

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт- 80

М.М.Карлинер, А.Н.Скринский, И.А.Шехтман

**Условия устойчивости фазового  
движения сгустка в накопителях  
релятивистских частиц**

НОВОСИБИРСК 1966

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

М.М. Карлинер, А.Н. Скринский, И.А. Шехтман

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ФАЗОВОГО ДВИЖЕНИЯ СГУСТКА  
В НАКОПИТЕЛЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

г. Новосибирск  
1966 г.

## АННОТАЦИЯ

Напряжение, наведенное на ускоряющей системе сгруппированным пучком частиц, может вызвать неустойчивость, приводящую к самовозбуждению радиально-фазовых колебаний. Получены условия устойчивости, справедливые в случае произвольной частотной характеристики ускоряющей системы, учитывающие также разрос собственные частот радиально-фазовых колебаний отдельных частиц. Анализ распространен также на случай, когда взаимодействие пучка с ускоряющей системой (или другими элементами вакуумной камеры) происходит на любых гармониках частоты обращения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Обращающийся в накопителе сгусток заряженных частиц наводит на ускоряющей системе напряжение, которое оказывает обратное воздействие на частицы. Если сгусток совершает радиально-фазовые (синхротронные) колебания, то наведенное напряжение изменяется по амплитуде и фазе. В зависимости от частотных характеристик ускоряющей системы это изменение происходит с тем или иным запаздыванием.

Переходные процессы в ускоряющей системе с частотными характеристиками параллельного резонансного контура могут приводить к раскачке (самовозбуждению) синхротронных колебаний, как это было показано в /1-3/. Раскачка возникает при достаточно большом токе пучка, если ускоряющий резонатор настроен так, что его собственная частота выше частоты ускоряющего напряжения (имеется в виду, что энергия частиц выше критической). При обратном соотношении частот согласно /1-3/ устойчивость сохраняется при сколь угодно большом токе.

Эксперименты на установках со встречными электрон-электронными и электрон-позитронными пучками в Институте ядерной физики (Новосибирск) показали<sup>4/</sup>, что отмеченное выше условие устойчивости не всегда является достаточным. В работе /5/ было показано, что объяснение этому можно найти, если учесть отличие реальной частотной характеристики ускоряющей системы от характеристики параллельного резонансного контура, а также возможность возбуждения ускоряющей системы (или других элементов камеры накопителя) на гармониках частоты обращения частиц, отличных от частоты ускоряющего напряжения.

В настоящей работе получены условия устойчивости и

декремент затухания синхротронных колебаний с учетом разброса собственных частот синхротронных колебаний отдельных частиц. Причиной указанного разброса является нелинейность синхротронных колебаний и случайные колебания, вызванные, например, квантовыми флуктуациями излучения или другими факторами.

Метод анализа, с помощью которого получены эти результаты, аналогичен методу, использованному в /5/. Он связан с учетом боковых частот, наведенных колеблющимся ступком на ускоряющей системе.

В дальнейшем рассматривается циркулирующий в накопителе ступок положительно заряженных частиц в предположении, что:

- а) энергия частиц выше критической,
- в) азимутальный размер ускоряющего зазора мал по сравнению с длиной волны ускоряющего напряжения,
- в) ступок также имеет азимутальный размер, малый по сравнению с длиной волны ускоряющего напряжения.

## 2. ФАЗОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассмотрим фазовые колебания частиц под действием ускоряющего напряжения, содержащего боковые частоты.

Напряжение на ускоряющем зазоре обычно является синусоидальным

$$u = U_m \sin(q\omega_s t + \varphi_s), \quad (I)$$

где  $q$  - кратность радиочастоты,  $\omega_s$  - угловая частота обращения равновесных частиц в накопителе,  $\varphi_s$  - равновесная фаза.

Частица, имеющая неравновесное значение энергии или

проходящая ускоряющий зазор в неравновесной фазе, совершает фазовые колебания. Уравнение свободных колебаний малой амплитуды может быть линеаризовано и тогда приобретает следующий вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{\tau_c} \dot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

причем в этом уравнении  $\varphi$  - отклонение частицы от равновесной фазы,  $\tau_c$  - постоянная времени радиационного затухания фазовых колебаний,  $\Omega_0^2 = \frac{q^2 \omega_s^2 e U_m |\cos \varphi_s|}{E_s}$  - квадрат угловой частоты свободных фазовых колебаний /6/.

