

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт

176

М.Г.Заславский, Н.Н.Филоненко

**Стохастическая неустойчивость
захваченных частиц и условия
применимости квазилинейного
приближения**

Новосибирск
1967

М.Г.Заславский, Н.Н.Филоненко

СТОХАСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАХВАЧЕННЫХ ЧАСТИЦ И УСЛОВИЯ
ПРИМЕНИМОСТИ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматривается движение частиц в поле плоской волны под влиянием возмущения. Показано, что вблизи сепаратрисы, отделяющей "захваченные" частицы от "пролетных", образуется область (эргодический слой), в которой движение частиц носит стохастический характер, что приводит для не очень больших времен к росту в среднем энергии захваченных частиц. Описанная неустойчивость используется для исследования движения частиц в поле волнового пакета с большим дискретным набором гармоник. Получены условия, при которых движение может быть описано уравнением типа Фоккера-Планка (квазилинейным уравнением) при произвольных начальных условиях без априорных предположений о наличии каких-либо случайных параметров в системе. Вычислено время хаотизации фаз частицы.

Введение

Вопрос об исследовании поведения частиц, захваченных в некоторую потенциальную яму, представляется нам актуальным в связи со следующими двумя проблемами физики плазмы. Первая связана с развитием неустойчивости на захваченных частицах в тороидальных системах, приводящей к аномальной диффузии плазмы /1,2/. Вторая — с исследованием условий возможности построения квазилинейной теории плазмы. Целью настоящей работы является подробное исследование специфической нелинейной неустойчивости захваченных частиц и решение второй из указанных проблем. Будет показано, что малые возмущения приводят к стохастизации движения захваченных и пролетных частиц, имеющих энергию, близкую к краям потенциальной ямы. В § I работы исследуются условия возникновения такого рода стохастической неустойчивости и оценивается величина области (именуемой в дальнейшем эргодическим слоем), в которой развивается неустойчивость, в зависимости от параметров внешнего возмущения. Сам факт возникновения стохастического ускорения захваченных частиц и возможности их выхода из ямы приводит, по-видимому, к необходимости иначе взглянуть на задачи, в которых геометрия поля, удерживающего плазму, создает возможность возникновения на длительное время захваченных частиц (см., например, /3/). Метод исследования, применяемый в § I, аналогичен работе /4/, в которой исследовалось стохастическое разрушение магнитных поверхностей вблизи сепаратрисы. Это связано с общностью постановки обеих задач в гамильтоновом формализме.

В § 2 исследуется движение частицы в поле волнового пакета с большим дискретным набором бегущих волн. На некоторое время частица может быть захвачена полем волны, движущейся с фазовой скоростью, близкой к скорости частицы. Наличие стохастической неустойчивости, описанной в § I, приводит к появлению ограничения на максимальное время захвата частицы в зависимости от ее скорости, и познिकाет возможность получить критерий того, что движение частицы может быть описано уравнением типа Фоккера — Планка (квазилинейным уравнением /5/). Кроме того, в § 2 находится также время, в течение которого хаотизируется фаза частицы.

В § 3 рассматривается движение частицы внутри эргодического слоя. Оказывается, что в некоторой части эргодического слоя кинетическое уравнение, описывающее поведение частицы, имеет вид уравнения Фоккера-Планка, что позволяет найти стационарное распределение внутри эргодического слоя и время установления стационарного распределения.

§ I. Условия возникновения стохастической неустойчивости

Рассмотрим одномерное движение заряженной частицы в поле бегущей волны под действием возмущения, представляющего собой также некоторую бегущую волну:

$$m \ddot{x} = -e E_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t) - e E_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t),$$

где нулевой индекс относится к невозмущенной силе, а единичный индекс - к возмущению, предполагаемому малым:

$$\varepsilon = E_1 / E_0 \ll 1$$

Удобно перейти в систему отсчета, движущуюся с фазовой скоростью невозмущенной волны ω_0 / k_0 и ввести переменные:

$$\xi = k_0 x - \omega_0 t, \quad V = \tau_0 (k_0 v - \omega_0); \quad \tau_0 = \sqrt{\frac{m}{e E_0 k_0}} \quad (I.1)$$

Тогда уравнение движения частицы принимает вид:

$$\tau_0 \frac{dV}{dt} = -\sin \xi - \varepsilon \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t\right) \quad (I.2)$$

где

$$\Delta V_\phi = \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{\omega_1}{k_1} \quad (I.3)$$

Невозмущенное движение ($\varepsilon = 0$) представляет собой движение в периодически зависящем от координаты потенциале (рис. I сверху) и на фазовой плоскости финитные траектории отделены от нефинитных сепаратрисой (указанной стрелками на рис. I снизу). Нас будет интересовать, в первую очередь, влияние возмущения на движение захваченных частиц, которым соответствуют финитные траектории внутри сепаратрисы на фазовой плоскости. Как будет показано далее, исследование движения "пролетных" частиц (с нефинитными невозмущенными траекториями на фазовой плоскости) проводится аналогично.

