ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР.

препринт 25

С.Т.Беляев

Когерентные флуктуации спаривания и коллективные 0^+ возбуждения ядер

НОВОСИБИРСК 1966

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе методом зависящего от времени самосогласованного поля исследуются коллективные возбуждения 0^+ в ядрах, связанные со взаимодействием в канале частица-частица. Найдены два класса возбуждений с различной временной четностью, представляющие собой когерентные флуктуации спаривания. Т - четная ветвь (предсказывалась ранее Бором и Моттельсоном) характеризуется слабыми $E0$ - переходами в основное состояние. Т - нечетная ветвь напротив, имеет большую вероятность $E0$ - переходов. Рассмотрены также сечения возбуждения при (t,p) - реакции, которые оказываются одного порядка для ветвей обоих типов.

I. В в е д е н и е

Среди низколежащих возбужденных состояний как сферических, так и деформированных ядер известно большое число уровней с моментом и четностью 0^+, число которых быстро возрастает в настоящее время в связи с расширением экспериментальных исследований. Измеренные вероятности электромагнитных переходов, сечения (t,p) - реакции и т.д. показывают, что среди уровней 0^+ можно различать состояния различной коллективной природы, причем многие из них с достоверностью не относятся к уже известным типам (двухфононным состояниям в сферических ядрах или β - вибрационным - в деформированных).

Бор и Моттельсон /I/ предложили другой механизм возбуждения ядра, в котором основную роль играет взаимодействие спаривания ("парные колебания"). Количественные расчеты для таких возбуждений были проведены Бесом и Броглиа /2/, из которых следует, что "парные колебания" могут практически реализоваться лишь в очень частных случаях.

В настоящей работе исследуются широкий класс коллективных возбуждений ядер (включающий и "парные колебания"), которые можно назвать когерентными флуктуациями спаривания.

При микроскопическом описании коллективных возбуждений задача нахождения их собственных энергий сводится к исследованию системы уравнений интегрального типа, ядром которых являются матричные элементы межнуклонного взаимодействия. Как подходить к проблеме, когда детальный вид взаимодействия неизвестен?

Если ограничиться возбуждениями с определенными квантовыми числами (например 0^+), то в задачу входят только два типа матричных элементов, характеризующие взаимодействие частиц и дырки в состоянии 0^+ и аналогичное взаимодействие для двух частиц (или двух дырок). Первый тип взаимодействия определяет обычные монопольные колебания ядер, энергии которых значительно больше одночастичных. Для состояний 0^+ представляет интерес канал частица-частица, для описания которого необходимо знать матричные элементы взаимодействия, перебрасывающие пару частиц с одного уровня на любой другой. В модельном взаимодействии спаривания все эти матричные элементы считаются равными. Такое приближение достаточно для описания одночастичных возбуждений и в некоторой степени - для квадрупольных и октупольных коллективных колебаний, но можно ли им ограничиться и в других случаях?

Спаривательное взаимодействие хорошо тем, что требует введения лишь одной феноменологической константы. Его усложнение путем введения новых феноменологических членов нельзя считать оправданным из-за большого произвола. Однако, можно пытаться исправлять спаривание, следуя определенным общим принципам. По нашему мнению таким принципом может служить требование градиентной инвариантности взаимодействия, что для нуклонов в ядре эквивалентно условию локальной галилеевской инвариантности /3/. Исходя из этого требования, можно исправить градиентно неинвариантное взаимодействие спаривания, не вводя при этом никаких новых констант.

Спектр коллективных возбуждений для исправленного взаимодействия значительно богаче, чем для простого спаривания. Целью настоящей работы является исследование свойств этих возбуждений. Мы будем использовать метод зависящего от времени самосогласованного поля в форме, предложенной в статье автора /4/. В следующем разделе даны необходимые результаты этой работы и сформулированы основные уравнения для поправки к матрице плотности. Там же приведена связь матрицы плотности с физическими характеристиками системы - вероятностью перехода и оператором, порождающим возбужденное состояние.

В третьем разделе проведена аппроксимация взаимодействия с помощью требования его градиентной инвариантности.

В четвертом разделе исследуются решения основного уравнения. Устанавливается два возможных типа возбуждений с различными временными частностями ("парные колебания" оказываются одной из Т-четных ветвей).

В разделах 5 и 6 исследуются свойства найденных возбуждений - вероятности $E0$ - перехода в основное состояние и возбуждение при (t,p) - реакции.

Настоящая работа не преследует цели проведения точных количественных расчетов и детального сравнения с экспериментом. Основная задача - качественное исследование свойств найденных возбуждений. Поэтому при необходимости будут использоваться такие упрощения и приближения, которые не имеют принципиального значения и не могут изменить качественных результатов.

2. Матрица плотности и системы во внешнем поле

Вначале кратко сформулируем обозначения и некоторые результаты работы /4/. Введем обобщенную матрицу плотности системы

$$\hat{\rho}(\nu\nu') = \begin{vmatrix} 2\langle a_\nu a_{\nu'}^+\rangle - \delta_{\nu\nu'} & -2i\langle a_\nu a_{\tilde\nu'}\rangle \\ 2i\langle a_{\tilde\nu}^+ a_{\nu'}^+\rangle & 2\langle a_{\tilde\nu}^+ a_{\tilde\nu'}\rangle - \delta_{\nu\nu'} \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

Здесь $a_\nu^+(a_\nu)$ - операторы рождения (уничтожения) нуклона в состоянии ν, операция $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по основному состоянию системы, а состояния $(\nu,\tilde\nu)$ переходят друг в друга при отражении времени. Удобно ввести комбинированные операторы

$$\psi(\nu) = \begin{pmatrix} a_\nu \\ i a_{\tilde\nu}^+ \end{pmatrix}, \qquad \psi^+(\nu) = (a_\nu^+, \ -i a_{\tilde\nu}) \qquad (2.2)$$

через которые $\hat{\rho}$ можно представить в виде:

$$\langle \Psi \Psi^{+} \rangle = \frac{1}{2}(1+\hat{\rho}) \tag{2.3}$$

Общая билинейная комбинация операторов a, a^{+}

$$R = \sum_{\nu\nu'} \Big\{ -r^{(+)}_{\nu'\nu}(a_{\nu}a^{+}_{\nu'} - a^{+}_{\bar{\nu}}a_{\bar{\nu}'}) - r^{(-)}_{\nu'\nu}(a_{\nu}a^{+}_{\nu'} + a^{+}_{\bar{\nu}}a_{\bar{\nu}'})$$

$$+ \bar{r}^{(+)}_{\nu'\nu}(a_{\nu}a_{\bar{\nu}'} + a^{+}_{\bar{\nu}}a^{+}_{\nu'}) - \bar{r}^{(-)}_{\nu'\nu}(a_{\nu}a_{\bar{\nu}'} - a^{+}_{\bar{\nu}}a^{+}_{\nu'}) \Big\} \tag{2.4}$$

в представлении (2.2) записывается как

$$R = -Tr\{\hat{R}\Psi\Psi^{+}\} \tag{2.5}$$

где матрица $\hat{R}(\nu',\nu)$ имеет вид

$$\hat{R}(\nu'\nu) = r^{(+)}_{\nu'\nu}\sigma^{z} - \bar{r}^{(+)}_{\nu'\nu}\sigma^{y} + r^{(-)}_{\nu'\nu} + i\bar{r}^{(-)}_{\nu'\nu}\sigma^{x}$$

$$= \begin{vmatrix} r^{(-)} + r^{(+)} & i(\bar{r}^{(-)} + \bar{r}^{(+)}) \\ i(\bar{r}^{(-)} - \bar{r}^{(+)}) & r^{(-)} - r^{(+)} \end{vmatrix}_{\nu'\nu} \tag{2.6}$$

а шпур (Tr) берется как по состояниям ν', ν, так и по матричным индексам $\hat{R}$ и $\Psi\Psi^{+}$. Среднее значение оператора (2.5) по основному состоянию согласно (2.3) равно

$$\langle R \rangle = -\frac{1}{2}Tr\hat{R} - \frac{1}{2}Tr\{\hat{R}\hat{\rho}\} \tag{2.7}$$

Уравнения для обобщенной матрицы плотности $\hat{\rho}$ в приближении самосогласованного поля имеют вид

$$i\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{S}\{\hat{\rho}\}, \hat{\rho}] \tag{2.8а}$$

$$\hat{\rho}^{2} = 1 \tag{2.8б}$$

где $\hat{S}$ - самосогласованный гамильтониан.