В общем случае ускоряющее напряжение модулировано по амплитуде и фазе. Вместо (I) для ускоряющего напряжения имеет место более сложное выражение

$$u = U_m \left\{ \sin(q\omega_s t + \varphi_s) + \sum_{n=-m}^m a_n \sin[(q\omega_s + \Omega_n)t + \varphi_n] \right\}, \quad (3)$$

в состав которого входит не только несущая (с частотой  $q\omega_s$ ), но также и боковые составляющие. Отметим, что  $\Omega_n$  в (3) может быть как положительной, так и отрицательной величиной, малой по сравнению с  $\omega_s$ . Нетрудно показать, что уравнение вынужденных фазовых колебаний частицы имеет при этих условиях вид

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{2}{\tau_c} \dot{\varphi} + \Omega_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{|\cos \varphi_s|} \sum_{n=-m}^m a_n \cos(\Omega_n t + \varphi_n) \right] \varphi = \\ = - \frac{\Omega_0^2}{|\cos \varphi_s|} \sum_{n=-m}^m a_n \sin(\Omega_n t + \varphi_n). \end{aligned} \quad (4)$$

В простейшем случае имеет место лишь одна боковая составляющая

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{\tau_c} \dot{\varphi} + \Omega_0^2 \left[ 1 - \frac{a \cos \Omega t}{|\cos \varphi_s|} \right] \varphi = - \frac{\Omega_0^2}{|\cos \varphi_s|} a \sin \Omega t, \quad (5)$$

где  $\alpha = \frac{U_{\delta m}}{U_m}$ ,  $U_{\delta m}$  - амплитуда напряжения боковой составляющей. Величину  $\alpha$  мы будем в дальнейшем считать малой.

Итак, наличие одной или нескольких боковых частот в составе ускоряющего напряжения приводит к вынужденным колебаниям и параметрической раскачке. При достаточно малой величине  $\alpha$  параметрической раскачкой можно в первом приближении пренебречь, т.к. параметрические колебания возбуждаются, начиная с некоторой конечной величины  $\alpha$ . Тогда уравнение (5) упрощается

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{\tau_c} \dot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = -\frac{\Omega_0^2}{U_m |\cos \varphi_s|} U_{\delta m} \sin \Omega t. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) для вынужденных колебаний имеет вид

$$\varphi = \Phi_m \sin(\Omega t + \Psi_\varphi), \quad (7)$$

где

$$\Phi_m = \frac{U_{\delta m}}{U_m |\cos \varphi_s|} \cdot \frac{Q_c}{\sqrt{1 + Q_c^2 x_c^2}}, \quad (8)$$

$$\Psi_\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg Q_c x_c, \quad (9)$$

$$Q_c = \frac{Q_0 \tau_c}{2}, \quad x_c = \frac{\Omega}{Q_0} - \frac{Q_0}{\Omega} \cong \frac{2(\Omega - Q_0)}{Q_0}.$$

### 3. НАВЕДЕННОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

Заряженная частица, обращающаяся по равновесной орбите, образует элементарный ток, зависимость которого от времени имеет вид периодически повторяющихся импульсов. Обозначим через  $I_{qe}$  амплитуду  $q$ -й гармоники этого тока, частота которой совпадает с частотой ускоряющего напряжения.

Фазовые соотношения между током  $I_{qe}$  и ускоряющим напряжением  $U$  иллюстрируются векторной диаграммой, изображенной на рис.1а. Векторная диаграмма соответствует представлению пучка частиц источником тока, присоединенного к ускоряющей системе. Т.к. передача энергии при ускорении происходит из ускоряющей системы в источник тока, то угол между вектором тока  $I_{qe}$  и вектором напряжения  $U$  больше  $\frac{\pi}{2}$ . На рис.1б представлены временные соотношения между напряжением на ускоряющей системе и элементарным током. Временная зависимость тока при указанных фазовых соотношениях с учетом (1) имеет вид

$$i_{qe} = -I_{qe} \cos q\omega_s t.$$

Если частица совершает фазовые колебания, то элементарный ток оказывается модулированным по фазе

$$i_{qe} = -I_{qe} \cos(q\omega_s t + \varphi). \quad (10)$$

Ток пучка, складывающийся из элементарных токов, может быть найден, если известно азимутальное распределение частиц в накопителе. Предположим, что это распределение задано в системе координат, связанной с центром тяжести ступки; кроме того, будем предполагать, что в этой системе распределение стационарно:

$$dN = N \cdot n(\vartheta) d\vartheta, \quad (11)$$

где  $dN$  - число частиц, приходящихся на угол  $d\vartheta$

$N$  - полное число частиц,  $n(\vartheta)$  - функция распределения. Тогда амплитуда  $q$ -й гармоники тока пучка равна

$$I_q = \sqrt{a_q^2 + b_q^2}. \quad (12)$$

Величины  $\alpha_q$  и  $\beta_q$  пропорциональны (12) коэффициентам разложения функции  $n(\vartheta)$  в ряд Фурье

$$\alpha_q = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n(\vartheta) \cos q\vartheta d\vartheta,$$

$$\beta_q = \frac{I_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} n(\vartheta) \sin q\vartheta d\vartheta,$$

$I_0 = \frac{Ne\omega_s}{2\pi}$  - средний ток пучка в накопителе. Если спусток имеет длину, малую по сравнению с длиной волны ускоряющего напряжения, то легко показать, что

$$I_q = 2I_0. \tag{13}$$

то-есть,  $I_q$  не зависит от конкретного вида распределения  $n(\vartheta)$ .

