друг к другу, то следует ожидать интенсивного "взаимодействия" между этими нормальными колебаниями. При этом важным является вопрос о степени трансформации энергии падающей волны в движущуюся волну другого типа.

В задачах устойчивости эквивалентным является вопрос о том насколько сильно меняется дисперсионное уравнение для частот собственных колебаний при учете таких резонансных областей. В /1/, в частности, было показано, что в резонансных областях возможна аномальная трансформация - волна одного типа фактически полностью переходит в волну другого типа (см. также /2/). В /3/ на других физических примерах был обнаружен аналогичный эффект. По-видимому, явление аномальной трансформации может иметь различные физические применения. Так преобразование энергии электромагнитных волн в продольные плазменные колебания (ионные или электронные) может служить одним из способов нагрева плазмы. Подчеркнем, что само явление указанной трансформации характерно для устойчивой ламинарной плазмы (хотя можно ожидать, что в турбулентной среде это явление будет только усилено и должно также приводить к добавочной хаотизации частиц); при прочих равных условиях нагрев с помощью трансформации волн является более "спокойным" методом нагрева, чем нагрев с использованием неустойчивости плазмы.

Далее аномальная трансформация может быть использована для создания плазменных источников интенсивного электромагнитного излучения, либо же для улучшения связи между различными объектами. Последнее обстоятельство связано с тем, что волны различного типа при изменении свойств среды затухают по-разному. Поэтому на каких-то участках пути более выгодной может оказаться трансформация испущенных источником волн в слабозатухающие волны другого типа. Наконец указанный эффект может быть ис-

пользован для стабилизации неустойчивостей (по этому поводу см. § 4).

Разумеется, каждый из указанных вопросов требует специального рассмотрения, что выходит за рамки данной работы.

Настоящая работа является расширенным вариантом /1/. В ней также рассматриваются некоторые вопросы, изложенные в /2/ и /4/.

В § 2 исследуются асимптотические свойства дифференциального уравнения четвертого порядка, к которому в конкретных случаях часто сводится физическая задача трансформации волн или устойчивости. В § 3 теория применяется к некоторым задачам устойчивости, а в § 4 обсуждаются различные случаи аномальной трансформации волн.

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В настоящий момент достаточно хорошо изучен характер неустойчивостей неоднородной плазмы, развивающихся на различного типа колебаниях. Поскольку весьма обычна ситуация, когда свойства среды меняются медленно на расстояниях порядка длины волны, то оправдано приближение геометрической оптики. Если имеется неоднородность вдоль x , то возмущения выбираются в виде $\sim f(x) \cdot \exp(i\omega t + i\kappa_y y + i\kappa_z z)$. Тогда для f в общем случае получается уравнение:

$$\sum_{i=0}^n \beta^i u_{i+1}(x) f^{(2i)} = 0 \quad (1)$$

где β — малый параметр, характеризующий слабую неоднородность среды, $u_{i+1}(x) \sim 1$ (за исключением окрестностей точек, где $u_{i+1}(x)$, может обращаться в нуль).

В уравнении (1,1) опущены нечетные производные, поскольку в приложениях они обычно содержат еще производные от коэффициентов $u_{i+1}(x)$, дающие лишнюю степень малого пара-

метра и поэтому не влияющие на результаты в нулевом приближении. Решение (1,1) ищем в форме:

$$f_i \sim \frac{1}{\Pi} \exp\left(\pm \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int \kappa_i(x) dx\right) \quad (2)$$

где Π — предэкспоненциальный множитель.

Приближение геометрической оптики нарушается, однако, вблизи точек, где волновой вектор $\kappa_i(x)$ либо обращается в нуль ("точки поворота"), либо волновые вектора, соответствующие различным типам колебаний, совпадают ("точки пересечения решений"). Влияние особенностей второго типа на характер устойчивости плазмы до сих пор уделялось мало внимания. Кроме того, рассмотренные до сих пор случаи "рождения" новой волны при прохождении таких особенностей падающей волной приводили к экспоненциально малому коэффициенту трансформации, а также к отсутствию отраженных волн (см., например, /5/).

Выясним уже здесь в чем было связано последнее обстоятельство, что также поможет понять отличия в результатах при "пересечении" мод. Представим κ_i в виде:

$$\kappa_i = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2} \quad (3)$$

Здесь $\kappa_1(x)$, $\kappa_2(x)$ — волновые вектора, совпадающие в некоторой точке комплексной x — плоскости.

Из (1,3) видно, что если в окрестности "точек пересечения решений" многозначным будет выражение $\kappa_1 - \kappa_2$, то возможно только появление волн с другими дисперсионными свойствами ($\kappa_1 \neq \kappa_2$). Если же $\kappa_1 + \kappa_2$ также является неоднозначной функцией, то возможен, например, переход $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$, что соответствует появлению отраженных волн при прохождении волной точек "пересечения" решений.

В дальнейшем для конкретности ограничимся дифференциальным уравнением четвертого порядка и исследуем поведение решений, когда коэффициент при второй производной $u_2(x)$ обращается в нуль в некоторой точке комплексной x — плоско-

сти. Рассмотрим уравнение

$$\alpha \beta^2 f^{IV} - \beta U_2(x) f'' + U_1(x) f = 0 \quad (4)$$

с двумя малыми параметрами (дополнительный малый параметр α связан с конкретной физической ситуацией и характеризует, например, малую вязкость, малое сопротивление среды и т.д.)^{*}. Воспользуемся для (4) следующим представлением:

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}} \pm \sqrt{\frac{U_2}{2\alpha} - \sqrt{\frac{U_1}{\alpha}}} \right) \quad (5)$$

Записав $U_2 = Ux$, $U_1 = U_0$ (вблизи точки, где $U_2 = 0$), видим из (5), что многозначной функцией является не только $K_1 - K_2$, но также и $K_1 + K_2$.