Используя гамильтониан невозмущенного движения:

$$H = \frac{1}{2} V^2 - \cos \xi$$

введем переменные действие (I), фаза (ϑ) обычным образом:

$$I = I(H) = \frac{1}{2\pi} \oint V d\xi = \frac{\pi}{2} \left\{ E\left(\frac{\pi}{2}, q\right) - (1 - q^2) F\left(\frac{\pi}{2}, q\right) \right\} \quad (I.4)$$

$$\vartheta(\xi, I) = \frac{\partial S(\xi, I)}{\partial I}$$

$$S(\xi, I) = \frac{1}{2\pi} \int V d\xi$$

где

$$q^2 = \frac{1}{2} (1 + H)$$

а F и E - соответственно эллиптические интегралы I-го и 2-го рода.

Уравнение движения (2) при $\varepsilon = 0$ в новых переменных принимает стандартный вид:

$$\frac{dI}{dt} = 0; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \Omega(I)$$

где частота Ω определена выражением

$$\tau_0 \Omega = \frac{dH(I)}{dI} = \frac{\pi}{2 F\left(\frac{\pi}{2}, q\right)} \quad (I.5)$$

При наличии возмущения

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{dI}{dH} \left\{ \frac{\partial H}{\partial V} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} \right\} = \\ &= -\frac{\varepsilon}{\Omega \tau_0^2} V \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t\right) \end{aligned} \quad (I.6)$$

где ξ в аргументе синуса предполагается выраженной как функция (I, γ) . Изменение фазы ξ под влиянием возмущения будет исследовано ниже.

В работах /4,6/ было показано, что вблизи сепаратрисы возможно возникновение неустойчивости частиц стохастического типа, приводящей к уходу частиц из потенциальной ямы. Ниже мы проведем исследование проблемы устойчивости частиц вблизи сепаратрисы в рассматриваемом примере, используя метод работы /4/.

Рассмотрим спектр невозмущенной скорости частиц $V(t)$. Решением (I.2) при $\xi = 0$ является:

$$F(q, \eta) = F(q_0, \eta_0) + t/\tau_0$$

где

$$\sin \xi/2 = q \sin \eta$$

и q_0, η_0 - начальные условия. Отсюда

$$V = 2q \cos \xi = 2q \operatorname{cn} [F(q_0, \eta_0) + t/\tau_0] \quad (I.7)$$

Опуская для простоты начальные условия, имеем следующее разложение скорости в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} V &= 2q \operatorname{cn} \frac{t}{\tau_0} = \\ &= \frac{4\pi}{F} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cos \left[(2n-1) \frac{\pi t}{2\tau_0 F} \right] = \\ &= 8 \Omega \tau_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{1+a^{2n-1}} \cos [(2n-1) \Omega t], \quad (I.8) \end{aligned}$$

$$a = \exp(-\pi F'/F)$$

$$F \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, q\right); \quad F' \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-q^2}\right)$$

Вблизи сепаратрисы $H \rightarrow 1, q \rightarrow 1, \Omega \rightarrow 0$

и

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{32}{1-H} \\ \Omega \tau_0 &\approx \pi / \ln \frac{32}{1-H} \quad (I.9) \end{aligned}$$

$$F' \approx \frac{\pi}{2}$$

$$a \approx \exp\left(-\pi^2 / \ln \frac{32}{1-H}\right) = \exp(-\pi \Omega \tau_0)$$

Из (I.8), (I.9) следует, что характерная ширина спектра $V(t)$ определяется числом n_0 Фурье-гармоник, равным:

$$n_0 \sim \frac{\pi}{|\ln a|} = \frac{1}{\Omega \tau_0} \gg 1 \quad (I.10)$$

Это означает, что $V(t)$ для частиц, движущихся вблизи сепаратрисы, имеет почти постоянное значение $V_0 \sim 4$ локализованное в очень узкой области времен порядка τ_0 и периодически повторяющееся с частотой Ω , причем $\Omega \tau_0 \ll 1$. Это обстоятельство является крайне важным, т.к. острота импульсов в правой части (I.6), связанная с описанным поведением $V(t)$, может привести к существенному изменению действия I частицы.