Спустку, совершающему фазовые колебания, соответствует ток

$$i_q = -I_q \cos(q\omega_s t + \varphi), \tag{14}$$

причем  $\varphi = \varphi(t)$  - отклонение центра тяжести спутка от равновесной фазы.

Несмотря на то, что распределение  $n(\vartheta)$  по предположению стационарно, отдельные частицы совершают случайные фазовые колебания. Причины этих случайных колебаний могут быть различны: начальные условия (для неизлучающих частиц), рассеяние на остаточном газе, квантовые флуктуации излучения. Так как эти колебания случайны, то они в малой степени непосредственно влияют на колебания центра тяжести спутка. Однако, вследствие нелинейности фазовых колебаний при строгом решении задачи о вынужденных колебаниях отдельных частиц следует рассматривать совместное действие случайных сил и

боковых частот на нелинейную колебательную систему. Ввиду сложности строгого решения, мы будем решать задачу упрощенно, предполагая, что система линейна, а действие случайных колебаний вследствие нелинейности сводится к изменению собственных частот отдельных частиц. Предположение о линейности системы позволяет не учитывать случайных колебаний в дальнейших расчетах.

Введем следующие обозначения:  $\Omega_e$  - собственная частота колебаний отдельной частицы с учетом случайного колебания,  $\Omega_0$  - собственная частота колебаний бесконечно-малой амплитуды,  $\Omega$  - частота внешнего воздействия. Кроме того, обозначим

$$x_e = \frac{2(\Omega_e - \Omega_0)}{\Omega_0}, \quad x_0 = \frac{2(\Omega - \Omega_0)}{\Omega_0}, \quad x_c = \frac{2(\Omega - \Omega_e)}{\Omega} = x_0 - x_e \tag{15}$$

Пусть число частиц, для которых величина  $x_e$  лежит в интервале  $(x_e, x_e + dx_e)$ , равно

$$dN = NW(x_e) dx_e. \tag{16}$$

Здесь  $N$  - полное число частиц в спутке,  $W(x_e)$  - нормированная в интервале  $(-\infty, \infty)$  функция распределения. С учетом разброса собственных частот вместо (14) для тока пучка следует написать

$$i_q = - \int_{-\infty}^{\infty} I_q \cos(q\omega_s t + \varphi) W(x_e) dx_e \tag{17}$$

Если в (17) подставить согласно (7), (8) и (9)  $\varphi = \Phi_m \sin(\Omega t + \psi)$  и воспользоваться предположением о малости  $\varphi$ , то можно получить для  $i_q$ :

$$i_q \approx -I_q \cos q\omega_s t + \frac{A I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} [\sin(q\omega_s - \Omega)t + \sin(q\omega_s + \Omega)t] + \frac{B I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} [\cos(q\omega_s - \Omega)t - \cos(q\omega_s + \Omega)t], \quad (18)$$

причем коэффициенты А и В определяются равенствами

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(x_e)}{1 + Q_c^2 x_e^2} dx_e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(x_e)}{1 + Q_c^2 (x_0 - x_e)^2} dx_e = A(x_0) \quad (19)$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_c x_e}{1 + Q_c^2 x_e^2} W(x_e) dx_e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_c (x_0 - x_e)}{1 + Q_c^2 (x_0 - x_e)^2} W(x_e) dx_e = B(x_0) \quad (20)$$

Напряжение, наводимое сгустком на зазоре ускоряющей системы, может быть найдено, если известен импеданс ускоряющей системы на частотах  $q\omega_s$ ,  $q\omega_s - \Omega$ ,  $q\omega_s + \Omega$ . Первое слагаемое в правой части (18) изменяет напряжение несущей частоты на ускоряющей системе. Если считать, что  $U_m$  есть амплитуда суммарного напряжения, созданного одновременным действием генератора и пучка, то первое слагаемое можно опустить.

Напряжение боковых частот на резонаторе будет равно

$$U_{\text{бок}} = \frac{A I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ z^- \sin[(q\omega_s - \Omega)t + \psi^-] + z^+ \sin[(q\omega_s + \Omega)t + \psi^+] \right\} + \frac{B I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ z^- \cos[(q\omega_s - \Omega)t + \psi^-] - z^+ \cos[(q\omega_s + \Omega)t + \psi^+] \right\} \quad (21)$$

где  $z^- e^{j\psi^-}$  и  $z^+ e^{j\psi^+}$  соответственно импедансы ускоря-

щей системы для нижней и верхней боковых составляющих.