В [6] дифференциальное уравнение (4) исследовалось для случая, когда между точками "пересечения" решений $X = \pm \sqrt{2} \frac{U_0}{U}$ укладывалось много длин волн "пересекающихся" решений, что давало возможность воспользоваться методом фазовых интегралов при обходе каждой особенности в отдельности (нетрудно видеть, что это соответствует случаю, когда $\frac{\alpha}{\beta^2} \gg 1$). Используем теперь метод Лапласа в сочетании с аналитическими свойствами решений, чтобы с единой точки зрения провести исследование задачи при любых значениях $\frac{\alpha}{\beta^2} / 4$. При этом, как видно будет из дальнейшего, решения обладают в известном смысле сходными асимптотическими свойствами как при малых, так и при больших значениях $\frac{\alpha}{\beta^2}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$f^{IV} + \lambda^2 (y f'' + u_0 f) = 0 \quad (x = \beta y) \quad (6)$$

* В частности α может равняться единице.

исследованное в /7/ при больших значениях параметра λ . Как показано в /6/ к подобному виду можно привести (4) вблизи точки $U_2 = 0$, причем $\lambda^2 = \frac{U_0}{\alpha}$. Используя метод Лапласа, запишем решения уравнения (6)

$$f(y) = \int_C t^{-2} \exp\left\{ty - \frac{u_0}{t} + \lambda^{-2} \frac{t^3}{3}\right\} dt \quad (7)$$

Выберем контура C , как и в /7/ (см. рис. I); концы контуров, уходящих в бесконечность, лежат в секторах t - плоскости, где $\operatorname{Re}(t^3) < 0$,. Тогда согласно теореме Коши имеем следующую связь между решениями:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= V \\ \tilde{u}_3 - \tilde{u}_2 &= A_1 \\ \tilde{u}_1 - \tilde{u}_3 &= A_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Выясним поведение на действительной оси y указанных решений при малых значениях параметра λ . Рассмотрим прежде всего решения A_k . Сделав замену $t = \lambda y^{1/2} \sigma$, имеем:

$$A_k = \frac{1}{\lambda y^{1/2}} \int \sigma^{-2} \exp\left\{\lambda y^{3/2} \left(\sigma + \frac{\sigma^3}{3}\right) - \frac{u_0}{\lambda y^{1/2} \sigma}\right\} d\sigma \quad (9)$$

Из (9) видим, что как и в случае $\lambda \gg 1$ можно пренебречь членом $\frac{u_0}{\lambda y^{1/2} \sigma}$ в показателе экспоненты (преимущественная роль члена $\lambda^{-2} \frac{t^3}{3}$ при малых λ ясна также из (7)). Тогда дальнейшие вычисления вполне подобны проведенным в /7/. Приведем здесь асимптотическое выражение A_3 для

больших $|\gamma|$ на вещественной оси:

$$A_3 = -\sqrt{\pi} \lambda^{-2/3} \left(\frac{3}{2}\zeta\right)^{-5/6} e^{\zeta} \quad \gamma < 0$$

$$A_3 = -\sqrt{\pi} \lambda^{-2/3} \left(\frac{3}{2}\zeta\right)^{-5/6} (e^{\zeta} + e^{-\zeta}) + V \quad \gamma > 0$$

$$\zeta = i \frac{2}{3} \lambda \gamma^{3/2} \quad (10)$$

Отметим, что метод фазовых интегралов, использованный в /6/ для малых λ , приводит к аналогичному результату. Рассмотрим теперь решение V . Вычисляя вычет при $\zeta = 0$, получим:

$$V = -2\pi i \left\{ \sqrt{\frac{\gamma}{u_0}} J_{-1}(2\sqrt{\gamma u_0}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{3m-1}(\gamma u_0)}{m! a^m} \right\} \quad (11)$$

где $a = 3\lambda^2 \frac{\gamma^{3/2}}{u_0^{3/2}}$, J_{-1}, J_{3m-1} — функции Бесселя соответствующего индекса.

Для достаточно больших значений γ , когда $a \gg 1$ в выражении (11) можно удержать только первое слагаемое, т.е. при таких γ (11) в случае малых λ совпадает с соответствующим выражением, полученным в /7/ при больших λ . Подобный же результат получается также для решений U_k . Мы видим, что наличие точки $U_2 = 0$ приводит к появлению ряда особенностей: многозначности $\kappa_+ \kappa_2$ и $\kappa_- \kappa_2$, подобно асимптотик для больших и малых λ при соответствующем изменении масштаба по γ и, наконец, как это следует, например, из (8), а также из дальнейшего рассмотрения к возможности появления новых волновых решений с коэффициентом порядка единицы. Заметим, что к уравнению типа (6) может быть, вообще говоря, приведена задача с числом малых параметров больше двух. Пусть мы, например, имеем уравнение

$$\alpha \beta^2 f^{IV} - U \gamma \beta f'' + U_1 f = 0 \quad (12)$$

6.

С тремя малыми параметрами α, β, γ ; сделав замену $x = \gamma \beta \gamma$, получим

$$\frac{d}{\beta^2 \gamma^4} f^{IV} - U \gamma f'' + U_1 f = 0 \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что в случае $\left(\frac{d}{\beta^2 \gamma^4}\right) \gg 1$ между точками кратных корней укладывается много длин волн и можно также воспользоваться методом фазовых интегралов для обхода каждой особенности в отдельности.