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (I.6) и выделим в ней резонансные члены. Используя разложение (I.8) для $V(t)$ нетрудно написать условие резонанса:

$$\Omega(I_s) \approx \frac{k_1 \Delta V_\phi}{S} \quad (I.11)$$

где S - произвольное целое число ($S \gg 1$), которое будем называть номером резонанса, I_s - значения действия, соответствующее резонансной частоте. Из (I.11) следует, что расстояние между двумя соседними резонансами с номерами S и $S+1$ равно:

$$\delta = \Omega(I_s) - \Omega(I_{s+1}) \approx \frac{k_1 \Delta V_\phi}{S^2} = \frac{\Omega^2(I_s)}{k_1 \Delta V_\phi} \quad (I.12)$$

Каждый S -ый резонанс окружен локальной сепаратрисой размером ΔI_s и ширина резонанса по частоте равна $(d\Omega(I_s)/dI) \cdot \Delta I_s$. Условием возникновения стохастической неустойчивости частицы является неравенство /7,8/:

$$\left| \frac{d\Omega(I_s)}{dI} \right| \Delta I_s \gg \delta = \frac{\Omega^2(I_s)}{k_1 \Delta V_\phi} \quad (I.13)$$

В этом случае спектр движения частицы становится очень близким к сплошному, и движение частицы аналогично броуновскому движению. Последнее приводит к тому, что энергия частицы в среднем растет со временем,

Для определения ΔI_s проинтегрируем (I.6) по интервалу времени $\geq \tau_0$ в окрестности S -го резонанса. Учитывая, что поправка к частоте $\Omega(I_s)$ для достаточно малых частот (т.е. больших S) удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{d\Omega(I_s)}{dI} \right| \Delta I_s' \ll \Omega(I_s) \quad (I.14)$$

одновременно с (I.13), получаем из (I.6), (I.8):

$$\Delta I_s \approx \frac{\varepsilon}{\tau_0} \frac{a^{S-1/2}}{1+a^{2S-1}} \left[S \cdot \left| \frac{d\Omega(I_s)}{dI} \right| \Delta I_s \right]^{-1} \quad (I.15)$$

Отсюда, после подстановки S из (I.11), находим:

$$\Delta I_s \approx \left[\frac{4\varepsilon a^{S-1/2}}{(1+a^{2S-1})} \cdot \frac{\Omega(I_s)}{k_1 \Delta V_\phi} \right]^{1/2} \quad (I.16)$$

При номере резонанса S , меньшим границы спектра n_0 (см. (I.10)), величина $a^S \sim 1$ и условие неустойчивости (I.13) принимает вид:

$$K = 2\varepsilon \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\tau_0 \Omega^3} \left| \frac{d\Omega}{dI} \right| \gg 1 \quad (I.17)$$

Вычисляя $|d\Omega/dI|$ вблизи сепаратрисы с помощью (I.9)

$$\left| \frac{d\Omega}{dI} \right| = \left| \frac{d\Omega}{dH} \right| \frac{dH}{dI} = \frac{\tau_0^2 \Omega^3}{32\pi} \exp\left(\frac{\pi}{\Omega \tau_0}\right)$$

можно получить из условия $K \geq 1$ граничное значение частоты Ω_0 , начиная с которой развивается неустойчивость:

$$\Omega_0 \tau_0 \leq \pi / \ell_n \frac{16\pi}{\varepsilon \tau_0 k_1 \Delta V_\phi} \quad (I.18)$$

В случае, когда расстройка фазовых скоростей основной волны и возмущения сравнима с средней частотой колебаний частицы τ_0^{-1} , т.е.

$$\left| \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{\omega_1}{k_1} \right| \sim \frac{1}{k_1 \tau_0}, \quad k_1 \Delta V_\phi \tau_0 \sim 1 \quad (I.19)$$

граница неустойчивости находится из условия

$$\Omega_0 \tau_0 \leq \pi / \ell_n \frac{16\pi}{\varepsilon} \quad (I.20)$$

что соответствует согласно (I.9) границе H_0 по энергии:

$$1 - H_0 \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \quad (I.21)$$

Если же $\tau_0 k_1 \Delta V_\phi \ll 1$, т.е.

$$\left| \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{\omega_1}{k_1} \right| \ll \frac{1}{\tau_0 k_1} \quad (I.22)$$

то граница неустойчивости по частоте Ω_0 определяется формулой (I.18), а граница по энергии - выражением:

$$1 - H_0 \leq \varepsilon k_1 \Delta V_\phi \tau_0$$

Таким образом, в условиях (I.22) область неустойчивости сужается по сравнению с (I.19) и стремится к нулю при $k_1 \Delta V_\phi \rightarrow 0$. Интересно также отметить, что в наиболее неустойчивом случае (I.19) основной вклад в ΔI_s дает гармоника разложения $V(t)$, лежащая на краю спектра и имеющая $S \sim n_0$, в то время, как в случае (I.22) вклад в ΔI_s определяется "внутренними" гармониками.