Действующее на сгусток мгновенное напряжение боковых частот получаем, если в (21) подставить  $\omega_s t = 2\pi n$ :

$$U_{\text{бок}} = \frac{A I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ z^- \sin(\Omega t - \psi^-) + z^+ \sin(\Omega t + \psi^+) \right\} + \frac{B I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ z^- \cos(\Omega t - \psi^-) - z^+ \cos(\Omega t + \psi^+) \right\} \quad (22)$$

Для анализа устойчивости выражение (22) удобнее преобразовать к следующему виду:

$$U_{\text{бок}} = \frac{I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ [(R^+ - R^-)A + (X^+ + X^-)B] \sin \Omega t + [(X^+ + X^-)A - (R^+ - R^-)B] \cos \Omega t \right\} \quad (23)$$

Здесь  $R^+ = z^+ \cos \psi^+$  и  $R^- = z^- \sin \psi^-$  - активные составляющие импедансов для боковых частот,  $X^+ = z^+ \sin \psi^+$  и  $X^- = z^- \sin \psi^-$  - реактивные составляющие этих импедансов.

#### 4. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Итак, в предыдущем разделе мы выяснили, что если на сгусток действует "сила", вызывающая фазовые колебания и обусловленная существованием на ускоряющей системе напряжения  $U_{\delta m} \sin \Omega t$  в момент прихода сгустка, то в результате вынужденных фазовых колебаний на ускоряющей системе наводится напряжение боковых частот, определяемое соотношением (23).

||  
SU-наказ.

Система с обратной связью...

Образуется, следовательно, кольцо обратной связи, неустойчивость которого приводит к возникновению фазовых автоколебаний.

Условия устойчивости могут быть получены с помощью критерия Найквиста [7], который в данном случае сводится к следующему.

Предположим, что существует частота  $\Omega$ , для которой в (23) коэффициент при  $\cos \Omega t$  обращается в нуль, т.е.

$$(X^+ + X^-)A - (R^+ - R^-)B = 0. \quad (24)$$

Система устойчива, если для этой частоты коэффициент при  $\sin \Omega t$  меньше  $U_{\delta m}$ , т.е.

$$\frac{I_q U_{\delta m} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} [(R^+ - R^-)A + (X^+ + X^-)B] < U_{\delta m}. \quad (25)$$

Уравнение (24) удобнее записать в виде

$$\frac{B}{A} = \frac{X^+ + X^-}{R^+ - R^-}. \quad (26)$$

Т.к. величины B и A являются функциями  $x_0$ , то уравнение (26) определяет величину  $x_0$ , а следовательно, и частоту  $\Omega$ , на которой возможно самовозбуждение. Обычно эта частота мало отличается от  $\Omega_0$ ; поэтому величины  $R^+$ ,  $R^-$ ,  $X^+$  и  $X^-$  можно брать на частотах  $q\omega_s + \Omega_0$  и  $q\omega_s - \Omega_0$ .

Неравенство (25) вместе с (26) дает условие устойчивости

$$\frac{I_q Q_c'}{2 U_m |\cos \varphi_s|} (R^+ - R^-) < 1, \quad (27)$$

причем

$$Q_c' = Q_c \frac{A^2 + B^2}{A}. \quad (28)$$

Выражение (27) показывает, что устойчивость существенно зависит от величины разности  $R^+ - R^-$ . Если  $R^+ - R^- < 0$  то условие устойчивости выполняется для сколь угодно большого тока  $I_q$ . Нужный знак разности  $R^+ - R^-$  может быть получен при правильной настройке ускоряющей системы.

Условие (27) становится более простым, если зависимость  $R = R(\omega_r)$  близка к линейной в интервале частот  $(q\omega_s - \Omega_0, q\omega_s + \Omega_0)$ . Тогда

$$R^+ - R^- \approx 2 \Omega_0 \frac{dR}{d\omega_r}, \quad (29)$$

где  $\omega_r$  - угловая частота ускоряющего напряжения. Подставляя (29) в (28), получим неравенство

$$\frac{I_q Q_c' \Omega_0}{U_m |\cos \varphi_s|} \frac{dR}{d\omega_r} < 1. \quad (30)$$

В этом случае ускоряющую систему следует настраивать так, чтобы  $\frac{dR}{d\omega_r} < 0$ .

Полученные выводы совпадают с результатами работ [2-4] для ускоряющей системы с частотными характеристиками параллельного резонансного контура. Отличия наиболее вероятны, если собственная частота синхротронных колебаний  $\Omega_0$  значительно превышает полосу пропускания ускоряющего резонатора. Тогда существенную роль могут играть паразитные резонансы системы, которые увеличивают сопротивление  $R^+$  или  $R^-$ . Такая ситуация может возникнуть, например, для двухконтурной системы, состоящей из ускоряющего резонатора и контура в.ч. генератора, связанных линией передачи.

Оценим влияние разброса собственных частот на устойчивость. Для этого необходимо принять некоторую функцию распределения  $W(x_e)$ , входящую в интегралы (19) и (20).



Вычисление этих интегралов достаточно сложно, поэтому функцию  $W(x_e)$  выберем так, чтобы упростить интегрирование и в то же время сохранить основные черты явления.