Считаем, что в отсутствии внешнего поля система находится в стационарном состоянии, матрица плотности которого определяется из

$$[\hat{S}\{\hat{\rho}^{o}\}, \hat{\rho}^{o}] = 0, \quad \hat{\rho}_{o}^{2} = 1 \tag{2.9}$$

Вследствие сохранения временной (T) четности $\hat{S}\{\hat{\rho}^{o}\} = S^{o}$ можно представить в виде

$$S^{o} = \begin{vmatrix} \epsilon & i\Delta \\ -i\Delta & -\epsilon \end{vmatrix} = \epsilon\sigma^{z} - \Delta\sigma^{y} \tag{2.10}$$

где ϵ имеет смысл одночастичного гамильтониана, а Δ описывает куперовское спаривание. (ϵ и Δ - эрмитовские операторы). Из (2.10) следует, что собственные вектора S^{o} группируются в пары (φ, χ) с собственными значениями, отличающимися только знаком

$$S^{o}\varphi = \varphi E \quad ; \varphi^{+}S^{o} = E\varphi^{+}; \quad \chi = \sigma^{x}\varphi$$

$$S^{o}\chi = -\chi E \; ; \quad \chi^{+}S^{o} = -E\chi^{+}; \quad \chi^{+} = \varphi^{+}\sigma^{x} \tag{2.11}$$

Матрица плотности основного состояния связана с собственными векторами S^{o} соотношением

$$\hat{\rho}^{o} = \varphi\varphi^{+} - \chi\chi^{+} \qquad (2.12)$$

В модели с постоянным спариванием ($\Delta = const$)

$$\varphi_{\nu} = |\nu\rangle \begin{pmatrix} u_{\nu} \\ -i v_{\nu} \end{pmatrix} \; ; \; \chi_{\nu} = |\nu\rangle \begin{pmatrix} -i v_{\nu} \\ u_{\nu} \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

где $|\nu\rangle$ собственные функции ϵ (с собственным значением ϵ_{ν}), а u, v - коэффициенты обычного преобразования Боголюбова. При этом собственные значения S^{o} равны $E_{\nu} = \sqrt{\epsilon_{\nu}^{2} + \Delta^{2}}$.

Поправка к матрице плотности от внешнего поля может содержать как -T-четную, так и T-нечетную компоненты, которые с учетом (2.8б) и (2.12) можно представить в виде

$$\hat{\rho}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}\left(\hat{\rho}^{(1)} \mp \sigma^{x}\hat{\rho}^{(1)}\sigma^{x}\right) = 2\left(\chi Z^{(\pm)}\varphi^{+} \mp \varphi Z^{(\pm)}\chi^{+}\right) \qquad (2.14)$$

Из (2.14) видно, что для определения матриц $\hat{\rho}^{(\pm)}$ достаточно определить "скалярные" функции $Z^{(\pm)}(\nu\nu')$.

В первом приближении по внешнему полю $V \sim e^{-i\omega t}$, полагая $\rho^{(\pm)} \sim e^{-i\omega t}$ и используя развитую в /4/ технику, нетрудно получить следующие уравнения для $Z^{(\pm)}$

$$\omega Z^{(\pm)}(11') + E_{11'} Z^{(\pm)}(11') + 2\xi^{(\pm)}_{11'} \sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \xi^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}_{22'} \qquad (2.15а)$$

$$+ 2\eta^{(\pm)}_{11'} \sum_{22'} \langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle \eta^{(\pm)}_{22'} Z^{(\pm)}(22') = \phi^{(\pm)}_{11'}$$

$$\phi^{(\pm)}_{11'} = \left(\chi_{1}^{+} \hat{V}^{(\pm)} \varphi_{1'}\right) \qquad (2.15б)$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$E_{\nu\nu'} = E_{\nu} + E_{\nu'}$$

$$\xi^{(\pm)}_{\nu\nu'} = u_{\nu}u_{\nu'} \mp v_{\nu}v_{\nu'} \; ; \; \eta^{(\pm)}_{\nu\nu'} = u_{\nu}v_{\nu'} \pm v_{\nu}u_{\nu'} \qquad (2.16)$$

а $G^{(\pm)}$ обозначает T-четную и T-нечетную (относительно одной из частиц) часть взаимодействия в канале частица-дырка [ж)].

Мы считаем, что внешнее поле V имеет самый общий вид и может сдержать как члены, сохраняющие число частиц N (например, электромагнитное поле), так и меняющие на две единицы (как например при (t,p) - реакции двойного стриппинга). Другими словами, V имеет вид (2.4) или (2.5), так что согласно (2.15б) и (2.13).

$$\phi^{(\pm)}_{11'} = \pm i\left(\eta^{(\pm)}_{11'} V^{(\pm)}_{11'} - \xi^{(\pm)}_{11'} \overline{V}^{(\pm)}_{11'}\right) \qquad (2.17)$$

Здесь $V^{(\pm)}$ и $\overline{V}^{(\pm)}$ имеют тот же смысл, что и $r^{(\pm)}$, $\bar{r}^{(\pm)}$ в (2.4) и (2.6) (V сохраняет число частиц, $\overline{V}$ - меняет). Отметим свойство симметрии для решения уравнений (2.15)

$$Z^{(\pm)}(\nu\nu'; \omega) = \mp\left[Z^{(\pm)}(\nu'\nu; -\omega)\right]^{*} \qquad (2.18)$$

Удобно наряду с (2.15) рассматривать уравнения для эффективного поля $(\mathcal{V}, \overline{\mathcal{V}})$ возникающего в системе при наложении внешних полей ($V, \overline{V}$). Связь эффективных полей с величиной $Z^{(\pm)}$ имеет вид

ж) Если T-оператор инверсии времени, то $G^{(\pm)}_{12} = \frac{1}{2}\left(G_{12} \pm T_{2}^{-1} G_{12} T_{2}\right)$ так что

$$\langle 12'|G^{\pm}|21'\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle 12'|G|21'\rangle \pm \langle 1\tilde{2}|G|\tilde{2}'1'\rangle\right)$$

За деталями вывода уравнения и смежным вопросом отсылаем к работе /4/.

$$\mathcal{V}^{(\pm)}(11') = V_{11'}^{(\pm)} \pm 2i \sum_{22'} \langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle \eta_{22'}^{(\pm)} Z^{(\pm)}(22')$$

$$\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}(11') = \bar{V}_{11'}^{(\pm)} \mp 2i \sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \xi_{22'}^{(\pm)} Z^{(\pm)}(22') \tag{2.19}$$

откуда с учетом (2.I8) устанавливаем свойства симметрии

$$\mathcal{V}^{(\pm)}(\nu\nu';\omega) = \left[\mathcal{V}^{(\pm)}(\nu'\nu;-\omega)\right]^*$$

$$\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}(\nu\nu';\omega) = \pm\left[\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}(\nu'\nu;-\omega)\right]^* \tag{2.20}$$

Из (2.I5) и (2.I9) получаем следующие уравнения для эффективных полей [x)]

$$\mathcal{V}^{(\pm)}(11') = V_{11'}^{(\pm)} - 2\sum_{22'} \langle 12'|G^{(\pm)}|21'\rangle \frac{\eta_{22'}^{(\pm)}}{E_{22'}^2-\omega^2}\Big\{E_{22'}\eta_{22'}^{(\pm)}\mathcal{V}^{(\pm)}_{(22')} + \omega\eta_{22'}^{(\mp)}\mathcal{V}^{(\mp)}(22') - E_{22'}\xi_{22'}^{(\pm)}\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}_{(22')} - \omega\xi_{22'}^{(\mp)}\bar{\mathcal{V}}^{(\mp)}(22')\Big\}$$

$$\bar{\mathcal{V}}^{(\pm)}_{(11')} = \bar{V}_{11'}^{(\pm)} - 2\sum_{22'} \langle 1\tilde{1}'|G|\tilde{2}'2\rangle \frac{\xi_{22'}^{(\pm)}}{E_{22'}^2-\omega^2}\Big\{E_{22'}\xi_{22'}^{(\pm)}\bar{\mathcal{V}}^{\pm}_{(22')} + \omega\xi_{22'}^{(\mp)}\bar{\mathcal{V}}^{(\mp)}_{(22')} - E_{22'}\eta_{22'}^{(\pm)}\mathcal{V}^{(\pm)}_{(22')} - \omega\eta_{22'}^{(\mp)}\mathcal{V}^{(\mp)}_{(22')}\Big\} \tag{2.21}$$

---

x) Получение аналогичной системы уравнений методом функций Грина см. в монографии А.Б.Мигдала /6/.