Рассмотрим теперь случай очень сильной расстройки фазовых скоростей основного и возмущающего колебаний:

$$\left| \frac{\omega_0}{k_0} - \frac{\omega_1}{k_1} \right| \gg \frac{1}{k_1 \tau_0}; \quad \tau_0 k_1 \Delta V_\phi \gg 1 \quad (I.23)$$

Вклад в интеграл для ΔI_s дает гармоника с $s \gg n_0$, расположенная в "хвосте" спектра. В этом случае из (I.9), (I.11) и (I.16) следует:

$$a^s = \exp(-\pi \tau_0 k_1 \Delta V_\phi)$$

$$\Delta I_s \approx \left[4\varepsilon \frac{\Omega(I_s)}{\tau_0 k_1 \Delta V_\phi} \cdot \frac{\exp(-\pi \tau_0 k_1 \Delta V_\phi)}{|d\Omega(I_s)/dI|} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Граница неустойчивости находится из условия:

$$K = 4\varepsilon \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\tau_0 \Omega^3} \left| \frac{d\Omega}{dI} \right| e^{-\pi \tau_0 k_1 \Delta V_\phi} = \varepsilon \frac{k_1 \Delta V_\phi \tau_0}{8\pi} \exp\left(-\pi \tau_0 k_1 \Delta V_\phi + \frac{\pi}{\Omega \tau_0}\right) \geq 1 \quad (I.24)$$

Случай (I.23) является, безусловно, наиболее устойчивым, т.к. изменение действия ΔI_s экспоненциально мало. Из (I.24) находим для границы неустойчивости по частоте:

$$\Omega \tau_0 \lesssim \frac{\pi}{\varepsilon \tau_0 k_1 \Delta V_\phi + k_1 \Delta V_\phi \tau_0}$$

В случае, когда

$$\varepsilon \tau_0 \frac{1}{2} \geq \tau_0 k_1 \Delta V_\phi$$

мы имеем результаты (I.20) и при обратном неравенстве

$$\Omega \tau_0 \lesssim \frac{\pi}{k_1 \Delta V_\phi \tau_0} \ll 1 \quad (I.25)$$

Область неустойчивости по энергетической шкале оказывается при условии (I.25) экспоненциально малой:

$$1 - n_0 \lesssim 32 \exp(-\tau_0 k_1 \Delta V_\phi) \quad (I.26)$$

Для исследования поведения частицы в столь малой окрестности вблизи сепаратрисы нужны, вообще говоря, другие методы, чем используемый. Однако, можно считать, что область неустойчивости при условии (I.23) заведомо намного меньше, чем в случае

$$\tau_0 k_1 \Delta V_\phi \sim 1.$$

К определению условий возникновения стохастической неустойчивости можно было бы подойти и несколько иначе, чем описанным выше путем. Для этого вспомним, что $V(t)$ локализовано в очень узком (относительно всех других временных масштабов задачи) интервале $\sim \tau_0$ и что воздействие возмущения на частицу происходит поэтому толчками от резонанса к резонансу с интервалом между толчками $\sim \delta^{-1} = k_1 \Delta V_\phi / \Omega^2$. Благодаря этому между толчками мы имеем невозмущенные уравнения движения частицы, а на толчке происходит изменение действия и соответствующее изменение фазы \mathcal{J} . Это позволяет записать возмущенные уравнения движения в виде системы в конечных разностях:

$$I_{n+1} = I_n + \Delta I_n \quad (I.27)$$

$$\mathcal{J}_{n+1} = \left\{ \mathcal{J}_n + \frac{d\Omega(I_n)}{dI} \Delta I_n \cdot \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\Omega^2(I_n)} \psi_n + \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\Omega(I_n)} \right\}$$

где фаза \mathcal{J}_n для удобства измеряется в единицах 2π , фигурные скобки $\{\dots\}$ означают дробную часть аргумента,

$$\Delta I_n = \frac{\varepsilon}{\tau_0 \Omega(I_n)} \int V(t) \sin\left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t\right) dt \sim \frac{\varepsilon \psi_n}{\tau_0 \Omega(I_n)} \quad (I.28)$$

и интеграл в (I.28) берется в окрестности момента времени t_n . Момент времени t_n берется непосредственно перед n -ым толчком, когда частица имеет действие I_n и фазу ϑ_n . Интервал между t_{n+1} и t_n как уже отмечалось, равен $k_1 \Delta V_\phi / \Omega^2(I_n)$. Функция $\psi_n(\vartheta_n, I_n, t_n)$ периодически зависит от ϑ_n, t_n ; $|\psi_n| \leq 1$ и в дальнейшем конкретный вид ψ_n нам не понадобится. Уравнение для фаз можно записать сокращенно:

$$\vartheta_{n+1} = \left\{ \vartheta_n + \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\Omega(I_n)} + K_n \psi_n \right\} \quad (I.29)$$

где

$$K_n = \left| \frac{d\Omega(I_n)}{dI} \right| \Delta I_n \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\Omega^2(I_n)} \frac{1}{\psi_n}$$

и совпадает после учета (I.28) с определением K в выражении (I.17). Система типа (I.27) исследовалась в /9/, и мы приведем основной результат без доказательства.