Наиболее просто результат получается, если принять

$$W(x_e) = \frac{Q_e}{\pi} \frac{1}{1 + Q_e^2 x_e^2} \quad (31)$$

Величина  $Q_e$  характеризует в данном случае ширину распределения. Такой вид функции  $W(x_e)$  позволяет выполнить интегрирование в (19) и (20). Подставляя полученные величины в (26) и (28), найдем

$$Q'_c = \frac{Q_c \cdot Q_e}{Q_c + Q_e} \quad (32)$$

$$\frac{B}{A} = Q'_c \cdot x_0 = \frac{X^+ + X^-}{R^+ - R^-} \quad (33)$$

В частности, если  $Q_e \ll Q_c$ , то  $Q'_c \approx Q_e$ ,

т.е. эквивалентная добротность фазовой колебательной системы при этом условии целиком определяется шириной функции распределения. Как и следовало ожидать, разброс частот затрудняет возникновение колебаний.

Отметим, что функция распределения (31) сравнительно медленно убывает с ростом  $x_e$ , т.е. имеет длинные хвосты. В электронных накопителях функция распределения имеет вид:

$$W(x_e) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x_e}{\delta}} & \text{при } x_e \leq 0 \\ 0 & \text{при } x_e > 0 \end{cases}$$

т.е. убывает значительно быстрее, чем (31), некоторые соображения говорят за то, что при быстром убывании функции распределения величина  $Q'_c$  зависит от  $x_0$ , т.е. от свойств

ускоряющей системы. А именно, когда величина  $x_0$  велика по сравнению с шириной функции распределения разброс частот должен играть малую роль; величина  $Q'_c$  приближается при этом к  $Q_c$ .

В качестве примера можно привести прямоугольную функцию распределения

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{при } -\frac{\delta}{2} \leq x \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{при других значениях } x \end{cases}$$

для которой интегралы (19) и (20) легко вычисляются. Расчетная зависимость  $\frac{Q'_c}{Q_c} = \frac{A^2 + B^2}{A}$  от величины  $\alpha = 2 \frac{x_0}{\delta}$  при  $\delta \cdot Q_c = 100$  показана на рис.2. Как видно из этого графика, когда величина  $x_0$  становится больше  $\frac{\delta}{2}$ ,  $Q'_c$  начинает остро расти и приближаться к  $Q_c$ .

Во многих случаях радиационным трением можно пренебречь, т.е.  $Q_c \rightarrow \infty$ . Величины A и B стремятся к нулю при  $Q_c \rightarrow \infty$ . Но  $Q'_c$  стремится при этом к конечному пределу. Этот предел легко вычислить

$$\lim_{Q_c \rightarrow \infty} Q'_c = \lim_{Q_c \rightarrow \infty} \frac{(Q_c A)^2 + (Q_c B)^2}{Q_c A}$$

Переходя к пределу, можно найти

$$\lim_{Q_c \rightarrow \infty} (Q_c A) = \pi W(x_0)$$

$$\lim_{Q_c \rightarrow \infty} (Q_c B) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(z)}{x_0 - z} dz$$

### 5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НА ГАРМОНИКАХ

Как уже упоминалось выше, взаимодействие ускоряющей системы и других элементов камеры накопителя с пучком может происходить не только на частоте ускоряющего напряжения, но

и на других гармониках частоты обращения частиц. Условия фазовой устойчивости для такого взаимодействия могут быть получены так же, как и для взаимодействия на  $q$ -й гармонике. С учетом всех гармоник выражение для тока пучка при наличии фазовых колебаний вместо (18) принимает следующий вид:

$$i = -I_0 \sum_k C_k \cos k\omega_s t + \frac{A I_0 U_{bm} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \sum_{k=1} \frac{k}{q} C_k [\sin(k\omega_s - \Omega)t + \sin(k\omega_s + \Omega)t] + \frac{B I_0 U_{bm} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \sum_{k=1} \frac{k}{q} C_k [\cos(k\omega_s + \Omega)t - \cos(k\omega_s - \Omega)t]. \quad (34)$$

Здесь  $I_0$  - средний ток пучка,  $C_k$  - относительное содержание  $k$ -й гармоники в токе пучка, величины  $A$  и  $B$  определены равенствами (19) и (20). Наведенное напряжение боковых частот равно

$$u_{бок} = \frac{A I_0 U_{bm} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \sum_k \frac{k}{q} C_k D_k \{ z_k^- \sin[(k\omega_s - \Omega)t + \psi_k^-] + z_k^+ \sin[(k\omega_s + \Omega)t + \psi_k^+] \} + \frac{B I_0 U_{bm} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \sum_k \frac{k}{q} C_k D_k \cdot \{ z_k^- \cos[(k\omega_s - \Omega)t + \psi_k^-] - z_k^+ \cos[(k\omega_s + \Omega)t + \psi_k^+] \}, \quad (35)$$

где  $D_k$  - коэффициент, учитывающий угол пролета электронов в зазоре, на котором наводится напряжение. Коэффициенты  $D_k$  меньше единицы для высоких гармоник, когда размер зазора нельзя уже считать много меньшим длины волны. Кроме того, в (35)  $z_k^+ e^{i\psi_k^+}$  и  $z_k^- e^{i\psi_k^-}$  - импедансы взаимодрующего зазора для верхней и нижней боковых частот  $k$ -й гармоники (т.е. частот  $k\omega_s + \Omega$  и  $k\omega_s - \Omega$ ).