Уравнение интегрального типа (2.I5), определяющее поправку первого приближения к матрице плотности, является основным для дальнейшего.

Прежде чем переходить к решению уравнения (2.I5), отметим связь матрицы плотности во внешнем поле с физическими характеристиками системы.

Пусть на систему действует внешнее периодическое поле $V \sim e^{-i\omega t}$, среднее значение которого по невозмущенному состоянию системы равно нулю. В возмущенном состоянии среднее от V определится выражением

$$\langle V\rangle = \sum_n{}' \frac{|(\omega_n|V|0)|^2}{\omega-\omega_n}$$

где ω_n - энергия возбужденных состояний, отсчитанные от энергии основного состояния $|0)$ (. С другой стороны, среднее значение V может быть вычислено через матрицу плотности. Согласно (2.7) имеем

$$\langle V\rangle = -\frac{1}{2}Tr\{\hat{V}\hat{\rho}^{(1)}\} = -\frac{1}{2}Tr\{\hat{V}^{(+)}\hat{\rho}^{(+)} + \hat{V}^{(-)}\hat{\rho}^{(-)}\}$$

Используя (2.I4) и определение $\phi^{(\pm)}$ в (2.I5), после простых преобразований (см. /4/) получим

$$\langle V\rangle = 2\sum_{\nu\nu'}\{\phi_{\nu'\nu}^{(+)}Z^{(+)}(\nu\nu') - \phi_{\nu'\nu}^{(-)}Z^{(-)}(\nu\nu')\} \tag{2.22}$$

Сравнивая (2.I8) и (2.I9), находим для матричного элемента перехода из основного состояния в возбужденное (энергия перехода ω_n)

$$|(\omega_n|V|0)|^2 = \left[\frac{\omega^2-\omega_n^2}{\omega_n}\sum_{\nu\nu'}\{\phi_{\nu'\nu}^{(+)}Z^{(+)}_{(\nu\nu')} - \phi_{\nu'\nu}^{(-)}Z^{(-)}_{(\nu\nu')}\}\right]_{\omega^2\to\omega_n^2} \tag{2.23}$$

откуда видно, что вероятность перехода определяется вычетом в соответствующем полюсе $Z^{(+)}$.

Пусть возбужденное состояние $|\omega_n)$ имеет коллективную природу и порождается некоторым бозеоператором α^+ (фононом), так что

$$(0|\alpha = (\omega_n| \; ; \quad \alpha|0) = 0$$

Тогда для матричного элемента перехода от оператора V имеем

$$(\omega_n|V|0) = (0|\alpha V|0) = (0|[\alpha, V]|0) \equiv \langle[\alpha V]\rangle$$

или согласно (2.7)

$$(\omega_n|V|0) = -\frac{1}{2} Tr\{[\hat{\alpha}, \hat{V}]\hat{\rho}\} \tag{2.24}$$

Смысл компонент матрицы $\hat{\alpha}$ тот же, что и в (2.4-6). С помощью (2.12) и (2.15б) из (2.24) легко получить

$$(\omega_n|V|0) = 2i\sum_{\nu\nu'}\{A^{(+)}(\nu'\nu)\varphi^{(+)}_{\nu\nu'} - A^{(-)}(\nu'\nu)\varphi^{(-)}_{\nu\nu'}\} \tag{2.25}$$

Здесь величины

$$A^{(\pm)}(\nu'\nu) = \frac{1}{2}\left[(\chi^+_{\nu'}\hat{\alpha}\varphi_\nu) \pm (\varphi^+_{\nu'}\hat{\alpha}\chi_\nu)\right]$$

имеют смысл коэффициентов разложения фонона через операторы квазичастиц $\alpha\alpha^+$ ж)

ж) Как обычно принимаем связь между частицами и квазичастицами в виде

$$a_\nu = u_\nu\alpha_\nu + v_\nu\alpha^+_{\bar{\nu}}; \quad a_{\bar{\nu}} = u_\nu\alpha_{\bar{\nu}} - v_\nu\alpha^+_\nu$$

$$\alpha = \sum_{\nu\nu'}\{A^{(-)}(\nu'\nu)(\alpha_\nu\alpha_{\bar{\nu}'} - \alpha^+_{\bar{\nu}}\alpha^+_{\nu'}) + A^{(+)}(\nu'\nu)(\alpha_\nu\alpha_{\bar{\nu}'} + \alpha^+_{\bar{\nu}}\alpha^+_{\nu'})\} \tag{2.26}$$

Структура фонона (т.е. коэффициенты $A^{(\pm)}$) может быть определена из сопоставления выражений (2.23) и (2.25) для амплитуды перехода.

Таким образом, решение уравнения (2.15) позволяет найти энергии коллективного уровня, вероятность перехода в основное состояние и волновую функцию состояния (структуру фонона).

3. Следствия градиентной инвариантности взаимодействия

Решение уравнения (2.15) требует определенных предположений о межнуклонном взаимодействии. Как уже обсуждалось во введении, взаимодействие в канале частица-дырка не является принципиальным для рассматриваемых здесь вопросов. Поэтому в дальнейшем мы его рассматривать не будем и ограничимся лишь членом с $\langle 1\bar{1}'|G|\bar{2}'2\rangle$ (Более строгий метод функции Грина приводит к уравнению, формально совпадающему с (2.15), если под $\langle 1\bar{1}'|G|\bar{2}'2\rangle$ понимать неприводимый четырехполюсник (амплитуду) в канале частица-частица). Мы будем считать, что $\langle 1\bar{1}'|G|\bar{2}'2\rangle$ инвариантно относительно калибровочного преобразования одночастичных волновых функций.

$$\varphi_\nu(r) \longrightarrow e^{i\beta\phi(r)}\varphi_\nu(r) \tag{3.1}$$

где β - постоянная, а $\phi(r)$ - произвольная функция координат. Какие основания для такого предположения?

Исходное межнуклонное взаимодействие инвариантно относительно преобразования Галилея, при котором одночастичные функции трансформируются согласно

$$\varphi_\nu(r) \longrightarrow e^{iP_0 r}\varphi_\nu(r) \tag{3.2}$$

где P_0 – постоянный вектор. Вследствие короткодействующего характера сил, взаимодействие остается инвариантным и при локальном галилеевском преобразовании, когда вектор P_0 в (3.2) является плавной функцией координат. Но тогда (3.2) переходит в калибровочное преобразование (3.I)

Точная двухчастичная амплитуда (неприводимый четырехполюсник), вообще говоря, не инвариантна относительно преобразований Галилея, так как возможна зависимость не только от разности импульсов, входящих в выходящих концов, но и от их абсолютной величины. Но для частиц у поверхности Ферми галилеевская инвариантность амплитуды сохраняется, если в (3.2) параметр P_0 много меньше граничного импульса ферми P_F. Поэтому сохраняется и приближенная калибровочная инвариантность, по крайней мере, для достаточно плавных функций $\phi(r)$ в (3.I) (мало меняющихся на расстояниях $\sim \hbar/P_F$).

Отметим, что калибровочная инвариантность взаимодействия обеспечивает справедливость уравнения непрерывности для тока частиц.