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ, СВОДЯЩИЕСЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Прежде чем переходить к конкретным приложениям теории, сделаем еще несколько замечаний. Во-первых, как следует из предыдущих рассуждений, нет необходимости исследовать размер "резонансной" области между точками "пересечения" решений, поскольку, при наличии точки $U_2 = 0$, спектр колебаний финитных решений от этого не зависит. Нужно только, чтобы ширина "резонансной" области была мала по сравнению с шириной "ямы", в которой локализовано финитное решение. Поскольку ширина "ямы" $\sim R$ (R — характерный размер неоднородности), а размер "резонансной" области $\sim R\sqrt{\alpha}$, то последнее фактически всегда выполняется.

Далее, так как коэффициент U_2 является в конкретных задачах, вообще говоря, функцией частоты, то важную роль играет расположение точек $U_2 = 0$ в комплексной ω -плоскости. Если точки $U_2 = 0$ расположены далеко от вещественной оси (это обычно бывает, если $\text{Re } \omega \sim \text{Im } \omega$), а на вещественной оси существуют финитные решения (4), соответствующие данной частоте, то на такие решения точки $U_2 = 0$ оказывают слабое влияние. Иначе говоря, рассматриваемая здесь теория применима, вообще говоря, к случаю

$$\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$$

7.

Отметим также, что особенности типа "пересечения" решений или "точек поворота" будут влиять на возмущения в виде пакета волн, если

$$\frac{d(\operatorname{Re} \omega)}{dk} \cdot \frac{1}{\gamma_m \omega} \ln \frac{A}{A_m} > L_0.$$

Здесь L_0 - расстояние от места локализации пакета до области, где нарушается приближение геометрической оптики, A_m - амплитуда начальных "шумов" в среде, A - амплитуда возмущения в нелинейном режиме. В противном случае необходимо учитывать нелинейные эффекты.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные задачи устойчивости в рамках магнитной гидродинамики, сводящиеся к исследованию дифференциального уравнения четвертого порядка при наличии точки $U_2 = 0$.

В [6] были получены правила для нахождения спектра собственных частот ω финитных решений:

$$\int_{L_2} \kappa_2 dx + \int_{L_1} \kappa_1 dx = n\pi \quad (14)$$

где интегрирование ведется по линиям действительной фазы L_2 и L_1 . Здесь мы воспользуемся также удобным качественным критерием для получения сведений о спектре частот. Именно, если умножить (4) на f^* и проинтегрировать вдоль вещественной оси, то для финитных решений имеем:

$$2\beta^2 \int \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right|^2 dx + \beta \int U_2 \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx + \int U_1 |f|^2 dx = 0 \quad (15)$$

Анализ (14) показывает, что существует точка $X^{(p)}$ в области локализации $f(X)$ ($\operatorname{Re} \kappa_2(X^{(p)}) > 0$), где выполняются условия:

$$\operatorname{Im} \{ |k|^2 U_2 + U_1 \} = 0$$

$$\operatorname{Re} \alpha \kappa_x^4 - \operatorname{Re} \{ \kappa_x^2 U_2 + U_1 \} = 0 \quad (16)$$

В (15) вместо κ_x берется κ_1 или κ_2 ($\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sim \sqrt{2}$) в зависимости от интегрального вклада мод в критерий устойчивости. Уравнения (16) могут служить для определения знака и порядка величины инкремента $\nu = -\operatorname{Im} \omega$. Поскольку соотношения (16) получены в предположении финитности решения, то необходимо знать его поведение на ∞ . Пусть (см. рис. 2) нули $U_1(X)$, $U_2(X)$ расположены в комплексной плоскости X соответственно в точках А, В, С, Д, а в секторах $K_1 A L_1$, $K_2 B L_2$ f_1 ведет себя $\sim \exp(-i \kappa_1 dx)$ (соответственно f_2 ведет себя $\sim \exp(-i \kappa_2 dx)$) в секторах $R_1 C S_1$, $R_2 D S_2$. Тогда вопрос о финитности решения при $x \rightarrow \pm \infty$ сводится к тому охватывают ли указанные сектора обе действительные полуоси X .

В качестве примера проиллюстрируем влияние ионной вязкости на развитие связанной с конечностью сопротивления дрейфово-диссипативной неустойчивости (см. [8], [9]), что может быть существенным для низкотемпературной или достаточно плотной плазмы. В [9] было получено уравнение для исследования дрейфово-диссипативной неустойчивости с учетом ионной вязкости в предположении потенциальности возмущений:

$$\alpha f^{IV} + \kappa_y^2 \left(-2\alpha + \frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} \right) f'' + \kappa_y^2 \left\{ \alpha - \frac{\omega - \omega_i}{i\nu_i} + \frac{\omega - \omega_i}{\nu_i} \frac{\omega_i}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_e}{\omega - \omega_i} \right) \right\} f = 0 \quad (17)$$

Здесь $\alpha = (k_y r_i)^2$;

$$\omega_i = k_y \frac{c T_{0i}}{e H_0} \frac{n_0^i}{n_0}, \quad \omega_e = k_y \frac{c T_{0e}}{e H_0} \frac{n_0^e}{n_0}; \quad (18)$$

$$\omega_s = \left(\frac{k_z}{k_y} \right)^2 \frac{\omega_{ne} \omega_{ni}}{v_e}$$

В (17) и (18) приняты следующие обозначения:

r_i - ларморовский радиус ионов, v_i , v_e - соответственно частоты ион-ионных и электрон-ионных соударений, n_0 (\times) - невозмущенная плотность, ω_{ne} , ω_{ni} , T_{0e} , T_{0i} - соответственно ларморовские частоты и температуры электронов и ионов, H_0 - невозмущенное магнитное поле. При этом в /9/ было получено выражение ω в пренебрежении четвертой производной:

$$\omega = \omega_i + i \left(v_i \alpha - \frac{\omega_e \omega_s}{\omega_i} \right) \quad (19)$$

из которого видно, что ионная вязкость оказывает в данном случае стабилизирующее действие.

