ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

X

БР 116-/468

препринт 53

О.Я.Савченко

"Спиновые частицы в рамках обобщённого уравнения Кеммера"

НОВОСИБИРСК 1966

А Н Н О Т А Ц И Я

Предполагается, что частицы со спином $n/2$ подчиняются обобщенному уравнению Кеммера, фундаментальные матрицы которого являются суммой n -коммутирующих групп γ -матриц Дирака. В рамках этого предположения находятся энергетические уровни частиц со спинами I/2, I, 3/2, 2 в постоянном магнитном поле. В дополнении вводится аналог уравнения Брейта для частиц с разными спинами и находится Зеемановское смещение уровней в системе дираковская частица + частица с нулевым спином.

1
Государственная
БИБЛИОТЕКА
СССР
имени
В. И. Ленина
1968 г.
98741

Уравнения, описывающие частицы без аномального магнитного момента со спинами $1/2, 0, 1$ можно записать в форме [I,2] :

$$\beta_i^{(n)} k_i \psi^{(n)} = k_0 \psi^{(n)}, \tag{I}$$

k_i - оператор четырехвектора частицы, $\beta_i^{(n)}$ матрицы, свойства которых определяются спином частицы. Если $\beta_i^{(n)}$ γ - матрица Дирака, уравнение (I) описывает частицы со спином I/2 [I] . Если $\beta_i^{(n)}$ является суммой двух коммутирующих групп γ-матриц Дирака, [2] ,

$$\beta_i^{(2)} = 1/2(\gamma_i^{(1)} + \gamma_i^{(2)}). \tag{2}$$

(I) описывает частицы со спином 0 и I [2,3] . В последнем случае (I) переходит в уравнение типа уравнения Брейта, которое описывало бы две одинаковые частицы при условии совпадения их координат. Поэтому естественно предположить, что для частицы со спином $n/2$,

$$\beta_i^{(n)} = 1/n \sum_{j=1}^{n} \gamma_i^{(j)} \tag{3}$$

т.е., что эти частицы состоят из n одинаковых дираковских частиц, на движении которых наложено условие - совпадение их координат в рамках уравнения типа уравнения Брейта для n - частиц. Ниже находятся уровни энергий частиц со спином $1/2$, 1 , $3/2$, 2 при предположении (3). В этом случае (I) переписывается в обозначениях [I] в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} [\gamma_1^{(j)}(p_1 - 1/2 eHx_2) + \gamma_2^{(j)}(p_2 + 1/2 eHx_1) + \gamma_3^{(j)} p_3 + \gamma_4^{(j)} \varepsilon] \psi^{(n)} = n\mathcal{H} \cdot \psi_1^{(n)} \quad \mathcal{H} = \bar{k}_0 = hck_0 \tag{4}$$

В случае $p_3 = 0$, одно из решений в числах имеет следующую структуру:

$$\psi^{(n)} = (a_0 + a_1 \sum_{j=1}^{n} \gamma_1^{(j)} + a_2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n}{}' \gamma_1^{(j)} \gamma_2^{(i)} + \ldots) \prod_{j=1}^{n} (1 \pm i\gamma_{12}^{(j)})(1 + \gamma_4^{(j)}). \tag{5}$$

Подстановка (5) в (4) (с последующим применением заутеровской методики освобождения от гиперкомплексных чисел [I]) приводит к уравнениям:

$$(\mathfrak{M}+\varepsilon_1)\mathfrak{a}_0+\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_1=0,$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1+\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_0=0, \qquad (6.I)$$

для частицы со спином I/2;

$$(\mathfrak{M}+\varepsilon_2)\mathfrak{a}_0+{}^1\!/\!_2\,\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_1=0,$$

$$\mathfrak{M}\mathfrak{a}_1+\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_0+\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_2=0, \qquad (6.2)$$

$$(\mathfrak{M}-\varepsilon_2)\mathfrak{a}_2+{}^1\!/\!_2\,\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_1=0,$$

для частицы со спином I;

$$(3\mathfrak{M}+3\varepsilon_3)\mathfrak{a}_0+\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_1=0,$$

$$(3\mathfrak{M}+\varepsilon_3)\mathfrak{a}_1+3\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_0+2\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_2=0, \qquad (6.3)$$

$$(3\mathfrak{M}-\varepsilon_3)\mathfrak{a}_2+3\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_3+2\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_1=0,$$

$$(3\mathfrak{M}-3\varepsilon_3)\mathfrak{a}_3+\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_2=0,$$