Требование градиентной инвариантности взаимодействия приводит к соотношению (вывод см. в приложении)

$$\sum_{2,2'} \langle 1\tilde{1}' | G | \tilde{2}' 2 \rangle \frac{E_{22'}}{2E_2 E_{2'}} \langle 2 | \phi | 2' \rangle = - \langle 1 | \phi | 1' \rangle \qquad (3.3)$$

Для $\phi = const$ это соотношение переходит в обычное уравнение для параметра Δ. Модельное взаимодействие спаривания определяется как

$$\langle 1\tilde{1}' | G | \tilde{2}' 2 \rangle = -\frac{1}{2} G \delta_{11'} \delta_{22'} \qquad (3.4)$$

Очевидно, что взаимодействие (3.4) градиентно неинвариантно, т.к. для него (3.3) может выполняться только для $\phi = const$. Поставим задачу: дополнить правую часть (3.4) членами, которые обеспечат выполнение условия (3.3) для других функций координат $\phi(r)$. С этой целью полагаем вместо (3.4)

$$\langle 1\tilde{1}' | G | \tilde{2}' 2 \rangle = -\frac{1}{2} G \sum_{\sigma=0,1\ldots} f_\sigma(11') f_\sigma(2'2) \qquad (3.5)$$

где

$$f_\sigma(\nu\nu') \equiv \langle \nu | f_\sigma(r) | \nu' \rangle$$

– одночастичные матричные элементы некоторых функций от r. Причем первый – основной – член в сумме (3.5) совпадает с (3.4), т.е. $f_0 = 1$. Считая, что функции f_σ линейно независимы, потребуем выполнения (3.3) для каждой из них. В результате получим следующее условие ортонормировки для f_σ [ж)]

$$G \sum \frac{E_{\nu\nu'}}{4E_\nu E_{\nu'}} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') = \delta_{\sigma\rho} \qquad (3.6)$$

которое в принципе однозначно определяет правую часть (3.5).

Необходимо подчеркнуть смысл равенства (3.5). Это представление ни в коей мере не следует рассматривать как разложение реального взаимодействия. Подобно тому, как в (3.4) правая часть эквивалентна левой лишь в отношении одного свойства – спаривания, каждый член правой части (3.5) передает лишь определенное свойство истинного взаимодействия – градиентную инвариантность для определенной функции $\phi(r)$ в (3.2). Таким образом, (3.5) следует рассматривать лишь как моделирование

ж) Для потенциальной ямы с четко выраженным краем (3.6) эквивалентно условию ортонормировки в координатном пространстве внутри ядра (объемом Ω)

$$\frac{1}{\Omega} \int dr\, f_\sigma(r) f_\rho(r) = \delta_{\sigma\rho} \qquad (3.6)$$

т.к. в этом случае уравнение для $\Delta = const$ можно представить в виде /5/

$$G\Omega \sum_\nu |\nu\rangle \frac{1}{2E_\nu} |$$

определенных матричных элементов взаимодействия относительно свойства градиентной инвариантности.

Подставляя (3.5) и (2.15) мы получаем уравнение с вырожденным ядром, которое приводится обычным способом к системе алгебраических уравнений

$$\left\{\delta_{\sigma\rho} - G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}\,\Xi^{(\pm)\,2}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2} f_\sigma(\nu\nu') f_\rho(\nu\nu')\right\} K^{(\pm)}_\rho$$

$$+ G\sum_{\nu\nu'} \frac{\omega\,\Xi^{(+)}_{\nu\nu'}\,\Xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu')\, K^{(\mp)}_\rho = L^{(\pm)}_\sigma \qquad (3.7а)$$

здесь

$$K^{(\pm)}_\rho = G\sum_{\nu\nu'} f_\rho(\nu'\nu)\,\Xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}\, Z^{(\pm)}(\nu\nu') \qquad (3.7б)$$

$$L^{(\pm)}_\sigma = G\sum_{\nu\nu'}\frac{f_\sigma(\nu'\nu)\,\Xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\left\{E_{\nu\nu'}\phi^{(\pm)}_{\nu\nu'} - \omega\,\phi^{(\mp)}_{\nu\nu'}\right\} \qquad (3.7в)$$

а величина $Z^{(\pm)}$, определяющая поправку к матрице плотности, дается выражением

$$(E^2_{\nu\nu'}-\omega^2)Z^{(\pm)}(\nu\nu') = f_\rho(\nu\nu')\left\{E_{\nu\nu'}\Xi^{(\pm)}_{\nu\nu'}K^{(\pm)}_\rho - \omega\,\Xi^{(\mp)}_{\nu\nu'}K^{(\mp)}_\rho\right\}$$

$$+ E_{\nu\nu'}\phi^{(\pm)}_{\nu\nu'} - \omega\,\phi^{(\mp)}_{\nu\nu'} \qquad (3.8)$$

Для эффективного поля из (2.19) легко получить при этом

$$\tilde V^{(\pm)}(\nu\nu') = V^{(\pm)}_{\nu\nu'}\ ; \quad \tilde{\bar V}^{(\pm)}(\nu\nu') = \bar V^{(\pm)}_{\nu\nu'} \pm i f_\rho(\nu\nu')\,K^{(\pm)}_\rho \qquad (3.8а)$$

(По дважды повторяющимся индексам σ, ρ везде понимается суммирование).

Величины $K^{(\pm)}$ -решения системы (3.7) - имеют полюса при значениях ω, равных собственным энергиям системы. Члены, не содержащие $K^{(\pm)}$ в (3.8), не имеют полюсов и поэтому не дают вклада в вероятность перехода (2.20). Сохраняя в (3.8) только члены с $K^{(\pm)}$ получаем

$$\sum_{\nu\nu'}\left\{\phi^{(+)}_{\nu'\nu}Z^{(+)}(\nu\nu') - \phi^{(-)}_{\nu'\nu}Z^{(-)}(\nu\nu')\right\}$$

$$= K^{(+)}_\sigma \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu\nu')\,\Xi^{(+)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\left\{E_{\nu\nu'}\phi^{(+)}_{\nu'\nu} + \omega\,\phi^{(-)}_{\nu'\nu}\right\}$$

$$- K^{(-)}_\sigma \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu\nu')\,\Xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2}\left\{E_{\nu\nu'}\phi^{(-)}_{\nu'\nu} + \omega\,\phi^{(+)}_{\nu'\nu}\right\}$$

что с учетом (3.7в) и (2.17) можно записать как

$$-\frac{1}{G}\left(K^{(+)}_\sigma L^{(+)*}_\sigma + K^{(-)}_\sigma L^{(-)*}_\sigma\right)$$

В результате из (2.20) находим для вероятности перехода

$$|\langle\omega_n|V|0\rangle|^2 = \left[\frac{\omega_n^2-\omega^2}{G\omega_n}\left(K^{(+)}_\sigma L^{(+)*}_\sigma + K^{(-)}_\sigma L^{(-)*}_\sigma\right)\right]_{\omega^2=\omega_n^2} \qquad (3.9)$$

Прежде чем переходить к решению уравнения (3.7) сделаем некоторые преобразования и упрощения. Воспользуемся соотношением (3.6) и исключим $\delta_{\sigma\rho}$ из первого члена (3.7а).

В результате простых преобразований получим

$$\delta_{\sigma\rho} - G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}\,\Xi^{(\pm)\,2}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') =$$

$$= g_{\sigma\rho} - (\omega^2 - 2\Delta^2 \mp 2\Delta^2) h_{\sigma\rho} \qquad (3.10а)$$

где введены обозначения

$$g_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})^2}{4E_\nu E_{\nu'}(E^2_{\nu\nu'}-\omega^2)} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') \qquad (3.10б)$$

$$h_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'}}{4E_\nu E_{\nu'}(E^2_{\nu\nu'}-\omega^2)} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') \qquad (3.10в)$$

Система (3.7) принимает вид

$$\left\{ g_{\sigma\rho} - (\omega^2 - 4\Delta^2) h_{\sigma\rho} \right\} K^{(+)}_\rho + r_{\sigma\rho} K^{(-)}_\rho = L^{(+)}_\sigma$$

$$r_{\sigma\rho} K^{(+)}_\rho + \left\{ g_{\sigma\rho} - \omega^2 h_{\sigma\rho} \right\} K^{(-)}_\rho = L^{(-)}_\sigma \qquad (3.11)$$

где в дополнение к (3.10) введено обозначение

$$r_{\sigma\rho} = G\sum_{\nu\nu'} \frac{\omega\, \Xi^{(+)}_{\nu\nu'} \Xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'}-\omega^2} f_\sigma(\nu'\nu) f_\rho(\nu\nu') \qquad (3.11а)$$