Выясним теперь к чему приводит учет влияния четвертой производной при наличии точек $U_2=0$. Поскольку $k_2 \gg k_1$, то как следует из (14) интегральный вклад моды k_1 может заметно изменить результат уже при сравнимых областях локализации решений ψ_1 и ψ_2 . Учитывая это обстоятельство, в случае, когда влияние моды k_2 существенно, из (16) и (17), легко получим

$$\text{Im } \omega \sim \alpha \left(v_i - \frac{\omega_e \omega_s}{\omega_i} \right) \quad (\omega_s \ll \omega_i) \quad (20)$$

Из (20) видим, что в этом случае условия стабилизации улучшаются по сравнению с (19) (дестабилизирующий фактор

10.

уменьшается в α раз). Кратко обсудим теперь вопрос о влиянии на дрейфово-диссипативную неустойчивость повышения порядка дифференциального уравнения за счет учета непотенциальности возмущения. Учет возмущения силовых линий магнитного поля (в частности учет H_z) приводит к дифференциальному уравнению четвертого порядка с малым параметром при старшей производной, который обратно пропорционален проводимости (см. /10/; при этом считается, что все остальные факторы, повышающие порядок дифференциального уравнения, малы). Можно, однако, легко показать, что если рассматриваемые в /10/ уравнения написать в форме (4), то ранее исследованные в 8 дисперсионные свойства дрейфово-диссипативной неустойчивости могут быть получены из уравнения

$$\alpha \psi'' + U_2(x) \psi = 0$$

т.е. определяются волновым вектором k_2 ($k_2 \sim \sqrt{\frac{4\alpha}{\alpha}}$)

Поскольку, как уже указывалось, $k_2 \gg k_1$, то из (14) следует, что учет пересечения решений не может качественно изменить в данном случае полученные результаты (если только "мода" k_2 не локализована в очень узкой области).

§ 4. АНОМАЛЬНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Выясним теперь возможность "рождения" в области "пересечения" решений новых волн ($k_1 \rightleftharpoons k_2$) с коэффициентом порядка единицы. В отличие от § 3 здесь мы будем рассматривать нефинитные задачи, считая, что из бесконечности на резонансную область падает волна определенного типа.

Хорошо известно, что если точка, в которой волновой вектор обращается в нуль ("точка поворота"), лежит на вещественной оси, то волна от этой точки полностью отражается. Если же "точка поворота" лежит в комплексной плоскости, то коэффициент отражения экспоненциально мал (см., например, /11/). Можно поэтому ожидать, что, если "точка пересечения решений"

11.

лежит на вещественной оси, то переход волны одного типа в волну другого типа будет аномально велик. Убедимся в этом прежде всего на простом примере. Рассмотрим частный случай (4) при $\alpha = 1$. Пусть ход коэффициентов U_1, U_2 подобен изображенному на рис.3 (Считаем, что в интересующей нас окрестности U_2 в нуль не обращается). Для K^2 имеем:

$$K_{1,2}^2 = \frac{U_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{U_2}{2}\right)^2 - U_1} \quad (21)$$

$(U_2 < 0)$

Точками пересечения решений будут точки, где $\left(\frac{U_2}{2}\right)^2 = U_1$, (на рис.3 это точка α). В /12/ для $\alpha = 1, U_2 \neq 0$ рассматривалась задача о нахождении спектра колебаний (в этом случае задача финитна и имеется вторая точка пересечения решений, например, симметричная точке α). Здесь мы рассмотрим задачу трансформации волн, что приводит к другим условиям на ∞ . Областью прозрачности для волн обоого типа является область II. Считая, что слева на особую область падает, например, волна $\sim \exp\{k_1 x\}$ и используя формулы связи между решениями (см. /6/, /12/) будем иметь следующее асимптотическое решение:

$$f = C_1 \frac{1}{\pi_1} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x k_1 dx\right) + C_2 \frac{1}{\pi_2} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x k_2 dx - i \frac{\pi}{2}\right); \quad x < \alpha \quad (22)$$

$$f = C_1 \frac{1}{\pi_1} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x k_1 dx - i \frac{\pi}{4}\right); \quad x > \alpha$$

Здесь C_1 - амплитуда падающей волны. Из (22) вытекает, что в окрестности резонансной области падающая волна полностью переходит в отраженную волну другого типа (используя (21), нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае групповые скорости волн обоого типа в левой окрестности точки α имеют разные знаки). Обратим внимание на том, что как следует из (21) $k_1 + k_2$ в окрестности точки α не является многозначным - ветвление испытывает лишь $k_1 - k_2$.

Если вообще в комплексной x - плоскости $k_1 + k_2$ остается однозначным, то при построении асимптотического решения уравнения (4) нам достаточно знать картину линий уровня для $\int (k_1 - k_2) dx$. Более того, можно показать, что в этом случае дифференциальное уравнение четвертого порядка (4) может быть заменено двумя уравнениями второго порядка со слабым зацеплением; причем одно уравнение не имеет "точек поворота", а у другого уравнения "точками поворота" являются точки, где $k_1 - k_2 = 0$, т.е. точки типа α ; иначе говоря этот случай весьма подобен случаю, когда мы имеем дело с дифференциальным уравнением второго порядка. Однако возможность аномальной трансформации видна уже и на этом примере.

Более интересным является случай, когда на вещественной оси существуют точки, где $U_2 = 0$. Именно здесь проявляется новая специфическая особенность асимптотического разложения - необходимость учитывать при построении решений уравнения картину линий уровня, как для $\int (k_1 - k_2) dx$, так и для $\int (k_1 + k_2) dx$ (как уже отмечалось $k_1 + k_2$ здесь также является многозначным.) На рис.4 изображен примерный ход коэффициентов вблизи точки $U_2 = 0$, а на рис.5 картина линий уровня для $\int (k_1 - k_2) dx$ и $\int (k_1 + k_2) dx$ в комплексной x - плоскости ("точки пересечения решений" α_1, α_2 являются соответственно точками ветвления $k_1 + k_2, k_1 - k_2$). Как видим, в этом случае окрестность точки $U_2 = 0$ пересечена линиями уровня различных аналитических выражений, что позволяет говорить о точке $U_2 = 0$ как об особой (хотя в ней самой решения не пересекаются).