Мгновенное напряжение, действующее на сгусток получаем заменой  $\omega_s t = 2\pi n$  в (35). После преобразований соответствующее выражение приобретает следующий вид:

$$U_{бок} = \frac{I_0 U_{bm} Q_c}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \left\{ \sin \Omega t \sum_k \frac{k}{q} C_k D_k^2 [A(R_k^+ - R_k^-) + B(X_k^+ + X_k^-)] + \cos \Omega t \sum_k \frac{k}{q} C_k D_k^2 [A(X_k^+ + X_k^-) - B(R_k^+ - R_k^-)] \right\} \quad (36)$$

Здесь  $R_k^+$ ,  $R_k^-$ ,  $X_k^+$  и  $X_k^-$  - активные и реактивные составляющие сопротивления зазора на боковых частотах  $k$ -й гармоники.

Отметим, что степень коэффициента  $D_k$  под знаком суммы в (36) выше на единицу по сравнению с (35), чем учитывается пролетный угол при воздействии напряжения на зазоре на сгусток.

Применение критерия Найквиста дает в данном случае следующее условие устойчивости

$$\frac{I_0 Q_c'}{2 U_m |\cos \varphi_s|} \sum_k \frac{k}{q} C_k D_k^2 (R_k^+ - R_k^-) < 1 \quad (37)$$

причем  $Q_c'$  определяется по-прежнему равенством (28), а вместо уравнения (26), определяющего  $X_0$ , имеет место уравнение

$$\frac{B}{A} = \frac{\sum_k k C_k D_k^2 (X_k^+ + X_k^-)}{\sum_k k C_k D_k^2 (R_k^+ - R_k^-)} \quad (38)$$

Неравенство (37) показывает, что при оценке устойчивости необходимо принимать во внимание возможные паразитные резонансы на гармониках, отличных от  $q$ -й. Наиболее опасны резонансы на гармониках, для которых номер превышает  $q$ , т.к. соответствующий член суммы (37) умножается на множитель  $\frac{k}{q}$ , больший единицы. На рис. 3 представлен пример опасного расположения паразитного резонанса на одной из гармоник частоты обращения.

### 6. ИНКРЕМЕНТ ФАЗОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Итак, устойчивость фазовых колебаний определяется следующими факторами:

- а) раскачка (или затухание), возникающая вследствие взаимодействия ступка с наведенным напряжением;
- б) радиационное трение (или другой вид некогерентного затухания);
- в) разброс собственных частот отдельных частиц, вызывающий затухание когерентных фазовых колебаний типа затухания Ландау.

Указанные факторы количественно характеризуются соответствующими декрементами (для раскачки - инкрементом). Отметим, что в общем случае декременты, связанные с двумя последними факторами, не аддитивны. Поэтому вначале рассмотрим более простой случай, когда затухание Ландау отсутствует. Тогда  $W(x_c)$  представляет собой дельта-функцию и

$$Q'_c = Q_c = \frac{Q_0 \tau_c}{2}$$

Поэтому условие устойчивости (27) может быть переписано в виде

$$-\frac{I_q Q_0}{4U_m |\cos \varphi_s|} (R^+ - R^-) + \frac{1}{\tau_c} > 0, \quad (39)$$

где  $\frac{1}{\tau_c}$  - декремент радиационного затухания.

Из (39) непосредственно следует, что инкремент неустойчивости вследствие взаимодействия ступка с наведенным напряжением равен

$$\delta_\alpha = \frac{I_q Q_0}{4U_m |\cos \varphi_s|} (R^+ - R^-) \quad (40)$$

При наличии затухания Ландау неравенство (27) по аналогии с (39) может быть записано в виде

$$-\frac{I_q Q_0}{4U_m |\cos \varphi_s|} (R^+ - R^-) + \frac{1}{\tau_c} > 0, \quad (41)$$

причем  $\frac{1}{\tau_c} = \frac{Q_0}{2Q_c}$  - декремент затухания, вызванного совместным действием радиационного трения и разброса частот. Этот декремент в общем случае зависит не только от свойств пучка, но и от свойств ускоряющей системы, как это указывалось выше.

Лишь в частном случае, когда функция распределения частот имеет вид (31)

$$W(x_e) = \frac{Q_e}{\pi} \frac{1}{1 + Q_e^2 x_e^2},$$

декременты затухания Ландау и радиационного трения аддитивны и не зависят от свойств ускоряющей системы. Так как в этом случае  $Q'_c = \frac{Q_c \cdot Q_e}{Q_c + Q_e}$ , то неравенство (27) может быть представлено в виде

$$-\frac{I_q Q_0}{4U_m |\cos \varphi_s|} (R^+ - R^-) + \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_e} > 0, \quad (42)$$

где  $\frac{1}{\tau_e} = \frac{Q_e}{2Q_c}$  - декремент затухания Ландау.