4. Анализ основных уравнений

Нас будут интересовать возбуждения с моментом и четностью 0^+. Для этой цели достаточно рассматривать в качестве f_σ

функции только r^2, для которых отличны от нуля матричные элементы двух типов: либо диагональные, либо между достаточно удаленными состояниями (отличающимися значениями главного квантового числа не менее чем на две единицы), причем величина тех и других матричных элементов одного порядка. Для низкоэнергетических возбуждений ($\omega^2 \lesssim E^2$) в суммах (3.10в) и (3.11а) далекими переходами можно пренебречь, тогда как в (3.10б) дают вклад только далекие переходы и здесь можно пренебречь ω^2. Кроме того, в (3.10б) суммирование проводится по широкому интервалу и матричные элементы от различных функций $f_\sigma f_\rho$ в среднем погашают друг друга. Таким образом, приближенно можно положить

$$g_{\sigma\rho} \approx \delta_{\sigma\rho}\, G\sum_{\nu\nu'} \frac{(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})^2}{4E_\nu E_{\nu'} E_{\nu\nu'}} \left| f_\sigma(\nu\nu') \right|^2 \qquad (4.1а)$$

$$h_{\sigma\rho} \approx G\sum_{\nu} \frac{f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu)}{E_{\nu\nu}(E^2_{\nu\nu}-\omega^2)} \qquad (4.1б)$$

$$r_{\sigma\rho} \approx G\sum_{\nu} \frac{2\epsilon_\nu \omega}{E_{\nu\nu}(E^2_{\nu\nu}-\omega^2)} f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu) \qquad (4.1в)$$

Для грубой оценки $g_{\sigma\rho}$ заменим в (4.1а) величину $(\epsilon_\nu - \epsilon_{\nu'})^2$ на $E^2_{\nu\nu'}$. (При этом завышается вклад переходов между состояниями, лежащими по одну сторону границы ферми). После этого сумма будет отличаться от (3.6) только отсутствием диагональных членов. В результате

$$g_{\sigma\sigma} \equiv g_\sigma \lesssim 1 - G\sum_\nu \frac{1}{2E_\nu} \left| f_\sigma(\nu\nu) \right|^2 \equiv 1 - \overline{f^2_{\sigma D}} \qquad (4.1в)$$

где $\overline{f^2_{\sigma D}}$ имеет смысл среднего квадрата диагональных матричных элементов. Если перенумеровать функции f_σ в порядке уменьшения плавности, начиная с f_0 =I (например по числу узлов внутри ядра), то

$$0 = g_0 < g_1 < g_2 < \ldots < 1$$

Правые части (3.IOв) и (3.6) имеют вид средних от $f_\sigma f_\rho$, но с различными весами. В (3.6) суммирование идет по широкому интервалу, что обеспечивает ортонормированность функций f_σ . В (3.IOв) и (3.IIа) эффективная область суммирования значительно меньше $(\sim\Delta)$ и зависит от ω^2 . При предельной хоатичности одночастичных уровней $f_\sigma f_\rho$ будут усредняться уже на интервале $\sim\Delta$, поэтому в этом случае $h_{\sigma\rho} \sim \delta_{\sigma\rho}$. Для реальных деформированных ядер, следует ожидать лишь частичного погашения недиагональных $h_{\sigma\rho}$. В сферических ядрах диагональные и недиагональные элементы могут быть одного порядка.

Для деформированных ядер можно использовать квазиклассическое приближение, заменив суммы (4.I) интегралами. Так, в (4.Iб) весовой множитель быстро убывает при удалении от Ферми границы, на расстояния, большие Δ , поэтому можно произвести замену

$$\frac{1}{E_{\nu\nu'}(E_{\nu\nu'}^2-\omega^2)} \longrightarrow \frac{1}{4\Delta^2}\,\gamma\!\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right)\delta(\epsilon)$$

где функция $\gamma(x)$ при $x^2<1$ имеет вид

$$\gamma(x) = \frac{\arcsin x}{x\sqrt{1-x^2}}$$

В результате

$$h_{\sigma\rho} \approx \frac{G\rho_0}{(2\Delta)^2}\,\gamma\!\left(\frac{\omega}{2\Delta}\right)\overline{f_{\sigma D}f_{\rho D}} \qquad (4.2)$$

Здесь ρ_0 - плотность уровней у границы Ферми, а $\overline{f_{\sigma D}f_{\rho D}}$ - среднее значение (на ширине $\sim\Delta$ у Ферми-границы) диагональных матричных элементов.

Перейдем к оценке (4.Iа). Величина $\mathcal{F}^{(+)}_{\nu\nu'}$, как видно из ее определения в (2.Iб), меняет знак при взаимной замене частичных и дырочных состояний ($u \leftrightarrow v$). Поэтому при симметричном относительно Ферми-границы расположении одночастичных уровней (и величин матричных элементов), суммы, содержащие пер-

вые степени $\mathcal{F}^{(+)}$ обращаются в нуль. В реальных случаях указанные суммы, как правило, оказываются очень малыми.

Если полностью пренебречь суммами от линейных по $\mathcal{F}^{(+)}$ по выражений, то (3.II) распадается на две независимых системы уравнений для $K^{(+)}$ и $K^{(-)}$. Соответствующие ветви возбуждения будем условно называть T-четными и T - нечетными (сохранив эти названия и для случая слабого перемешивания, когда $r_{\sigma\rho} \neq 0$ но мало).

Для полукачественного анализа решений (3.II) рассмотрим случай, когда недиагональными элементами $g_{\sigma\rho}, h_{\sigma\rho}, r_{\sigma\rho}$ можно пренебречь. Кроме того, мы сохраним лишь первые степени малых величин $r_{\sigma\sigma}$. В результате для решений (3.II) находим

$$K_\sigma^{(+)} \approx \frac{1}{g_\sigma-(\omega^2-4\Delta^2)h_\sigma}\left[L_\sigma^{(+)} - \frac{r_\sigma}{g_\sigma-\omega^2 h_\sigma}L_\sigma^{(-)}\right]$$

$$K_\sigma^{(-)} \approx \frac{1}{g_\sigma-\omega^2 h_\sigma}\left[L_\sigma^{(-)} - \frac{r_\sigma}{g_\sigma-(\omega^2-4\Delta^2)h_\sigma}L_\sigma^{+}\right] \qquad (4.3)$$

где для сокращения диагональные элементы $g_{\sigma\sigma}, h_{\sigma\sigma}, r_{\sigma\sigma}$ обозначены $g_\sigma, h_\sigma, r_\sigma$) (в данном случае индекс σ нумерует также ветви возбуждений).

Энергия возбужденных состояний определяются для T - четных и T -нечетных ветвей из уравнений

$$\omega^2-4\Delta^2 = g_\sigma/h_\sigma \qquad (T\text{-четн.}) \qquad (4.4а)$$

$$\omega^2 = g_\sigma/h_\sigma \qquad (T\text{-нечетн.}) \qquad (4.4б)$$

Наинизшее значение ω^2 получается для σ =0. Соответствующая T - четная ветвь имеет энергию $\omega_0^2=4\Delta^2$ (g_0 =0)[ж] . Что касается аналогичного T - нечетного решения ω_0^2=0, то оно не соответствует какому-либо физическому возбуждению, а отражает

ж) Возбуждения этого типа подробно исследовались Бесом и Броглиа /2/ и были названы ими парными колебаниями (pairing vibrations).

лишь факт несохранения числа частиц в принятом методе учета куперовского спаривания ("духовое состояние"). Физическим T - нечетным возбуждениям соответствуют решения $\sigma \geqslant 1$.

Исследуем теперь энергетический спектр возбуждений с $\omega \geqslant 1$. Рассмотрим поведение правой части (4.4) при изменениях ω^2. Как следует из (4.Iб), величина h_σ положительна, при $\omega^2 < \min E_{\nu\nu}^2$ в точках $\omega^2 = E_{\nu\nu}^2$ обращается в бесконечность, а в каждом промежутке между соседними $E_{\nu\nu}$ проходит через нуль. Таким образом, для каждого $\sigma \geqslant 1$ уравнения (4.4) определяют целый спектр возбуждений. Причем для T -четных состояний спектр начинается выше 2Δ, а нижнее состояние T - нечетного спектра лежит ниже границы двухквазичастичных возбуждений ($\min \omega_\sigma < \min E_{\nu\nu}$).

