K.64

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ АН СССР

препринт N 121

Ю.Г.Кононенко, О.Я.Савченко, Е.В.Шунько

Простая механическая модель движения электрона в плоском резонаторе

г.Новосибирск 1967

V+

А Н Н О Т А Ц И Я

Движение электрона в поле плоской стоячей электромагнитной волны моделируется движением маятника.

Может ли стоячая электромагнитная волна в плоском резонаторе быть эффективной ловушкой заряженных частиц? Ответ на такой вопрос можно получить, анализируя уравнения движения частицы /I/. В случае плоского резонатора это уравнение имеет (в обозначениях /2/) следующий вид:

$$cm\dot{u}_x = eE - \frac{e}{c}V_zH,$$

$$\dot{u}_y = 0,$$

$$cm\dot{u}_z = \frac{e}{c}V_xH;$$

$$E = \frac{1}{2}E_0(\sin\xi + \sin\eta), \qquad \text{(I)}$$

$$H = \frac{1}{2}E_0(\sin\xi - \sin\eta);$$

$$mc\vec{u} = \vec{p}, \qquad \xi = \omega(t + z/c), \quad \eta = \omega(t - z/c)$$

Несложные преобразования (I) дают, что u_x однозначно определяется координатой z и временем t

$$u_x = -1/a\,(\cos\xi + \cos\eta) + c_1, \qquad (2)$$

$$a = \frac{2\omega cm}{eE_0} = \omega/\omega_L$$

а z определяется из уравнения

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{d\eta}{d\xi}\,\frac{(\sin\xi - d/d\xi\,\eta\cdot\sin\eta)(\cos\xi + \cos\eta + au_{x0})}{a^2(1+u_{y0}^2) + (\cos\xi + \cos\eta + au_{x0})^2} = 0, \qquad (3)$$

$$u_{i0} = u_i\,|_{t = \pi/2\omega}$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению уравнения (3). Но даже в нерелятивистском приближении

$$\ddot{z}_1 + u_{x0}\omega\omega_L\sin\omega t\sin z_1 - \frac{1}{2}\omega_L^2\sin^2\omega t\sin 2z_1 = 0,$$

$$z_1 = \omega c^{-1}z, \qquad (4)$$

уравнение (3) сложно для анализа. Однако в двух предельных случаях

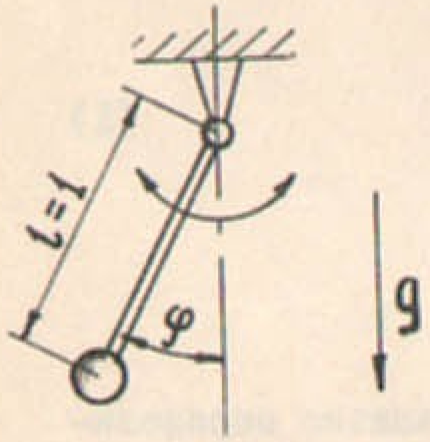
$$|\alpha u_{10}| \gg 1 \qquad |\alpha u_{10}| \ll 1 \tag{5}$$

(4) переходит в уравнение типа /3/

$$\ddot{\varphi} + g(t)\sin\varphi = 0 \tag{6}$$

и поэтому в этих предельных случаях движение по оси z можно смоделировать движением маятника в переменном поле тяжести.

Рисунок I иллюстрирует правило использования такой модели.



I

$$\frac{v_{10}}{c}\frac{\omega}{\omega_L} \gg 1$$

$$g = \frac{v_{10}}{c}\omega\omega_L \sin\omega t, \quad \varphi \to \omega\frac{z}{c}.$$

II

$$\frac{v_{10}}{c}\frac{\omega}{\omega_L} \ll 1$$

$$g = \omega_L^2 \sin^2\omega t, \quad \varphi \to 2\omega\frac{z}{c} + \pi.$$

В частности, из модели сразу же следует, что при достаточно большой частоте колебания ускорения поля тяжести

$$T\omega \gg 1 \tag{7}$$

(T – усредненный период колебания маятника) в случае II переменное ускорение поля тяжести может быть заменено средним его значением

$$g \simeq \bar{g} = \tfrac{1}{2}\omega_L^2 \tag{8}$$

Если

$$\omega \gg \sqrt{g} \tag{9}$$

и

$$\tfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - g(1+\cos\varphi) < 0 \tag{10}$$

угол φ принимает ограниченные значения. Переходя от модели к реальному движению электрона получаем следующие условия ограниченности его движения по оси z:

$$\omega \gg \frac{e|E_0|}{mc},$$

$$|p_x| \ll \frac{e|E_0|}{\omega} \tag{11}$$

$$|p_z| < \frac{e|E_0|}{\omega}\left|\cos\omega\frac{z}{c}\right|.$$

Условия (I2) являются критерием удержания заряженных частиц в поле плоского резонатора.

