ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт- 58

О.Я.Савченко

Условия перехода уравнения Кеммера с правой частью в уравнения Максвелла

НОВОСИБИРСК 1966

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

Препринт

Савченко О.Я.

УСЛОВИЯ ПЕРЕХОДА УРАВНЕНИЯ КЕММЕРА С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

г.Новосибирск
1966 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Приводятся условия перехода уравнения Кеммера с правой частью в уравнения Максвелла. В дополнении анализируется нелинейное уравнение Кеммера и обсуждается вопрос о применении уравнения Кеммера к анализу взаимодействия электрона с полем излучения.

Одно из решений уравнения Кеммера с правой частью /1/

$$(\beta_i k_i + k_0)\Psi = F_0(x_i, \beta_i)\Gamma,$$

$$\beta_{ijk} + \beta_{kji} = \delta_{ij}\beta_k + \delta_{kj}\beta_i, \qquad k_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

на базе делителя

$$\Gamma = \beta_4(1+\beta_4)(\beta_{12}+\beta_{21})(1-i\beta_{12}-i\beta_{21})$$

может быть найдено в виде /2/:

$$\Psi = (A^{(4)}_{4i} + \vec{E}_{s} + \vec{H}_{k})\Gamma \qquad (2)$$

Вектора выражения (2) определяются системой уравнений , уже не содержащей гиперкомплексные числа /2/:

$$-\mathrm{grad}\,A^{(4)} + k_4\vec{A} + k_0\vec{E} = \vec{n},$$

$$-\mathrm{rot}\,\vec{A} + k_0\vec{H} = \vec{m},$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} + k_0 A^{(4)} = j^{(4)},$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} + k_4\vec{E} + k_0\vec{A} = \vec{j} \qquad (4)$$

Компоненты $j^{(4)}, \vec{n}, \vec{m}$ определяются разложением функции $F(x_i, \beta_j)$ на слагаемые:

$$F_e \Gamma = (j^{(\omega)}_{\delta 4} + \vec{n}_e + \vec{m}_h)\dot{\Gamma},$$

$$(\vec{n}_e + \vec{m}_h)\Gamma = \tfrac{1}{2}(3 - \beta_i^2) F_e \Gamma. \tag{5}$$

Если

$$F_e = (2 - \beta_i^2)(F\Gamma - k_o \Psi), \tag{6}$$

или

$$F_e = (2 - \beta_i^2) F \Gamma,$$

$$k_o \Psi (k\Psi)^{-1} \to 0, \tag{7}$$

а F – любая функция, удовлетворяющая уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j}_\delta + k_4 j^{(\omega)}_\delta = 0,$$

$$j^{(\omega)}_{\delta 4} \Gamma = \tfrac{1}{2}(2 - \beta_i^2) F \Gamma, \tag{8}$$

– (4) переходит в уравнения Максвелла: с точностью до постоянных множителей группа $\vec{E}, \vec{H}$ совпадает с тензором электромагнитного поля, четырехвектор A^{ω} – с четырехвектором потенциала, $j^{(\omega)}_\delta$ – с четырехвектором тока.

ДОПОЛНЕНИЕ I

УРАВНЕНИЕ КЕММЕРА С САМОДЕЙСТВИЕМ.

Уравнение Кеммера, описывающее движение заряженного мезона в электромагнитном поле, записывается в виде:

$$[(\beta_i + \alpha A_i^{(e)})k_i + k_0]\Psi = 0 \qquad (9)$$

$A_i^{(e)}$ – четырехвектор потенциала поля, $\alpha = e(hc)^{-1}$ – постоянная. Предположение, что внутренний четырехвектор потенциала $\alpha_i A^{(i)}$ действует на частицу так же как и внешний, приводит к следующему уравнению:

$$[(\beta_i + \beta A^{(i)})k_i + k_0](A_{si}^{(i)} + E_e + H_h)\Gamma = 0, \qquad \beta = \alpha\alpha_i . \qquad (10)$$

Система уравнений типа (4), получаемая из (10), дает следующее векторное уравнение:

$$(-\Box + \mathrm{Grad}\,\mathrm{Div} + k_0^2)A^{(i)} = \beta A^{(i)} \times \mathrm{Rot}\,A^{(i)}, \qquad (11)$$

$\Box$, Div, Grad, Rot – четырехмерные аналоги Δ, div, grad, rot

В стационарном случае –

$$k_4\Psi = 0 - \qquad (12)$$

одно из решений уравнения (11)

$$\vec{A} = \tfrac{1}{2}\beta k_0^{-2}\,\mathrm{grad}\,A^{(4)2},$$

$$A^{(4)} = k_0\beta^{-1}\varphi(u),$$

$$u = (k_0 r)^{-1} \qquad (13)$$

φ – определяется уравнением:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - \frac{\varphi}{u^4} = 0. \qquad (14)$$

Из (13,14) следует

$$cu = \int^{\varphi} e^{-\eta^2} d\eta . \tag{15}$$

при

$$r \ll \lambda_0 = k_0^{-1} \tag{16}$$

и

$$\dot{c}u \exp[-(u)^{-1}] \simeq \varphi \tag{17}$$

при

$$r \gg \lambda_0 \tag{18}$$

Если принять потенциал взаимодействия между двумя частицами при

$$r \gg \lambda_0 \tag{19}$$

равным

$$V = \frac{g}{r} \exp(-k_0 r) \tag{20}$$

то из (15,17) следует

$$g = c . \tag{21}$$

Д О П О Л Н Е Н И Е II

К ПРИМЕНЕНИЮ УРАВНЕНИЯ КЕММЕРА К АНАЛИЗУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНА С ПОЛЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ.