Используя квазиклассическое приближение (4.2), для нижнего T - нечетного состояния находим

$$x^2 \gamma(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{g}{G\rho_0 \, r_0^2} \equiv B \qquad (4.5)$$

$$x = \omega / 2\Delta$$

Решение этого секулярного уравнения очевидно дает $\omega < 2\Delta$, $(x<1)$.

5. Вероятность переходов

Вблизи соответствующих полюсов величины (4.3) имеют следующий вид (здесь и ниже верхний знак для T -четных, нижний - для T - нечетных ветвей).

$$K_\sigma^{(\pm)} \approx \frac{1}{\omega_\sigma^2 - \omega^2} \, \frac{1}{h_\sigma \Lambda_\sigma} \left\{ L_\sigma^{(\pm)} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(\mp)} \right\}$$

$$K_\sigma^{(\mp)} \approx \frac{1}{\omega_\sigma^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{h_\sigma \Lambda_\sigma} \cdot \frac{\pm r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(\pm)} \qquad (5.1)$$

здесь

$$\Lambda_\sigma = 1 - \frac{d}{d\omega^2}\left(\frac{g_\sigma}{h_\sigma}\right) \qquad (5.2)$$

и все величины, определяющие вычеты, берутся при значении $\omega^2 = \omega_\sigma^2$ (Подчеркнем, что ω_σ, а следовательно, и все зависящие от ω^2 величины, вообще говоря, различны для T- четных и T -нечетных ветвей).

В рассмотренном выше приближении для амплитуды перехода под действием внешнего поля находим из (3.9)

$$\left|(\omega_\sigma \pm |V|0)\right|^2 = S_\sigma^2 \left\{ \left|L_\sigma^{(\pm)}\right|^2 \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \left(L_\sigma^{(\pm)*} L_\sigma^{(\mp)} + L_\sigma^{(\mp)*} L_\sigma^{(\pm)} \right) \right\}$$

$$\approx S_\sigma^2 \left| L_\sigma^{(\pm)} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} L_\sigma^{(\mp)} \right|^2 \qquad (5.3)$$

$$S_\sigma = \left(G \omega_\sigma h_\sigma \Lambda_\sigma \right)^{-1/2} \qquad (5.4)$$

Отсюда с учетом (3.7в) (с точностью до произвольной фазы), получаем

$$(\omega_\sigma \pm |V|0) = i S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E_{\nu\nu'}^2 - \omega_\sigma^2} \left\{ \left(E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right) \phi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \right.$$

$$\left. - \left(\omega_\sigma \xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \xi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right) \phi_{\nu\nu'}^{(\mp)} \right\} \qquad (5.5)$$

Рассмотрим более детально вероятность возбуждения найденных состояний конкретными внешними полями. Мы ограничимся двумя практически интересными случаями, рассмотрев электромагнитные переходы в основное состояние (имея в виду EO - переходы, т.е. T - четное поля $V^{(+)}$) и возбуждение данного состояния при двойном стриппинге ((t, p)) - реакция, поле V - меняющее число частиц на две).

EO - <u>переходы в основное состояние</u>. Соответствующая амплитуда дается выражениями (5.5) и (2.17). Учитывая только поле $V^{(+)}$, найдем для T - четных состояний

$$(\omega_\sigma + |V|0) = -S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{\eta^{(+)}_{\nu\nu'} f_\sigma(\nu'\nu) V^{(+)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} \Big[E_{\nu\nu'} \xi^{(+)}_{\nu\nu'} - \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \omega_\sigma \xi^{(-)}_{\nu\nu'} \Big] \tag{5.6}$$

и соответственно для T - нечетных состояний

$$(\omega_\sigma - |V|0) = S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{\eta^{(+)}_{\nu\nu'} f_\sigma(\nu'\nu) V^{(+)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2} \Big[\omega_\sigma \xi^{(-)}_{\nu\nu'} + \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \xi^{(+)}_{\nu\nu'} \Big] \tag{5.7}$$

Амплитуды (5.6) и (5.7) определяются двумя различными суммами по одночастичным состояниям от произведения матричных элементов f_σ и $V^{(+)}$. Пренебрегая в них далекими переходами и представляя внешнее поле в виде разложения

$$V^{(+)} = \sum_\rho v^{(+)}_\rho f_\rho \tag{5.8}$$

получим следующие оценки

$$G \sum_{\nu\nu'} \frac{E_{\nu\nu'} \eta^{(+)}_{\nu\nu'} \xi^{(+)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2_\sigma} f_\sigma(\nu'\nu) V^{(+)}_{\nu\nu'}$$

$$\approx \sum_\rho v^{(+)}_\rho G \sum_\nu \frac{4\Delta e_\nu}{E_{\nu\nu}(E^2_{\nu\nu} - \omega^2_\sigma)} f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu) \approx \sum_\rho \frac{2\Delta}{\omega_\sigma} r_{\sigma\rho} v^{(+)}_\rho$$

$$G \sum_{\nu\nu'} \frac{\eta^{(+)}_{\nu\nu'} \xi^{(-)}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2_\sigma} f_\sigma(\nu'\nu) V^{(+)}_{\nu\nu'}$$

$$\approx \sum_\rho v^{(+)}_\rho G \sum_\nu \frac{2\Delta f_\sigma(\nu\nu) f_\rho(\nu\nu)}{E_{\nu\nu}(E^2_{\nu\nu} - \omega^2_\sigma)} \approx 2\Delta \sum_\rho h_{\sigma\rho} v^{(+)}_\rho .$$

Следуя принятому выше приближению и сохраняя лишь диагональные члены в $h_{\sigma\rho}, r_{\sigma\rho}$ (и при этом только первые степени $r_{\sigma\sigma}$), получим, используя (4.4)

$$(\omega_\sigma + |V|0) \approx v^{(+)}_\sigma g_\sigma S_\sigma \frac{2\Delta}{\omega_\sigma} \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} \tag{5.9а}$$

$$(\omega_\sigma - |V|0) \approx v^{(+)}_\sigma g_\sigma S_\sigma \frac{2\Delta}{\omega_\sigma} \tag{5.9б}$$

Из (5.9) видно, что вероятность перехода из T - четного состояния, по сравнению с аналогичным переходом из T - нечетного, содержит фактор запрета $(r_\sigma / 4\Delta^2 h_\sigma)^2$

<u>Возбуждение при (t, p) - реакции.</u> Оператор, вызывающий переход в этом случае, можно представить в виде

$$V = 2 \sum_{\nu\nu'} \overline{V}_{\nu\nu'} a^+_{\tilde{\nu}} a^+_{\nu'} \tag{5.10}$$

что в обозначениях, принятых в (2.4), эквивалентно условию $\overline{V}^{(+)} = \overline{V}^{(-)} = \overline{V}$, $V^{(\pm)} = 0$. Из (5.4) и (2.17) при этом следует

$$(\omega_\sigma \pm |\overline{V}|0) = \pm S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} \frac{f_\sigma(\nu'\nu) \overline{V}_{\nu\nu'}}{E^2_{\nu\nu'} - \omega^2_\sigma} \Big\{ E_{\nu\nu'} \xi^{(\pm)^2}_{\nu\nu'} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \xi^{(\mp)^2}_{\nu\nu'} + \Big(1 \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\Big) \omega_\sigma \xi^{(+)}_{\nu\nu'} \xi^{(-)}_{\nu\nu'} \Big\} \tag{5.11}$$

Разлагая $\overline{V}$ по функциям f_ρ аналогично (5.8) (с коэффициентами $\overline{v}_\rho$), приведем суммы по одночастичным состояниям в (5.11) к уже известным выражениям (см. (3.10), (3.11а)). Производя затем обычные приближения и используя (4.4), найдем

$$\left(\omega_\sigma \pm |\bar{V}|0\right) = \pm \bar{v}_\sigma S_\sigma \left(1 \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\right) \tag{5.12}$$

Из (5.12) видно, что в отличие от электромагнитных переходов, вероятность возбуждения T - четных и T -нечетных состояний при (t,p) - реакций одного порядка.