для частицы со спином 3/2;

$$(2\mathfrak{M}+2\varepsilon_4)\mathfrak{a}_0+{}^1\!/\!_2\,\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_1=0.$$

$$(2\mathfrak{M}+\varepsilon_4)\mathfrak{a}_1+2\mathfrak{p}_-\mathfrak{a}_0+\mathfrak{p}_+\mathfrak{a}_2=0, \qquad 6.4)$$

$$2\mathcal{A} a_2 + \tfrac{3}{2} p_- a_1 + \tfrac{3}{2} p_+ a_3 = 0,$$

$$(2\mathcal{A} - E_4) a_3 + 2 p_+ a_4 + p_- a_2 = 0,$$

$$(2\mathcal{A} - 2E_4) a_4 + \tfrac{1}{2} p_- a_3 = 0,$$

для частиц со спином 2;

В уравнениях (6) введены обозначения:

$$p_\pm = p_1 - \tfrac{1}{2} eHx_2 \pm i(p_2 + \tfrac{1}{2} eHx_1). \tag{7}$$

Подстановки типа

$$a_i = C_i p_-^i f_n \tag{8}$$

где

$$f_n = r^{|m|} L^l_{n+l}(\tfrac{1}{2}|eH|r^2) \exp i(m\varphi + E_n t + \tfrac{1}{2}|eH|r^2), \tag{9}$$

l, n', $|m|$ – целые положительные числа, приводит (6) при использовании соотношений

$$p_\pm p_\mp f_n = -\{|eH|(2n'+2l+1) \pm eH\} f_n \tag{10}$$

к алгебраической системе уравнений. Эти уравнения приводят к следующим равенствам, в неявном виде определяющим E:

$$|keH| + \mathcal{A}^2 - E_1^2 \pm eH = 0 \tag{II.I}$$

$$|keH| + \mu^2 - \varepsilon_2^2 \pm \frac{\varepsilon_2}{\mu}\tilde{e}H = 0, \tag{II.2}$$

$$|keH| + 5\mu^2 - \varepsilon_3^2 - 2\sqrt{4\mu^4 \pm 4\mu\varepsilon_3\tilde{e}H + \tilde{e}^2H^2} = 0 \tag{II.3}$$

$$|keH| + \tfrac{1}{2}\left(5\mu^2 - 2\varepsilon_4^2 \mp \frac{\varepsilon_4}{\mu}\tilde{e}H - \sqrt{\frac{9}{4}\mu^4 \pm \frac{27}{4}\mu\varepsilon_4\tilde{e}H + \frac{9}{16}\tilde{e}^2H^2\left(4 + \frac{\varepsilon_4^2}{\mu^2}\right)}\right) = 0, \tag{II.4}$$

где

$$k = 2(n' + \ell) + 1. \tag{I2}$$

Из (II) следует, что в нерелятивистском приближении уровни энергий для всех частиц совпадают:

$$\varepsilon_n = \mu + |k'\tilde{e}H|\mu^{-1}, \tag{I3}$$

k' – целые числа.

Однако они отличаются в релятивистском случае. С точностью до членов порядка I/

$$\varepsilon_1^2 = \mu^2 + 2|k'\tilde{e}H|, \tag{I4.I}$$

$$\varepsilon_2^2 = \mu^2 + 2|k'\tilde{e}H|(1 \pm \gamma_n), \qquad \gamma_n = \tilde{e}H/2\mu^2 \tag{I4.2}$$

$$\varepsilon_3^2 = \mu^2 + 2|k\bar{e}H|(1 \pm 2\Gamma_{\mu}), \tag{I4.3}$$

$$\varepsilon_4^2 = \mu^2 + 2|k\bar{e}H|(1 \pm 3\Gamma_{\mu}). \tag{I4.4}$$

Согласно (I) величина нижнего уровня не зависит от величины магнитного поля:

$$\varepsilon_n = \pm\mu . \tag{I5}$$

Хотя анализ уравнения (I,3) нельзя считать полным (симметричное решение типа

$$\Psi_{\pm}^{(n)} = \Big(a_0 + a_1\sum_{j=1}^{n}\Gamma_1^{(j)} + a_2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_1^{(j)}\Gamma_1^{(k)} + \dots\Big)\cdot\sum_{j=1}^{n}\Gamma_5^{(j)}\cdot\prod_{j=1}^{n}(1 \pm i\gamma_{12}^{(j)})(1+\Gamma_4^{(j)}) \tag{I6}$$

не анализируется), полученные результаты дают возможность сделать следующий вывод: предположение (3) в релятивистском случае не дает для частиц со спином $n/2$ ($n \neq 1$) уровни, которые являлись бы суммой уровней n -дираковских частиц. Это означает, что предположение (3) не равноценно модели частицы со спином $n/2$, как совокупности n -дираковских частиц, на движение которых наложено условие - совпадение их координат при полной независимости их спиновых состояний.