Если мы хотим добиться большой трансформации, то необходимо, например, создать условия непрозрачности для падающей волны в некоторой области, в которой, однако, вторая из связанных между собой волн может распространяться свободно. Но как раз таким случаем является случай, изображенный на рис.4 - в области левее точки $U_2 = 0$ существует осциллирующее решение для "моды" k_1 , а правее этой точки осциллирующей является "мода" k_2 . Для того, чтобы указать связь между решением уравнения (4) по обе стороны от точки $U_2 = 0$ необходимо воспользоваться формулами (8), (10), (11), либо

же, в случае $\omega/\beta^2 \gg 1$ правилами обхода "точек пересечения решений", полученными в /6/. Здесь, чтобы указать на интересующие нас характерные особенности, приведем только вид решения \tilde{u}_1 на вещественной оси при больших y :

$$\tilde{u}_1 = \pi^{1/2} y^{1/2} u_{10}^{-1/2} H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2}); \quad y < 0$$

$$\tilde{u}_1 = \sqrt{\pi} \lambda^{-2/3} (3/2\gamma)^{-5/6} e^{-\gamma} + \pi^{1/2} (u_{10}^{-1/2} y^{1/2}) H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2}); \quad y > 0 \quad (22)$$

где $H_1^{(1)}$ - функция Ханкеля первого рода. Из (22) видим, что в случае, когда вид u_2, u_1 подобен изображенному на рис. 4 решение с волновым вектором κ_1 при $y < 0$ переходит при $y > 0$ в решение с волновым вектором κ_2 (нетрудно видеть, что $H_1^{(1)}(2u_{10}^{1/2} y^{1/2})$ экспоненциально затухает при больших $y > 0$). Отметим еще, что $u_1 < 0$ в точке, где $u_2 = 0$, если уравнение (4) получено из двух уравнений второго порядка типа (см. /2/):

$$2f'' + \omega_1^2 f = \gamma \psi$$

$$\psi'' + \omega_2^2 \psi = \gamma f$$

Перейдем теперь к некоторым конкретным приложениям изложенных здесь соображений.

В /13/ рассматривался вопрос о взаимной трансформации быстрой и медленной магнитозвуковых волн в случае, когда многозначным является только выражение $(\kappa_1 - \kappa_2)$. Уравнение для указанных волн, полученное в [13], имеет вид:

$$f^{IV} + \left(\frac{\omega^2}{V_A^2} + \frac{\omega^2}{S^2} - \kappa_y^2\right) f'' + \left[\frac{\omega^2}{V_A^2} \left(\frac{\omega^2}{S^2} - \kappa_y^2\right) - \frac{\omega^2 \kappa_y^2}{S^2}\right] f = 0 \quad (23)$$

где S - звуковая скорость, $V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi f_0}}$ - альфвеновская скорость, $f_0(z)$ - плотность среды, неоднородная вдоль магнитного поля H_0 (H_0 направлено вдоль оси z). Нетрудно, однако, видеть, что если существуют в среде точки z_0 , для которых выполняется условие

$$\kappa_y^2 = \frac{\omega^2}{V_A^2(z_0)} + \frac{\omega^2}{S^2} \quad (24)$$

то все изложенные здесь соображения и, в частности, формула /22/ применимы к (23). Заметим, что вопрос об аномальной взаимной трансформации магнитогидродинамических волн может иметь, в частности, значение для создания теории нагрева хромосферы [14]

Вопрос о трансформации плазменной волны в электромагнитную в условиях солнечной короны рассматривался в /15/. При этом получился малый коэффициент трансформации для электромагнитной волны, распространяющейся к земле. Задача в данном случае осложняется тем, что в окрестности точки $u_2 = 0$ имеются также другие особенности. Малая величина коэффициента трансформации связана здесь с тем, что точка $u_2 = 0$ отделена от области распространения электромагнитной волны в сторону земли барьером /2/.

Отметим еще, что большая трансформация возможна между обыкновенной и необыкновенной волнами. Так можно показать, что в разреженной плазме аномальная трансформация возможна, если ларморовская частота, соответствующая проекции магнитного поля на направление распространения волн порядка частоты этих волн. В качестве примера трансформации при $u_2 \neq 0$ (случай, соответствующий рис. 3) рассмотрим потенциальные колебания в области частот $\omega_{H_i} \ll \omega \ll \omega_{H_e}$. Пусть далее $\omega \gg \kappa_{1i} V_{Te}, \kappa_{1i} V_{Ti}$, где V_{Te}, V_{Ti} - соответственно тепловые скорости электронов и ионов, а также ионы горячее электронов ($T_i \gg T_e$). Собственные колебания для такого случая рассматривались в /12/ и выражение для волнового вектора этих волн имеет вид:

$$\kappa_{1,2}^2 = -\kappa_y^2 + \frac{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\right)^2 - 12 \frac{\kappa_{1i}^2 V_{Te}^2 \omega_{pe}^2 \omega_{pi}^2}{\omega^6}}}{V_{Ti}^2 \omega_{pi}^2 / \omega^4} \quad (25)$$

из (25) видим, что если имеется, например, полупространство, заполненное неоднородной плазмой со спадающим к границе плазмы давлением, то возможно наличие "точки пересечения решений".

$$\omega_{\alpha 2}^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m_{\perp}} \quad (\alpha = i, e) \quad 15.$$

В этой точке будет происходить аномальная трансформация одной из волн (25) в другую.