С помощью (I.27) можно путем итераций выразить

$$\vartheta_n = \vartheta_n(\vartheta_0), \quad \text{где } \vartheta_0 - \text{начальная фаза, и вычислить}$$

корреляционную функцию фаз:

$$R_m = \frac{\int_0^1 (\vartheta_{n+m} - \frac{1}{2}) (\vartheta_n - \frac{1}{2}) d\vartheta_n}{\int_0^1 (\vartheta_n - \frac{1}{2})^2 d\vartheta_n}$$

При $K \gg 1$ оказывается, что $R_m \sim \exp(-m \ln K)$ (K - некоторое среднее значение величин K_n), или, переходя от дискретной шкалы времен к непрерывной

$$R(t) \sim \exp\left(-\frac{\Omega^2 t}{k_1 \Delta V_\phi} \ln K\right)$$

Последнее означает, что за время

$$\tau \sim \frac{k_1 \Delta V_\phi}{\Omega^2 \ln K} \quad (I.30)$$

корреляция фаз частицы расцепляется, и возникает неустойчивость типа броуновского движения, приводящая к эффективному увеличению энергии частицы и уходу её из потенциальной ямы. При $K \ll 1$ движение частицы является устойчивым относительно возмущения ($R \sim 1$), по крайней мере, на очень длительном интервале времени. В этом случае частица оказывается захваченной в области вблизи одного резонанса. Поэтому можно считать, что нижняя граница области неустойчивости может быть найдена из условия $K \geq 1$, и мы приходим к результату (I.17).

Я.Г.Синаем /10/ проведено доказательство того, что при выполнении некоторого условия "растяжения" движение носит перемешивающий характер и корреляция фаз R расцепляется. В нашем случае это условие имеет вид:

$$\frac{\delta \vartheta_{n+1}}{\delta \vartheta_n} \sim K_n \frac{d\psi_n}{d\vartheta_n} > 1 \quad (I.31)$$

Отсюда сразу следует, что могут существовать области в фазовом пространстве размером $\sim K^{-1}$, в которых неравенство (I.31) не имеет места, и соответствующие фазовые траектории устойчивы в течение очень длительного времени. В работе /6/ утверждается существование вблизи сепаратрисы траекторий, устойчивых сколь угодно долго. В дальнейшем область вблизи сепаратрисы, для которой выполняется критерий стохастичности $K \geq 1$, будем называть эргодическим слоем. Покажем теперь, что пролетные частицы, близкие к сепаратрисе, хаотизируются аналогично захваченным частицам.

Определим для пролетных частиц переменную I следующим образом:

$$I = I(H) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(H, \xi) d\xi = \frac{8}{\pi} q E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{q}\right)$$

$$q^2 = \frac{1+H}{2}$$

$$\vartheta(\xi, I) = \frac{\partial S(\xi, I)}{\partial I}$$

$$S(\xi, I) = \frac{1}{2\pi} \int V d\xi = \frac{2q}{\pi} E\left(\frac{\xi}{2}, \frac{1}{q}\right)$$

$$\dot{\vartheta} = \Omega(I) = \frac{dH(I)}{dI}$$

$$V(t) = 2q \operatorname{dn} \frac{t}{\tau_0}$$

Формулы (I.32) полностью аналогичны соответствующим формулам для захваченных частиц (I.4), (I.5). Уравнения движения имеют тот же вид (I.6) и вблизи сепаратрисы

$$\Omega \tau_0 \approx \pi \sqrt{\frac{1+H}{2}} / \ln \frac{16(1+H)}{1-H} \quad (I.13)$$

а скорость $V(t)$ представляет последовательность локализованных на интервале $\sim \tau_0$ импульсов. Таким образом, пролетные частицы не нуждаются в специальном исследовании.

Подведем некоторый итог проведенным исследованиям. В силу симметрии, описанной выше, для пролетных частиц вблизи сепаратрисы также образуется эргодический слой той же ширины, что и для захваченных частиц. Таким образом, сепаратриса окружена с двух сторон областью стохастической неустойчивости частиц (заштрихованная часть на рис. 2), которая, по-видимому, не имеет четкой границы. Наибольшая ширина эргодического слоя возникает при возмущении, имеющем фазовую скорость того же порядка, что и фазовая скорость основной волны, причем выполняется

условие (I.19):

$$k_1 \Delta V_{\varphi} \tau_0 \sim 1$$

В этом случае толщина эргодического слоя определяется неравенством (I.20) и для не слишком малых Σ оказывается порядка единицы по частоте и порядка Σ по энергии.