Взаимодействие электрона с полем излучения можно, повидимому, описать уравнением типа

$$\left(\sum_{n=1}^{2}\Gamma_i^{(n)}k_i^{(n)}+\hat{V}\right)\Psi=0$$

$$\Gamma_i^{(1)}+\Gamma_i^{(2)}=2\beta_i \qquad /22/$$

$k_i^{(1,2)}$ – соответственно операторы четырехвектора импульсов поля излучения и электрона, $\hat{V}$ – оператор взаимодействия поля излучения с волновой функцией электрона,

$\Gamma_i^{(n)}$ – коммутирующие группы γ – матриц Дирака.

Для построения оператора $\hat{V}$ достаточно "правил квантовой электродинамики" [3], которые в конечном счете являются квантовомеханическим обобщением Эйнштейновских правил взаимодействия излучения с электронными структурами атомов [4]. Правила о соотношении между коэффициентами поглощения, стимулированной эмиссии и спонтанной эмиссии были предложены Эйнштейном до создания квантовой механики и не включали в себя понятия суперпозиций. Система атомов, к которым прилагались эти правила, рассматривались Эйнштейном как механическая смесь возбужденных и невозбужденных атомов, хотя согласно духу квантовой механики такую систему следовало бы рассматривать, как совокупность атомов, волновые функции которых являются суперпозицией основного и возбужденных состояний. В термодинамически равновесном состоянии волновую функцию i-го атома следовало бы записать в виде:

$$\Psi = N\sum exp\left(-\frac{\omega_n \hbar}{2kT}\right)\Psi_n \qquad /23/$$

T – абсолютная температура, $\omega_n\hbar$, Ψ_n – энергия и волновая функция n-го состояния.

Суперпозиционное состояние по отношению к полю излучения ведет себя как классический момент [5]

$$\vec{M} = \int \Psi \vec{j} \Psi^* dv dt \qquad /24/$$

j – оператор тока .

Поэтому состояние /23/ излучает энергию

$$W = \frac{2}{3} e^2 c^{-3} N^2 \left(\sum_{n<m}\sum (\omega_n-\omega_m)^4 |\vec{M}_{nm}|^2 exp\left(-\hbar\frac{\omega_n+\omega_m}{kT}\right)\right) \qquad /25/$$

Величина W совпадает с обычной спонтанной эмиссией этой же системы, если амплитуды возбужденных состояний много меньше амплитуды основного состояния.

Достоинство предлагаемой картины спонтанной эмиссии заключается в том, что спонтанная эмиссия естественно сводится к хорошо изученному кругу явлений, описываемых поведением супепозиционных состояний [6-8] . основной недостаток – отход к позднему варианту принципа соответствия [5] .

Из предлагаемой картины спонтанной эмиссии следует, что интенсивность эмиссии зависит не только от заселенности верхнего уровня, но и от заселенности нижнего уровня. Экспериментальные данные, которые или опровергают или, наоборот, подтверждают такую зависимость имеются в работах [9-15].

В связи с тем, что из двух описанных вариантов взаимодействия поля излучения с электроном я не сделал выбора /в настоящее время автору второй вариант не кажется абсурдным/, значение оператора $\hat{V}$ в работе не определяется.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, Квантовая электродинамика, Физматиздат, М., 1959.
2. О.Я.Савченко. Препринт ИЯФ СО АН СССР, 15 (1965).
3. Р.Фейнман. Квантовая электродинамика.Изд.Мир.М.,1964.
4. 18, 121 (1917)
5. А.Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т.1, 2, ГИТТЛ, М., 1956.
6. Дж.Зингер, С.Ванг., Сб.Лазары, под.ред.М.Е.Жаботинского и Т.А.Шмаонова, ИИЛ, М., 1063, стр.294.
7. Дж.Фонитана, Р.Пантелл., Сб.Лазары, под ред.М.Е.Жаботинского и Т.А.Шмаонова, М.,1963 стр.315.
8. О.Я.Савченко. Опт и спектр., 11, 223 (1961)
9. Caviola E., Phil. Mag., 6, 1154, 1167 (1928)
10. Hanle W., Richter E.F. Zs.f.Phys.,54, 811 (1929)
11. Christensen C.J., Rolletson G.K. Phys. Rev., 34, 1157 (1929)
12. Randall J.T., Webb H.W. Phys.Rev., 35, 665 (1930).
13. Richter E.F. Ann.d.Phys.,7, 293 (1930); 17, 463 (1933)
14. R.Anderson, E.Sterr. J.Opt.Soc.Am.,53, 1139 (1963)
15. R.A.Anderson, R.M.McFerland. Phys.Rev., 119, 693 (1960)

Ответственный за выпуск Шунько Е.В.
Подписано к печати 10 августа 1966 г.
Тираж 150 экз.
Бесплатно
Отпечатано на ротапринте в Институте ядерной физики СО АН СССР