Вопрос о трансформации волн, помимо самостоятельного интереса, может оказаться существенным для проблем устойчивости плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий пример. Пусть ход коэффициентов U_1 и U_2 подобен изображенному на рис. 6. При этом одна из "зацепляющихся" волн (с волновым вектором K_1) осциллирует на бесконечность, а другая затухает. Пусть в средней части области ω, ω_2 возникло нарастающее во времени локализованное возмущение ("пакет"), образованное волнами с волновым вектором K_2 . При этом, если скорость ухода энергии на бесконечность за счет трансформации в волну другого типа превысит скорость поступления энергии в возмущение за счет источников неустойчивости, то неустойчивость не развивается, а сама плазма может теперь служить генератором уходящих на бесконечность колебаний.

Благодарю Р.З.Сагдеева за полезные обсуждения асимптотических методов и вопросов трансформации волн.

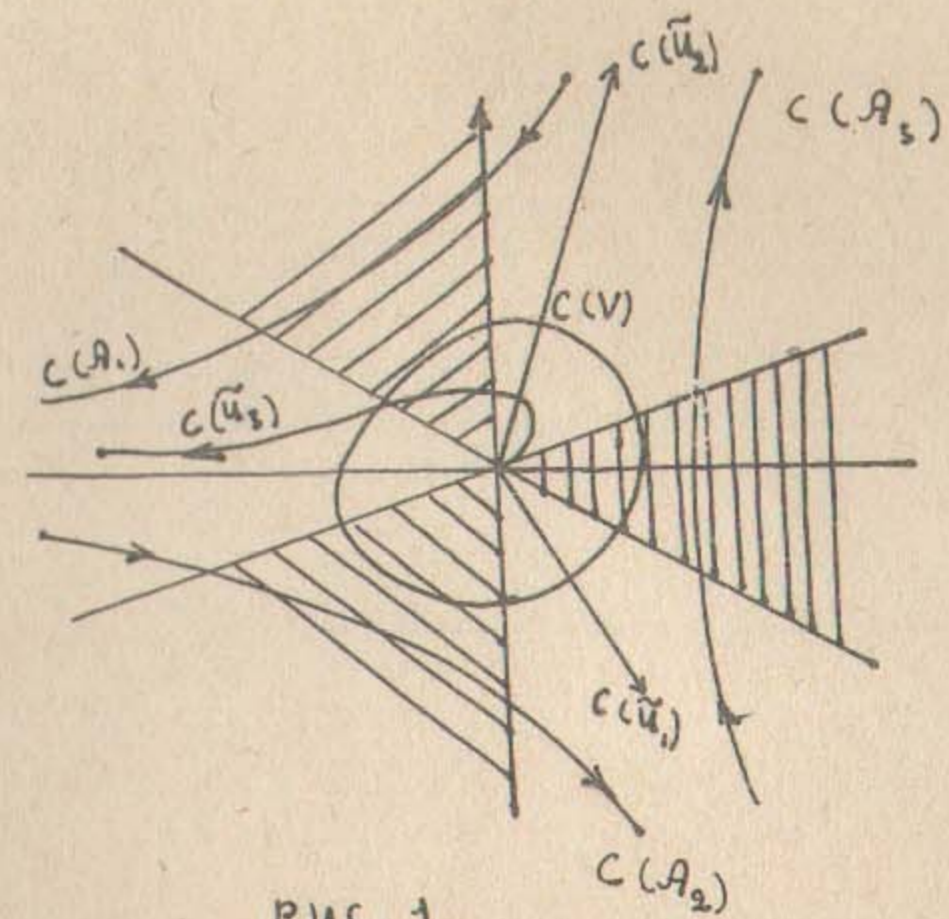


Рис. 1

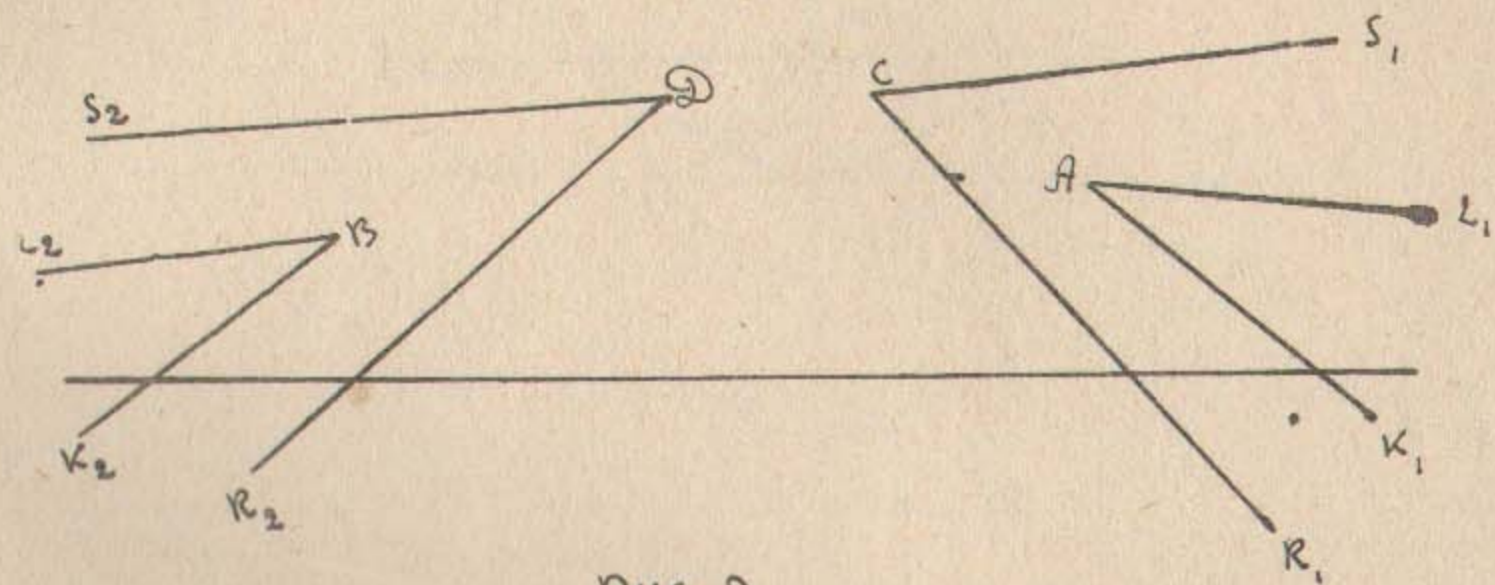


Рис. 2

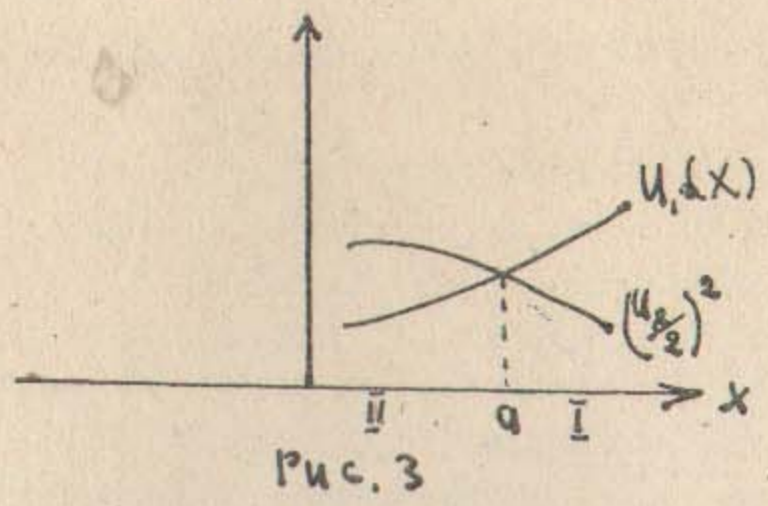


рис. 3

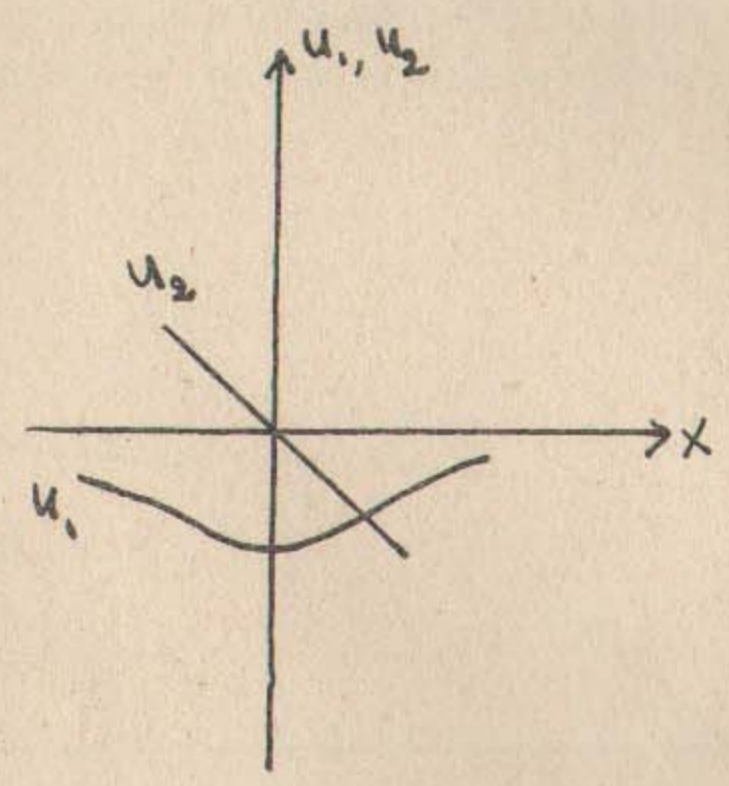


рис. 4

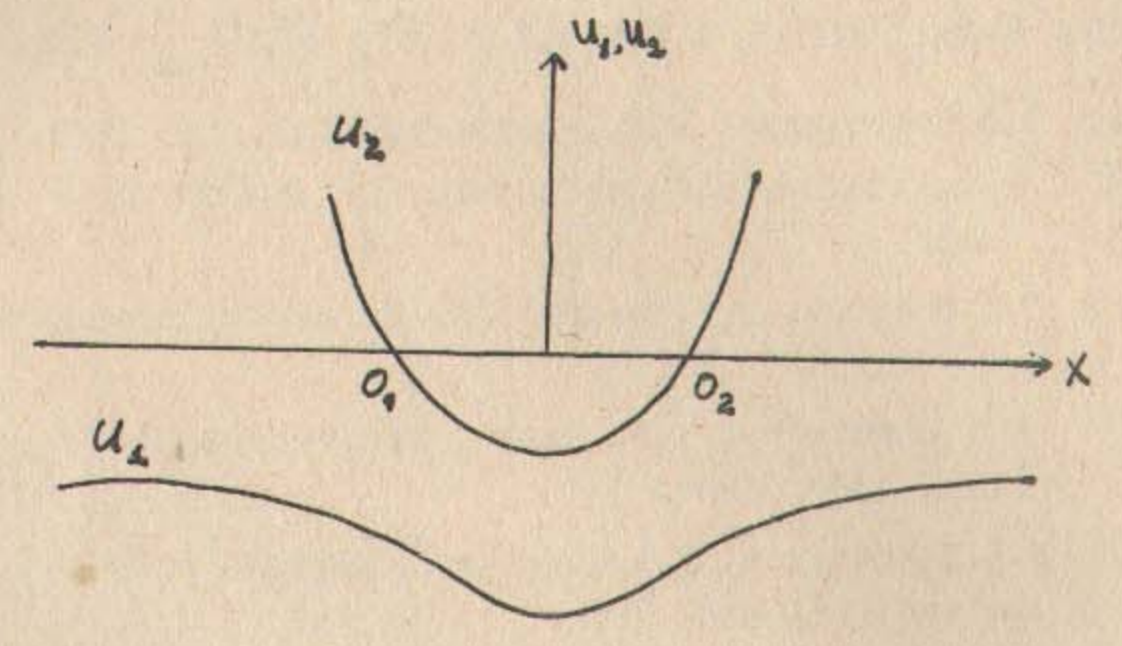
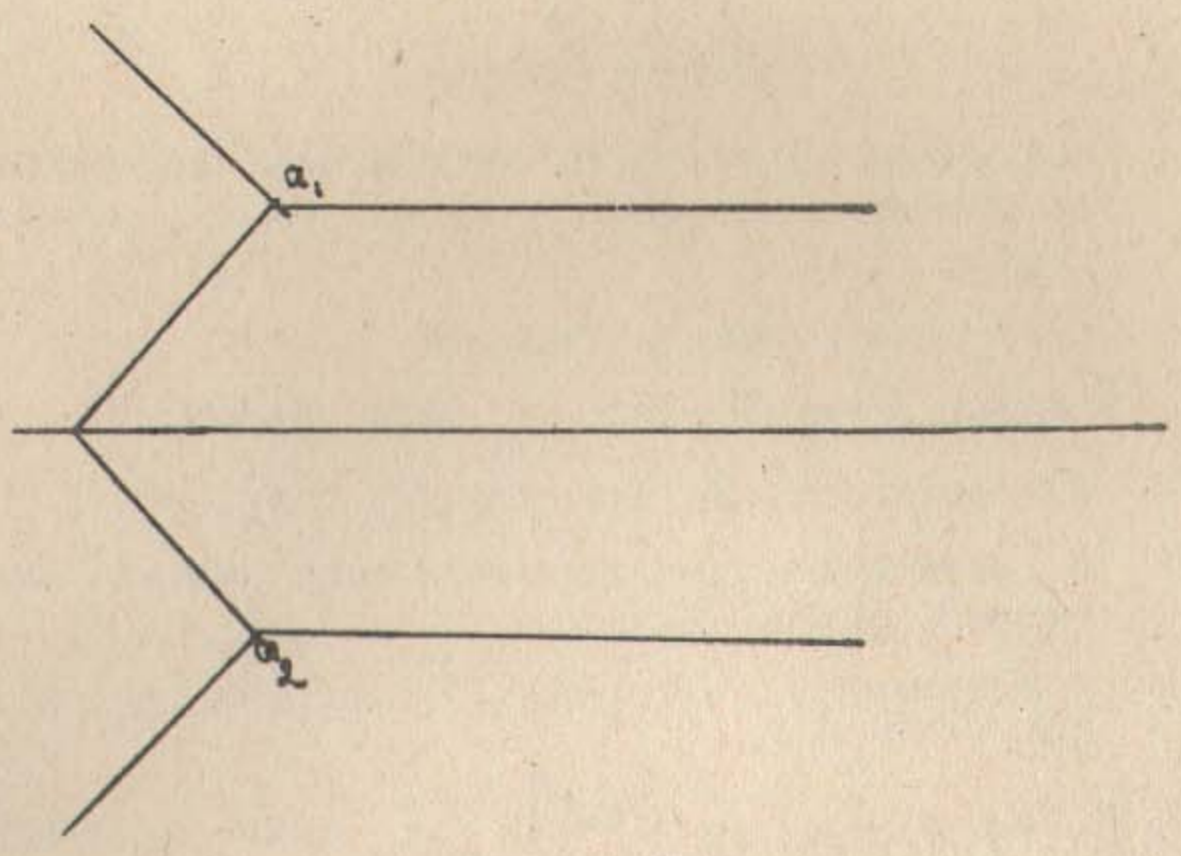


рис. 6

ЛИТЕРАТУРА

- 1 С.С.Моисеев Доклад на УП международной конференции по явлениям в ионизованных газах. Белград, августа, 1965 г.
- 2 С.С.Моисеев, ПМТФ, 3, 1966. /3/
- 3 T. H. Stix, *Phys. Rev. Let.* 15, 878, 1965
- 4 М.С.Ерохин, С.С.Моисеев, ПМТФ, 2, 1966.
- 5 В.В.Железняков Радиоизлучение солнца и планет. Из-во "Наука", Москва, 1964.
- 6 Г.М.Заславский, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев ДАН СССР, 158, 1295, 1964.
- 7 W. Wasow *Ann. of Math.* 52, 350, (1950)
- 8 А.А.Галеев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев. Атомная энергия 15, 451, 1963.
9. Г.М.Заславский, С.С.Моисеев, ЖТФ, XXXIV, 410, 1964.
- 10 H. Furth, I. Killen, M. Rosenbluth, *Phys. Fluids*, 6, 459, 1963
- 11 В.Л.Покровский, И.М.Халатников ЖЭТФ, 40, 1713, 1961.
- 12 А.А.Рухадзе, В.С.Саводченко, С.А.Тригер ПМТФ, 6, 58, 1965.
- 13 С.С.Моисеев, В.Р.Смилянский. Магнитная гидродинамика 2, 132, 1965.
- 14 С.Б.Пикельнер, М.А.Дившиц. *Астрономический журнал*, TX21, 1007, 1964.
- 15 В.В.Железняков, Е.А.Злотник. *Известия вузов (Радиофизика)*, 5, 644, 1962.