§ 2. Броуновское движение частицы в поле волнового пакета

В качестве первого приложения рассмотренной в предыдущем параграфе неустойчивости рассмотрим движение частицы в поле достаточно широкого волнового пакета:

$$\dot{v} = \sum_k (V_k e^{i\theta_k} + V_{-k} e^{-i\theta_k}) \quad (2.1)$$

$$\dot{\theta}_k = k v - \omega_k \equiv \Omega_k(v)$$

$$\theta_k = kx - \omega_k t, \quad V_k = \frac{e}{m} E_k, \quad v = \dot{x}$$

$$V_{-k} = V_k^*, \quad \omega_{-k} = -\omega_k, \quad \theta_{-k} = -\theta_k$$

Мы будем считать спектр пакета дискретным с характерным расстоянием между волновыми числами Δk и с характерным расстоянием между частотами δ_k :

$$\delta_k = \Omega_{k+\Delta k}(v) - \Omega_k(v) = \Delta k \left(v - \frac{d\omega_k}{dk} \right) \quad (2.2)$$

Ранее уже отмечалось, что в наиболее выгодных для неустойчивости условиях ширина эргодического слоя по частоте порядка τ_0^{-1} для не слишком малых Σ . Это означает, что если взять пакет, в котором гармоники расположены столь близко друг от друга, что

$$\tau_0 \delta_k = \delta_k \sqrt{\frac{m}{e E_0 k_0}} \ll 1 \quad (2.3)$$

где E_0 , k_0 - некоторые средние значения поля и волнового числа по пакету, то эргодические слои каждой из волн сольются и захваченных частиц не будет. В действительности, такая оценка не является очень строгой, т.к. амплитуды всех волн в пакете могут быть сравнимы и оценка толщины эргодического слоя, проведенная в § I, в данном случае неприменима. Ниже приводится более корректный вывод неравенства (2.3), использующий метод, развитый в /II/.

Введем распределение $f(v, \theta, t)$, удовлетворяющее уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \Omega_k(v) \frac{\partial f}{\partial \theta_k} + \frac{\partial}{\partial v} \sum_k (V_k e^{i\theta_k} + V_{-k} e^{-i\theta_k}) f = 0 \quad (2.4)$$

и не содержащую иной информации, кроме той, которую дают уравнения движения (2.1). Кроме того, для сокращения записи обозначено

$$f(v, \theta_{k_1}, \theta_{k_2}, \dots, t) = f(v, \theta, t)$$

Распределение f предполагается удовлетворяющим также условию нормировки:

$$\int f d\Gamma = 1; \quad d\Gamma = d\theta dv$$

Разложим f в ряд:

$$f(v, \theta, t) = \sum_{(n)} \left[f^{(n)}(v, t) e^{i(n, \theta)} + f^{(-n)}(v, t) e^{-i(n, \theta)} \right] \quad (2.5)$$

$$f^{(-n)} = f^{(n)*}; \quad (n, \theta) \equiv n_1 \theta_{k_1} + n_2 \theta_{k_2} + \dots$$

Переходя в (2.4) к представлению взаимодействия и удерживая в разложении по возмущению только старшие члены при $t \rightarrow \infty$, нетрудно получить следующее уравнение для $f^{(0)}(v, t)$:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial v} \sum_k V_k f^{(1)}(v) e^{i\Omega_k t} + 2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \int_0^t \cos \Omega_k t' dt' \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} + O(V^3) \quad (2.6)$$

где

$$f^{(n)}(0) \equiv f^{(n)}(v, 0)$$

Относительно уравнения (2.6) сделаем два замечания. Первое связано с выбором начальных условий задачи. Если принять приближенные хаотических фаз при $t=0$, т.е.

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n \neq 0$$

то первый член в (2.6) исчезает, и мы приходим к известному квазилинейному уравнению /5/ Фоккер-Планковского типа:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \delta(\omega_k - kv) \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} \quad (2.7)$$

Нас, однако, будет интересовать вывод уравнения типа (2.7) для произвольных начальных условий. Если, в частности, окажется, что $f^{(1)}(0) = 0$, то в (2.6) следует удержать члены более высокого порядка, содержащие память о начальных фазах. Второе замечание связано с тем, что каждое дифференцирование по v множителя $\exp(i\Omega_k t)$ приводит к появлению секулярных членов пропорциональных тем более высокой степени t , чем выше порядок членов в (2.6) по возмущению. Возможность обрывания ряда в (2.6) будет обсуждена ниже.

Учтем нелинейные эффекты, связанные с резонансом между частицей и волной. Пусть при некотором значении скорости v_2 возникает резонанс с k -ой гармоникой поля:

$$\Omega_k(v_2) = kv_2 - \omega_k t = 0$$

Вследствие резонанса скорость частицы изменяется на величину

$$\delta v_k \sim \frac{V_k}{\left| \frac{d\Omega_k(v)}{dv} \right|} \delta v_k$$

откуда

$$\delta v_k \sim \sqrt{V_k/k} = \frac{1}{k\tau_k}; \quad \frac{1}{\tau_k} \equiv \sqrt{\frac{eE_k k}{m}} \quad (2.8)$$

Если ширина резонанса (2.8) много больше расстояния между резонансами, то, как и в § I, движение частицы становится стохастическим. Условием этого является

$$K_k = \frac{k\delta\sigma_k}{\delta_k} \gg 1 \quad (2.9)$$

совпадающее с (2.3). В случае $K_k \ll 1$ частица захвачена волной, с которой она находится в резонансе, и рассмотрение его не представляет интереса. При выполнении (2.9) частота является функцией времени, и это обстоятельство должно отразиться на уравнении (2.6).