При взаимодействии на гармониках инкремент неустойчивости может быть найден из более общего условия устойчивости (37)

$$\delta_\alpha = \frac{I_q Q_0}{4U_m |\cos \varphi_s|} \sum \frac{k}{q} C_k D_k^2 (R_k^+ - R_k^-) \quad (43)$$

### 7. ПРИМЕР

Приведем численный пример, позволяющий представить порядок величин, о которых выше шла речь.

Резонатор и накопитель установки со встречными электрон-

позитронными пучками ВЭП-2 имеют следующие параметры:

резонансная частота	$f_0 = 25,1 \text{ Мгц}$
шунтовое сопротивление с учетом шунтирующего действия генератора	$R_0 = 25 \text{ ом}$
нагруженная добротность	$Q_n = 2500$
напряжение на резонаторе	$U_m = 10 \text{ кв}$
кратность	$q = 1$
частота радиально-фазовых колебаний	$F_0 = 160 \text{ кгц}$
энергия электронов при накоплении	$E_s = 100 \text{ Мэв}$
время затухания радиально-фазовых колебаний	$\tau_c = 1 \text{ сек.}$

На частотах  $f_0 \pm F_0$  активное сопротивление резонатора равно

$$R_{\pm} = \frac{R_0}{1 + Q_n^2 \left(\frac{2F_0}{f_0}\right)^2} \approx 25 \text{ ом}$$

Предположим, что за счет паразитного резонатора появилось местное увеличение сопротивления  $R^+$ , так что  $R^+ - R^- = 25 \text{ ом}$ . Тогда система будет устойчива, как это следует из неравенства (27), при амплитуде первой гармоники тока пучка

$$I_q < \frac{4U_m}{Q_0 \tau_c (R^+ - R^-)} = 1,6 \text{ ма};$$

средний ток пучка вдвое меньше, т.е. 0,8 ма.

Здесь не учитывалось затухание Ландау. Учет этого затухания увеличивает предельный ток примерно в 10 + 20 раз.

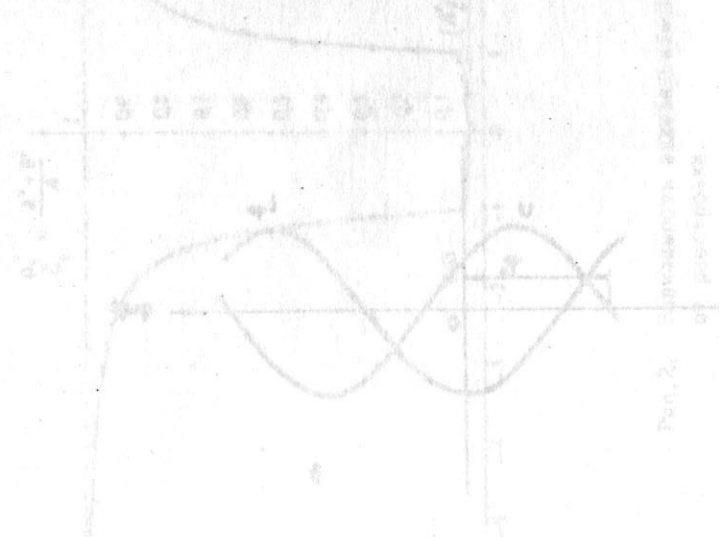
### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что при неблагоприятной частотной характеристике ускоряющей системы или при наличии паразитных резонирующих элементов в вакуумной камере

накопителя релятивистских частиц возможно самовозбуждение радиально-фазовых колебаний. При этом часть накопленного пучка попадает на стенки камеры и теряется. Создание необходимой частотной характеристики должно предусматриваться при проектировании накопителей. Подавление автоколебаний может осуществляться также введением цепей обратной связи.

Примененный метод анализа может быть распространен также на случай большого числа ступеней.

Авторы выражают благодарность В.Е. Шапиро и В.Г. Вещеревичу за помощь в вычислительной работе.