Д О П О Л Н Е Н И Е

Обобщенное уравнение Брейта.

Предположение (3) приводит к естественному обобщению уравнения Брейта

$$(k_{11}\beta_{11}^{(m)}+k_{12}\beta_{12}^{(m)}+V_H)\Psi=(k_{01}+k_{02})\Psi, \tag{17}$$

которое, возможно, описывает поведение двух частиц с разными спинами в постоянном магнитном поле. Так как при электромагнитном взаимодействии частиц со спинами 1/2 оператор

$$\bar V_H=\Gamma_{11}\Gamma_{12}V(1+\tfrac12\Gamma_{11}\Gamma_{12}V\bar K_0^{-1}+\dots)-\tfrac12 eH(\Gamma_{11}X_{22}+\Gamma_{12}X_{21}-\Gamma_{21}X_{22}-\Gamma_{22}X_{21}), \tag{18}$$

$$V=e^2\zeta_{12}, \quad k_0=k_{01}+k_{02}, \quad \bar a=\hbar c a,$$

/5/. аналогичный оператор для разноспиновых частиц можно записать в виде

$$\bar V_H=\beta_{11}^{(m)}\beta_{12}^{(m)}V(1+\tfrac12\beta_{11}^{(m)}\beta_{12}^{(m)}V\bar K_0^{-1}+\dots)-\tfrac12 eH(\beta_{11}^{(m)}X_{22}+\beta_{12}^{(m)}X_{21}-\beta_{21}^{(m)}X_{22}-\beta_{22}^{(m)}X_{21}) \tag{19}$$

Первый член в (19) описывает (с точностью до членов порядка $V^2\bar K_0^{-2}$) взаимодействие частиц друг с другом, второй - - влияние внешнего магнитного поля. Если в уравнение входят дираковские и кеммеровские матрицы, то решение (17,19)

$$\Psi=(\Psi_0+\sum_{i=1}^{4}\Psi_i\beta_{i1}^{(m)})\Gamma. \quad \Psi_k=\Psi_k(X_{\lambda\mu},\Gamma_{i2}), \tag{20}$$

на базе делителя

$$\Gamma_1 = \beta_{11}^{(2)2}\beta_{21}^{(2)2}\beta_{31}^{(2)2}\beta_{41}^{(2)2} \qquad (21)$$

описывает Зеемановское смещение уровней в системе дираковская частица + частица с нулевым спином. Подстановка (20) в (17) приводит к уравнениям:

$$[\mathfrak{D}_2 \pm (\rho_{41} + V\gamma_{42})]\Psi_\pm \pm [\mathfrak{Z}_2 V - \mathfrak{Z}_1 - \tfrac{i}{2}eH(X_{21}\Psi_1 - X_{11}\Psi_2)] = 0,$$

$$\mathfrak{D}_2\mathfrak{Z}_1 + [\tfrac{i}{2}eH(X_{21}\rho_{11} - X_{11}\rho_{21}) + \tfrac{1}{2}(\gamma_{42}\rho_{42} - \Delta_2)](\Psi_+ - \Psi_-) = 0,$$

$$(\mathfrak{D}_2 - 2\rho_{41})\mathfrak{Z}_2 - 2\mathfrak{Z}_1 - \tfrac{1}{2}[3V + \tfrac{i}{2}eH(X_{22}\gamma_{12} - X_{12}\gamma_{22}) - \gamma_{42}\rho_{42}](\Psi_+ - \Psi_-) = 0,$$

$$\mathfrak{D} = \gamma_{12}\rho_{12} - \tfrac{i}{2}eH(X_{22}\gamma_{12} - X_{12}\gamma_{22}), \qquad (22)$$

где

$$\mathfrak{Z}_{1,2} = (\rho_{41}, \beta_{41}^{(2)})\Psi_{41} = Q_k^m R_k^{(1,2)} + Q_{k+1}^m R_{k+1}^{(1,2)},$$

$$\Psi_\pm = \Psi_4 \pm \Psi_3 = Q_k^m R_k^\pm + Q_{k+1}^m R_{k+1}^\pm,$$

$$Q_l^m = \exp i[m + \tfrac{1}{2}(1 - i\gamma_{12}^{(2)})]\varphi_{12}\cdot\{P_l^{m+1} - P_{l-1}^{m+1} - [(l-m)P_l^m + (l+m)P_{l-1}^m]\gamma_{31}^{(2)}(1 - i\gamma_{12}^{(2)})(1 + \gamma_4^{(2)}),$$

$$P_{l'}^{m'} = P_{l'}^{m'}(\cos\vartheta_{12}), \quad \gamma_{\alpha\beta}^{(2)} = \gamma_{\alpha 2}\gamma_{\beta 2}. \qquad (23)$$