Для дальнейшего рассмотрим корреляционную функцию

$$R_k = \langle\langle e^{i\theta_k(t) - i\theta_k(0)} \rangle\rangle = \langle\langle e^{i\Omega_k(\nu, t)} \rangle\rangle \quad (2.10)$$

где обозначено:

$$\langle\langle \dots \rangle\rangle \equiv (2\pi)^{-N} \int d\theta_{k_1(0)} d\theta_{k_2(0)} \dots d\theta_{k_N(0)} \quad (2.11)$$

$$\theta_{k, (0)} = \theta_k(\nu, t=0)$$

и N - число гармоник в волновом пакете. Записывая уравнение для фазы $\theta_k(\nu, t)$ в виде конечных разностей аналогично (I.29) (см. также /II/) имеем

$$\theta_{k, (n+1)} = \left\{ \theta_{k, (n)} + \frac{\Omega_k}{\delta_k} + \sum_{k'} K_{kk', (n)}^2 \cos \theta_{k, (n)} \right\} \quad (2.12)$$

где введена дискретная шкала времен t_1, \dots, t_n, \dots с интервалами

$$t_{n+1} - t_n \sim \delta_k^{-1}$$

и обозначено

$$\theta_{k, (n)} = \theta_k(\nu_n, t_n)$$

$$K_{kk'} = \frac{d\Omega_k(\nu)}{d\nu} \delta\nu_{k'}$$

Итерируя уравнение (2.12) и выражая в конечном счете, $\theta_{k, (n)}$ через $\theta_{k, (0)}$, находим

$$R_k \sim e^{i\Omega_k t - t/t_2}$$

$$\frac{1}{t_2} = N_0 \delta_0 \ln K \quad (2.13)$$

где N_0 - число гармоник, входящих в сумму по k' в (2.12). Поскольку это число есть просто число резонансов, которые проходит частица за отдельный толчок, то

$$N_0 = K$$

и для времени t_2 расцепления корреляции фаз получаем окончательно с учетом (2.9) и (2.8):

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{\tau_0} \ln \frac{1}{\tau_0 \delta_0} \quad (2.14)$$

где τ_0, δ_0 - некоторые средние по пакету значения τ_k, δ_k .

Дальнейшая обработка уравнения (2.6) не представляет теперь особого труда. Подействуем оператором (2.11) на (2.6). Это дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} &= 2 \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_k V_k f^{(1)}(0) \langle\langle e^{i\Omega_k t} \rangle\rangle + \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial \nu} \sum_k |V_k|^2 \int dt' \langle\langle \cos \Omega_k t' \rangle\rangle \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \nu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $K \ll 1$ имеем:

$$R_k = \langle\langle e^{i\Omega_k t} \rangle\rangle \approx e^{i\Omega_k t} [1 + O(K)]$$

и уравнение (2.15) ничем не отличается от (2.6). Однако, при условии (2.9) первый член в (2.15) исчезает согласно (2.13) за время t_2 и мы получаем при $t \gg t_2$:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial v} \sum_k |V_k|^2 \frac{t_2}{1 + \Omega_k^2 t_2^2} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v} \quad (2.16)$$

т.е. квазилинейное уравнение, учитывающее конечность времени потери фазовой памяти $|t_2|$. Можно показать, что аналогичным образом исчезают все остальные члены, содержащие память о начальных условиях и пропорциональных более высокой степени возмущения.

Для того, чтобы секулярные члены, возникающие при выводе (2.6) не были существенными, необходимо, очевидно, чтобы они оставались малыми за время обрезания t_2 . Это приводит к неравенству:

$$\frac{t_2}{\tau_0} = |\ln \tau_0 \delta_0|^{-1} \ll 1 \quad (2.17)$$

которое автоматически выполняется в силу (2.9) (или (2.3)). При этом, естественно, необходимо чтобы число гармоник в пакете N было не менее N_0 , что приводит к известному условию на ширину пакета /5/:

$$N \delta_0 \gg N_0 \delta_0 = K \delta_0 = \frac{1}{\tau_0} \quad (2.18)$$

В более общем случае, когда пакет недостаточно широк, так что $N < N_0$, выражение для t_2 меняется следующим образом:

$$\frac{1}{t_2} = N \delta_0 \ln K \quad (2.19)$$

и условие обрезания секулярных членов (2.17), принимающее вид

$$N \delta_0 \gg \frac{1}{\tau_0} \ln \frac{1}{\tau_0 \delta_0} \quad (2.20)$$

уже не столь тривиально из-за множителя $\ln K = \ln \frac{1}{\tau_0 \delta_0}$.