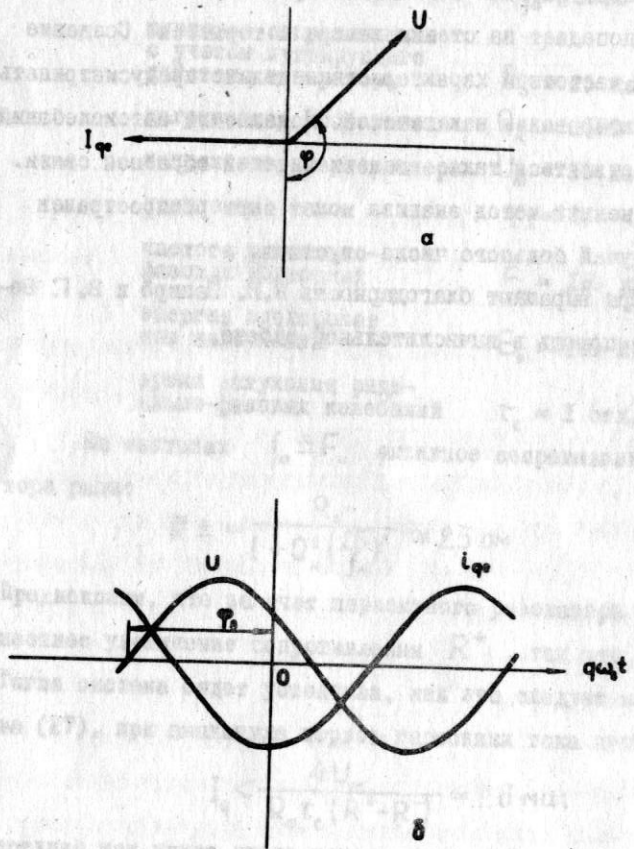


Рис. 1. Фазовые соотношения между током и ускоряющим напряжением.

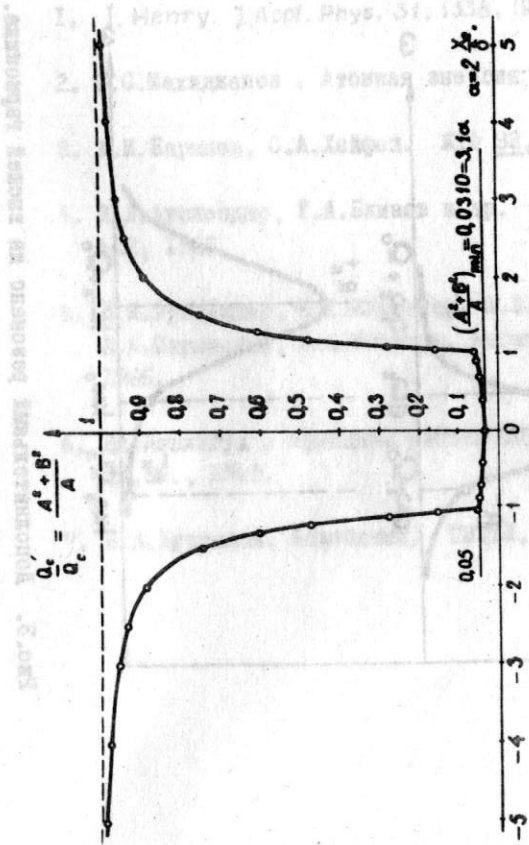


Рис. 2. Зависимость эквивалентной добротности от расстройки.

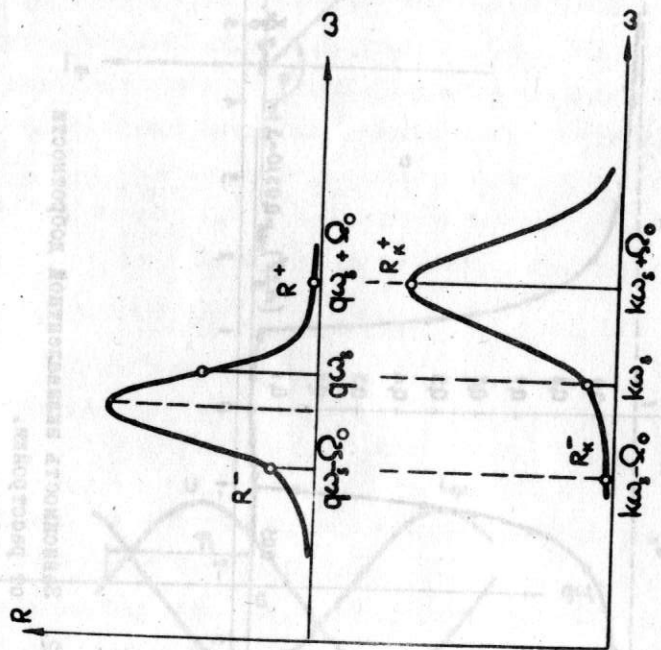


Рис.3. Дополнительный резонанс на высшей гармонике.

### Л и т е р а т у р а

1. I. Henry. J. Appl. Phys, 31, 1338, 1960.
2. С.С.Шахиджанов . Атомная энергия 12, 483, 1962.
3. А.И.Барышев, С.А.Хейфец. ЖТФ 33, 320, 1963.
4. В.Л.Ауслендер, Г.А.Блинов и др. Атомная энергия 19, 502, 1965.
5. В.Л.Ауслендер, М.М.Карлинер, А.А.Наумов, Э.Г.Попов, А.Н.Скрябинский, И.А.Шехтман. Атомная энергия 20, 210, 1966.
6. Дж.Ливингуд . Принципы работы циклических ускорителей. ИЛ, М., 1963.
7. Б.В.Булгаков. Колебания. ГИТТЛ, М., 1954.