Радиальные функции $R(X_{\alpha\beta}) \simeq R(r_{12})$ (с точностью до членов порядка $((e^2)\hbar^2)^{-1}\cdot\hbar H$ и $e^4(\hbar c)^{-2}$) определяются уравнением:

$$\left[L_k \pm \frac{1}{4\mu_2}\left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)\frac{(2k+1)\pm 1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}V\right]R^-_{k+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} + \lambda_k R^-_{k+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}} +$$

$$+ eH\cdot\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left\{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)mR^-_{k+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\frac{1}{2k+1}\left[(k-m)R_{k+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}} - (k+m+1)R_{k+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}}\right] = 0,$$

$$L_k = -\left(\frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2}\right)\Delta + V - \varepsilon_0 - (V - \varepsilon_0)^2\left(\frac{1}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_2}\right) - \frac{3V^2}{2(2\mu_1 + \mu_2)} - \frac{1}{4\mu_1\mu_2}\Delta V - \frac{1}{2\mu_1\mu_2}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

$$(24)$$

9
Государственная
Библиотека
СССР
имени
В. И. Ленина

где E_{s} -собственное число уравнения

$$L_{k}R = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k(k+1)}{r^2}, \qquad (25)$$

и

$$\lambda_{н} = -m\Omega_{н}^{-} - \tfrac{1}{2}\left(\Omega_{н}^{+} + \alpha_{k} \pm \sqrt{\alpha_{k}^{2}(k+\tfrac{1}{2})^{2} - \alpha_{k}\Omega_{н}^{+}(m+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4}\Omega_{н}^{+2}}\right) \qquad (26)$$

$$\Omega_{н}^{\pm} = \bar{e}H\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \pm \frac{\mu_2}{\mu_1}\right), \qquad \alpha_{k} = \left(\frac{2}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1}\right)\int r R^2 \frac{\partial V}{\partial r}\, dr$$

При

$$\alpha_{k} \gg |\Omega_{н}^{+}|,$$

$$\lambda_{н} \simeq -m\Omega_{н}^{-} - \left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{2m+1}{2k+1}\right)\Omega_{н}^{+} \mp \tfrac{1}{2}\alpha_{k}\left(k+\tfrac{1}{2} \mp 1\right), \qquad (27)$$

при

$$\alpha_{k} \ll |\Omega_{н}^{+}|,$$

$$\lambda_{н} \simeq -m\Omega_{н}^{-} - \left(\tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\right)\Omega_{н}^{+} \qquad (28)$$

Сопоставление (24,26 , и результата получаемого при аналогичном анализе системы двух дираковских частиц с полуклассическим описанием (с привлечением таких понятий как"действие магнитного поля на орбитальный и спиновый момент системы"/5/ показывает, что в слагаемом, описывающем действие магнитного поля на орбитальный момент приведенная масса определяется равенством

$$\mathfrak{M}_{\text{орб.}} = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} - \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)^{-1}, \tag{29}$$

а в слагаемом, описывающем"действие магнитного поля на спиновый момент" - равенством:

$$\mathfrak{M}_{\text{спин.}} = (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)\left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2} + \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}\right)^{-1}. \tag{30}$$

Если

$$\mathfrak{M}_1 \ll \mathfrak{M}_2 \tag{31}$$

в линейном приближении эти массы совпадают:

$$\mathfrak{M}_{\text{орб.}} = \mathfrak{M}_{\text{спин.}} = \mathfrak{M}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right). \tag{32}$$

Этот результат отличается от результата, который получил Лэмб /5,6/-в линейном приближении

$$\mathfrak{M}_{\text{орб.}} = \mathfrak{M}_1\left(1 + \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right) \neq \mathfrak{M}_{\text{спин.}} = \mathfrak{M}_1. \tag{33}$$

ЛИТЕРАТУРА

1, А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, Физматиздат, М.1959.

2. Паули В. Релятивистская теория элементарных частиц. М.1947.

3. N.Kemer. Proc.Roy.Soc. 123, 97,(1939).

4. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры. т.2 ГИТТЛ, М.1956.

5. Бете Г., Салпитер Э., Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. Физматиздат. М.1960.

6. Lamb W.E., Phys.Rev. 85, 259 (1950).

Ответственный за выпуск КОНОНЕНКО Ю.Г.

Тираж 150 экз. , 0,4 п.л. Бесплатно .
Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР
19.07.66г.