Переход в основное состояние конечного ядра при (t,p) - реакции определяется средним значением (5.10) по квазичастичному вакууму

$$(0|\bar{V}|0) = 2\sum_\nu \bar{V}_{\nu\nu} u_\nu v_\nu = \sum_\nu \bar{V}_{\nu\nu} \frac{\Delta}{E_\nu} \tag{5.13}$$

Вследствие условия ортогональности (3.6) в (5.13) дает вклад только нулевая компонента разложения $\bar{V}$ по f_σ. В результате

$$(0|\bar{V}|0) = \bar{v}_0 \frac{2\Delta}{G} \tag{5.14}$$

Из (5.12) и (5.14) находим относительную вероятность перехода в возбужденное и основное состояние при (t,p) - реакции

$$\left|\frac{(\omega_\sigma \pm |\bar{V}|0)}{(0|\bar{V}|0)}\right|^2 \approx \left(\frac{\bar{v}_\sigma}{\bar{v}_0}\right)^2 \left(\frac{G S_\sigma}{2\Delta}\right)^2 \left\{1 \mp \frac{r_\sigma}{2\Delta^2 h_\sigma}\right\} \tag{5.15}$$

Полученные общие формулы применим к конкретному случаю нижних состояний каждой ветви.

<u>Для T - четной ветви</u> наинизшему возбуждению ($\sigma = 0$) соответствуют значения параметров (см. (4.1) и (5.4)

$$f = 1;\quad g = 0;\quad \omega = 2\Delta;\quad \Lambda = 1$$

$$h = G\sum_\nu \frac{1}{8E_\nu \mathcal{E}_\nu^2};\quad r = G\sum_\nu \frac{\Delta}{2E_\nu \mathcal{E}_\nu};\quad S = \frac{2}{G}\left(\sum_\nu \frac{\Delta}{E_\nu \mathcal{E}_\nu^2}\right)^{-1/2} \tag{5.16}$$

Из (5.15) и (5.16) находим (малой величиной r пренебрегаем)

$$\left|\frac{(\omega + |\bar{V}|0)}{(0|\bar{V}|0)}\right|^2 \approx \left(\sum_\nu \frac{\Delta^3}{E_\nu \mathcal{E}_\nu^2}\right)^{-1} \sim \frac{1}{(\rho_0\Delta)^2} \tag{5.17}$$

Для деформированных ядер $\rho_0\Delta$ 4 ÷ 5, поэтому сечение возбуждения данного состояния при (t,p) - реакции на порядок ниже чем для перехода в основное состояние.

Амплитуда $E0$ - перехода из наинизшего T - четного состояния, как следует из (5.9а), равна нулю в рассматриваемом приближении ($g_0 = 0$).

Для наинизшего T - нечетного уровня ($\sigma = 1$), к сожалению, нельзя получить столь простых оценок без дополнительных упрощений. Мы ограничимся квазиклассическим приближением (4.2). Используя секулярное уравнение (4.5), находим (при $\omega^2 = \omega_1^2$)

$$h = \frac{g}{\omega^2};\quad h' \cong \frac{g}{32\Delta^4 B}\,\frac{(1+2B)x^2 - B}{x^4(1-x^2)}$$

$$\Lambda = \frac{B + x^2}{2B(1-x^2)};\quad S = \sqrt{\frac{4\Delta B}{G g}\cdot\frac{x(1-x^2)}{B + x^2}} \tag{5.18}$$

где, как и в (4,5), $x = \omega/2\Delta$; $B = g/G\rho_0 \bar{f}_0^2$. Из (5.18) и (5.15) следует

$$\left|\frac{(\omega - |\bar{V}|0)}{(0|\bar{V}|0)}\right|^2 \approx \left(\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_0}\right)^2 \frac{1}{\rho_0\Delta \bar{f}_0^2}\;\frac{x(1-x^2)}{B + x^2} \tag{5.19}$$

численную оценку (5.I9) можно сделать лишь после решения трансцендентного уравнения (4.5). Мы ограничимся двумя предельными случаями, допускающими аналитическое решение.

$B \ll 1$ В этом случае $x^2 \approx B$ и последний множитель в (5.I9) оказывается равным

$$\frac{x(1-x^2)}{B+x^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{B}} \gg 1 \qquad (5.20а)$$

$B \gg 1$ При этом $x^2 \approx 1 - \frac{\pi^2}{4B^2}$ и

$$\frac{x(1-x^2)}{B+x^2} \approx \frac{\pi^2}{4B^3} \ll 1 \qquad (5.20б)$$

Из (5.20) вытекает, что отношение (5.I9) при вариации параметра B может меняться в широких пределах. Практически величина B порядка единицы, поэтому сечение возбуждения состояния $\sigma = I$ заметно меньше сечения с переходом в основное состояние.

Рассмотрим вероятность EO - перехода в основное состояние. Из (5.9б) и (5.I8) имеем

$$\left|(\omega_1 - |V|0)\right|^2 \approx |d_1^{(+)}|^2\, 4\rho_0 \Delta f_0^2\, \frac{B^2(1-x^2)}{x(B+x^2)} \qquad (5.2I)$$

В двух рассмотренных выше предельных случаях последний множитель в (5.2I) является малым

$$\frac{B^2(1-x^2)}{x(B+x^2)} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{B} & ; \quad B \ll 1 \\ \frac{\pi^2}{4B} & ; \quad B \gg 1 \end{cases} \qquad (5.22)$$

однако для $B \sim I$ величина (5.2I) может достигать (или даже превосходить) единицу. Это означает, что амплитуда EO- пере-

хода из T - нечетного состояния в основное не содержит каких-либо факторов запрета и может достигать R^2 (R - радиус ядра).

Формула (5.5), следствия которой мы рассматривали в этом разделе, позволяет вычислять переходы только из данного состояния в основное. Вероятность перехода в другие возбужденные состояния (например, $E2$ - переходы в первый 2 + уровень вращательного мультиплета основного состояния, или γ - вибрационную полосу) можно вычислить, имея явное выражение для оператора фонона (см.след.раздел).

6. <u>Природа T - четных и T -нечетных возбуждений</u>

Природу возбужденных состояний можно непосредственно усмотреть из вида соответствующего фонона - порождающего оператора. Сравнивая выражения (5.5) и (2.25), найдем коэффициенты, определяющие оператор фонона:

$$A_\sigma^{(\pm)}(\nu'\nu) = \pm \frac{1}{2} S_\sigma G \frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E_{\nu\nu'}^2 - \omega_\sigma^2}\left[E_{\nu\nu'} \Xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\omega_\sigma \Xi_{\nu\nu'}^{(\mp)}\right]$$

$$A_\sigma^{(\mp)}(\nu'\nu) = \pm \frac{1}{2} S_\sigma G \frac{f_\sigma(\nu'\nu)}{E_{\nu\nu'}^2 - \omega_\sigma^2}\left[\omega_\sigma \Xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma} E_{\nu\nu'} \Xi_{\nu\nu'}^{(\mp)}\right] \qquad (6.I)$$

Подставляя (6.I) в (2.26), получим разложение оператора фонона по квазичастичным операторам

$$\alpha_\sigma = \pm \frac{1}{2} S_\sigma G \sum_{\nu\nu'} f_\sigma(\nu'\nu)\left\{\frac{1}{E_{\nu\nu'} - \omega_\sigma}\left(\Xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \mp \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\Xi_{\nu\nu'}^{(\mp)}\right) d_\nu d_{\tilde{\nu}'} \right.$$

$$\left. \mp \frac{1}{E_{\nu\nu'} + \omega_\sigma}\left(\Xi_{\nu\nu'}^{(\pm)} \pm \frac{r_\sigma}{4\Delta^2 h_\sigma}\Xi_{\nu\nu'}^{(\mp)}\right) d_{\tilde{\nu}}^+ d_{\nu'}^+ \right\} \qquad (6.2)$$

Пренебрегая для простоты анализа малыми членами $\sim r_\sigma$ и используя (2.16), имеем

$$\mathcal{O}_{\sigma} = \pm \frac{1}{2} S_{\sigma} G \sum_{\nu\nu'} f_{\sigma}(\nu'\nu)(u_{\nu}u_{\nu'} \mp v_{\nu}v_{\nu'})\left\{\frac{\alpha_{\nu}\alpha_{\bar{\nu}'}}{E_{\nu\nu'}-\omega_{\sigma}} \mp \frac{\alpha^{+}_{\bar{\nu}}\alpha^{+}_{\nu'}}{E_{\nu\nu'}+\omega_{\sigma}}\right\} \qquad (6.3)$$

Из (6.3) видно, что в фононный оператор набирается из широкой области квазичастичных состояний, вклад которых при удалении от ферми-границы спадает медленно ($\sim E^{-1}$). При этом вклады частичных и дырочных состояний в T - четный фонон имеют противоположные знаки, а в T - нечетный - одинаковые. Таким образом, с "микроскопической" точки зрения, механизм найденных возбуждений состоит в когерентных переходах квазичастичных пар между уровнями в широкой области около Ферми - границы.