ДОПОЛНЕНИЕ.

Влияние радиационного трения на движение электрона в плоском резонаторе.

Уравнение движения электрона, если учитывать эффект радиационного трения, в нерелятивистском приближении, записывается следующим образом /2/:

$$\ddot{x} = \omega_L c(\sin\xi + \sin\eta) - \omega_L\dot{z}(\sin\xi - \sin\eta) + \alpha\dddot{x},$$

$$\ddot{z} = \omega_L\dot{x}(\sin\xi - \sin\eta) + \alpha\dddot{z},$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}. \tag{12}$$

С точностью до членов порядка $(\alpha\omega)^2$ уравнение (I2) дает, что

$$\dot{x} = -\frac{\omega_L}{\omega}c(\cos\xi + \cos\eta) + \alpha\omega_L c(\sin\xi + \sin\eta) - \alpha\omega_0\dot{z}(\sin\xi - \sin\eta) + C_1, \tag{13}$$

а $\dot{z}$ определяется из уравнения:

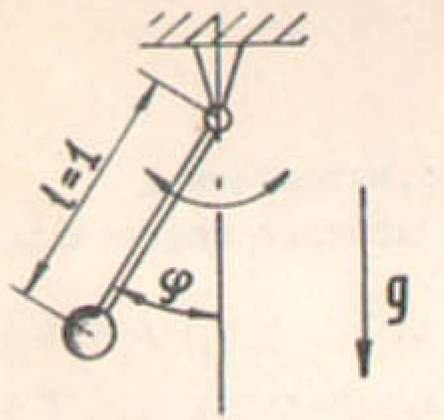
$$\ddot{z}_1 + u_{x0}\omega\omega_L \sin\omega(t+\alpha)\sin z_1 - \tfrac{1}{2}\omega_L^2 \sin^2\omega(t+3\alpha)\sin 2z_1 =$$

$$= 2\alpha u_{x0}\omega\omega_L \dot{z}_1 \cos\omega t \cos z_1 - 4\alpha\omega_L^2 \dot{z}_1 \cos^2\omega t\,(3\sin^2 z_1 - 1). \qquad (I4)$$

В предельных случаях I и II уравнение (I4) переходит в уравнение колебания маятника с внешним трением /3/:

$$\ddot{\varphi} + g(t)\sin\varphi = -k(t,\varphi)\dot{\varphi} \qquad (I5)$$

На рисунке 2 приведена механическая модель предельных движений нерелятивистского электрона в поле плоского резонатора при наличии эффекта радиационного трения (с точностью до членов порядка $(\alpha\omega)^2$).



I $\quad \frac{v_{x0}}{c}\frac{\omega}{\omega_L} \gg 1.$

$$g = \frac{v_{x0}}{c}\omega\omega_L \sin\omega(t+\alpha),\quad k = 2\alpha\frac{v_{x0}}{c}\omega\omega_L \cos\omega t \cos\omega\frac{z}{c},\quad \varphi \to \omega\frac{z}{c}$$

II $\quad \frac{v_{x0}}{c}\frac{\omega}{\omega_L} \ll 1.$

$$g = \omega_L^2 \sin^2\omega(t+\tfrac{3}{2}\alpha),\quad k = 4\alpha\omega_L^2 \cos^2\omega t\,(3\sin^2\omega\frac{z}{c} - 1),\quad \varphi \to 2\omega\frac{z}{c} + \pi$$

Из модели следует, что характер движения электрона, если пренебречь членами порядка $c^{-1}\dot{z}$, остается прежним. Влияние радиационного трения сводится тогда лишь к смещению фазы движения электрона в случае I на величину $\alpha\omega$, в случае II – на величину $3\alpha\omega$. Однако отбрасываемые члены за достаточно долгий промежуток времени могут оказать более значительное влияние, так как они вызывают накапливаемые изменения в движении электрона. Например, в случае II при условии (9) за промежуток времени порядка нескольких единиц $(\alpha\omega_L^2)^{-1}$ сравнительно слабое действие этих членов приводит к практически полной остановке электрона.

Литература

I. E.Weibel, Phys. Rev., II4, I8 (1958).

2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, I962.

3. И.М.Бабиков. Теория колебаний. ГИТТЛ, М., I958.