С макроскопической точки зрения коллективные колебания можно характеризовать эффективным полем, возникающим в системе в ответ на внешнее воздействие. Как видно из (3.8а) внешнее поле обычного вида ($V^{(t)}$) проникает в систему без искажения [x], а поле, меняющее число частиц $V^{(t)}$,вызывает соответствующую поляризацию в системе. Характер этой поляризации очевиден: на фоне однородного спаривания ($\Delta = const$) возникают флуктуации $\Delta(r)$, пространственные распределения которых определяются функциями $f_\sigma(r)$. Несмотря на одинаковое пространственное распределение, T - четные и T - нечетные возбуждения формируются по-разному, что и приводит к резкому различию их свойств (слабые $E0$ - переходны в основное состояние для T - четных и сильные $E0$ - для T - нечетных состояний).

Выше мы нигде не конкретизировали вид функций $f_\sigma(r)$, определенных лишь условием ортонормировки (3.6). В принципе можно использовать различные полные наборы функций, которые

ж) Этот результат является следствием пренебрежения взаимодействием в канале частица-дырка. При его учете возникает также искажение $V^{(t)}$, однако они не играют принципиальной роли.

будут менять коэффициенты уравнений (3.11), но не их решения. (Это справедливо, естественно, для точных решений, но не для приближенных (4.3). Разумно использовать в качестве f_σ полиномы до r^2 , для которых найдем

$$f_0 = 1 \; ; \; f_2 = \left[\overline{r^4} - (\overline{r^2})^2\right]^{-1/2} \cdot (r^2 - \overline{r^2}) \; ; \; \ldots \qquad (6.4)$$

где черта означает обычное усреднение (3.6) по объему ядра

$$(\overline{r^2} = \frac{3}{5} R^2 \; ; \; \overline{r^4} = \frac{3}{7} R^4 ; \ldots). \text{ж)}$$

В этой работе мы имеем в виду в основном деформированные ядра, однако рассмотренные возбуждения могут осуществляться и в сферических ядрах, но из-за специфических условий, этот случай требует дополнительных исследований и более аккуратных оценок.

ж) К сожалению, использование осцилляторной модели (или модели Нильсона) для расчетов с функциями (6.4) из-за случайного вырождения (матричные элементы от r^2 в этих моделях не зависят от ℓ) не допустимо.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Вывод условия градиентной инвариантности взаимодействия (3.3).

В матричном представлении типа (2.2) малое градиентное преобразование имеет вид

$$\Psi \rightarrow (1 - i\beta\hat{\phi})\Psi \qquad (\text{П.1})$$

где $\hat{\phi} = \phi(r)\sigma^{z}$. Условие инвариантности взаимодействия относительно (П.1) принимает вид

$$\hat{G}_{12}(\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2) - (\hat{\phi}_1 + \hat{\phi}_2)\hat{G}_{12} = 0 \qquad (\text{П.2})$$

Умножаем (П.2) на матрицу плотности $\hat{\rho}_2^{\,0}$ и берем шпур по переменной 2 :

$$Tr_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2^{\,0}\}\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_1 Tr_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2^{\,0}\} = Tr_2\{\hat{G}_{12}(\hat{\rho}_2^{\,0}\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2^{\,0})\} \qquad (\text{П.3})$$

Воспользуемся теперь выражением для самосогласованного гамильтониана $\hat{S}^{0}$ (см./4/ формула (2.21)

$$\hat{S}_1^{\,0} = \hat{\varepsilon}_1 - Tr_2\{\hat{G}_{12}\hat{\rho}_2^{\,0}\} \qquad (\text{П.4})$$

(Здесь $\hat{\varepsilon} = \varepsilon\sigma^{z}$ - кинетическая энергия). Из (П.3) и (П.4) получаем

$$Tr_2\{\hat{G}_{12}(\hat{\rho}_2^{\,0}\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2^{\,0})\} = (\hat{\phi}_1\hat{S}_1^{\,0} - \hat{S}_1^{\,0}\hat{\phi}_1) - (\hat{\phi}_1\hat{\varepsilon}_1 - \hat{\varepsilon}_1\hat{\phi}_1) \qquad (\text{П.5})$$

Рассмотрим матричную структуру (П.5). Так как $\hat{\phi}, \hat{\varepsilon} \sim \sigma^{z}$ а T - четные величины $\hat{S}^{0}$ и $\hat{\rho}^{0}$ содержат только члены с σ^{z} и σ^{y} (см.2.10), то второй член правой части (П.5) пропорцио-

нален единичной матрице, а первый содержит кроме того член $\sim\sigma^{x}$. Таким образом, (П.5) эквивалентно двум независимым соотношениям. Члены $\sim\sigma^{x}$ в (П.5) согласно (2.10) имеют вид

$$Tr_2\{(\phi_2 G_{12}^{x} + G_{12}^{x}\phi_2)\sigma^{y}\rho_2^{\,0}\} = \phi_1\Delta_1 + \Delta_1\phi_1 \qquad (\text{П.6})$$

где введено обозначение $\hat{G}_{12}^{x}\sigma_1^{x}\sigma_2^{x}$ для соответствующего члена во взаимодействии $\hat{G}_{12}$. Заметим, что (формулы (2.33) и (2.4) работы /4/)

$$\langle 12|G_{12}^{x}|2'1'\rangle = \frac{1}{2}\langle 1\bar{1}'|G|\bar{2}2'\rangle \qquad (\text{П.7})$$

Для постоянного спаривания ($\Delta = const$), подставляя в (П.6)

$$\hat{\rho}^{0} = \frac{\varepsilon}{E}\sigma^{z} - \frac{\Delta}{E}\sigma^{y} \qquad (\text{П.8})$$

после очевидных преобразований находим

$$\sum_2 \langle 2|\phi_2 G_{12}^{x} + G_{12}^{x}\phi_2|2\rangle\frac{1}{E_2} = -\phi_1 \qquad (\text{П.9})$$

откуда с учетом (П.7) следует (3.3).

Заметим, что требование сохранения тока частиц в произвольном внешнем поле $V(r)$ приводит вместо (П.5) к уравнению

$$Tr_1\{\hat{\rho}_1^{(1)}[Tr_2\{\hat{G}_{12}(\hat{\rho}_2^{\,0}\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2^{\,0})\} - (\hat{\phi}_1\hat{S}_1^{\,0} - \hat{S}_0^{\,1}\hat{\phi}_1) + (\hat{\phi}_1\hat{\varepsilon}_1 - \hat{\varepsilon}_1\hat{\phi}_1)]\} = 0 \qquad (\text{П.10})$$

Литература

I. О.Бор, Б.Моттельсон, частное сообщение.
A.Bohr, Congrès International de physique Nucléaire Paris 1964. Ed. Centre National de la Recherche Scientifique. Vol. 1. p. 487.

2. D.R. Bès; R.A. Broglia. Preprint NORDITA, sept. 1965.

3. S.T. Belyaev. In „Selected Topics in Nuclear Theory" Intern. Atomic Energy Agency. Vienna 1963

4. S.T. Belyaev. Nucl. Phys. 64 (1965) 17

5. А.Б. Мигдал. ЖЭТФ, 33 (1959) 249; Nucl. Phys. 13 (1959) 655

6. А.Б.Мигдал "Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер" изд."Наука", г.Москва 1965 г.