§ 3. Функция распределения частиц в эргодическом слое

Вернемся к уравнениям движения частицы (I.2) и получим кинетическое уравнение для функции распределения $f(I, t)$. Согласно (I.28) скачок действия ΔI_n на одном толчке много меньше единицы при условии $\varepsilon \ll \Omega$. Это, означает, что всюду за исключением очень малой области по частоте $\sim \varepsilon$ вблизи сепаратрисы можно воспользоваться уравнением Фоккера-Планка для f :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial I} \left[\frac{\langle \Delta I \rangle}{\Delta t} f \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial I^2} \left[\frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\Delta t} f \right] \quad (3.1)$$

где Δt есть средний интервал между толчками, равный:

$$\Delta t = k_1 \Delta V_\phi / \Omega^2 \quad (3.2)$$

Учитывая, что длительность толчка $\sim \tau_0 \ll \Delta t$, находим из (I.2) и (I.6):

$$V(t) \approx -\sin \xi - \varepsilon \sin \left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{I} \approx & \frac{\varepsilon}{\Omega \tau_0^2} \sin \xi \cdot \sin \left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t \right) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{\Omega \tau_0^2} \sin^2 \left(\frac{k_1}{k_0} \xi + k_1 \Delta V_\phi t \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\langle \Delta I \rangle \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Omega \tau_0}$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta I)^2 \rangle & \approx \frac{\varepsilon^2}{\Omega^2 \tau_0^2} \langle V^2 \sin^2 \left(\xi \frac{k_1}{k_0} + k_1 \Delta V_\phi t \right) \rangle = \\ & = \frac{\varepsilon^2 H}{\Omega^2 \tau_0} \end{aligned}$$

Из (3.2) и (3.3) следует:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \frac{\langle (\Delta I)^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle \Delta I \rangle}{\Delta t}$$

и уравнение (3.1) принимает обычный вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} \mathcal{D} \frac{\partial f}{\partial I} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2 H}{\tau_0^2 k_A \Delta V_\phi}$$

Граничные условия для f выбираются следующим образом. Поскольку частица, движущаяся в эргодическом слое, не может проникнуть в область устойчивого движения, то границу области стохастически (I.18) следует рассматривать как отражающую стенку [13]. Поэтому граничным условием является отсутствие потока частиц

$$\mathcal{D} \frac{\partial f}{\partial I} \Big|_{I=I_0} = 0 \quad (3.5)$$

где I_0 есть решение уравнения:

$$\Omega(I_0) \tau_0 = \pi / \ln \frac{16\pi}{\varepsilon k_A \Delta V_\phi} \quad (3.6)$$

Из (3.4) - (3.6) сразу получаем стационарное решение

$$f(I) = \frac{1}{2I_0} \quad (3.7)$$

Из (3.7) находим:

$$F(H) = \frac{1}{2I_0 \tau_0 \Omega(H)} \quad (3.8)$$

где

$$F(H) dH = f(I) dI$$

Учитывая связь (I.9) между Ω и H и выражая H через V и ξ

получаем окончательно:

$$F(H) = \frac{1}{2\pi I_0} \ln \frac{32}{1 + \cos \xi - V^2/2} \quad (3.9)$$

Распределение (3.9) справедливо всюду, за исключением уже упоминавшейся малой области, где не справедливо приближение Фоккера-Планка. Эта область имеет порядок ε по частоте и, следовательно, порядок $\exp(-1/\varepsilon)$ по энергии вблизи сепаратрисы.

Время t_c установления стационарного распределения (3.9) может быть легко найдено из (3.4), (3.6), (I.4) и имеет следующий порядок:

$$t_c \sim \tau_0^2 k_A \Delta V_\phi / \varepsilon^2$$

В заключение выражаем благодарность С.С.Моисееву, Р.З.Сагдееву и Б.В.Чирикову за полезные дискуссии.

Л и т е р а т у р а

1. Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце, ЖЭТФ, 51, 1734 (1966).
2. А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 53, 348 (1967).
3. H. Grad. Phys. Fluids, 10, 137 (1967).
4. N.N. Filonenko, R.Z. Sagdeev, G.M. Zaslavski. Nuclear Fusion, 7, n 4 (1967)
5. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев, Ядерный синтез, 1, 82 (1961).
6. В.К.Мельников. ДАН СССР, 144, 747 (1962).
7. Б.В.Чириков, Атомная энергия, 6, 630 (1959).
8. M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev, J.B. Taylor, G.M. Zaslavski. Nuclear Fusion, 6, n 4 (1966)
9. Г.М.Заславский. Журн. прикл. мех. и технич.физики № 2, 16 (1967).
10. Я.Г.Синай. Изв. АН СССР, сер.мат., 30, 15 (1966).
11. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 52, 1081 (1967).
12. Ф.Г.Басс, Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро. ЖЭТФ, 49, 329 (1965).
13. Г.М.Заславский, Б.В.Чириков. ДАН СССР, 306 (1964).

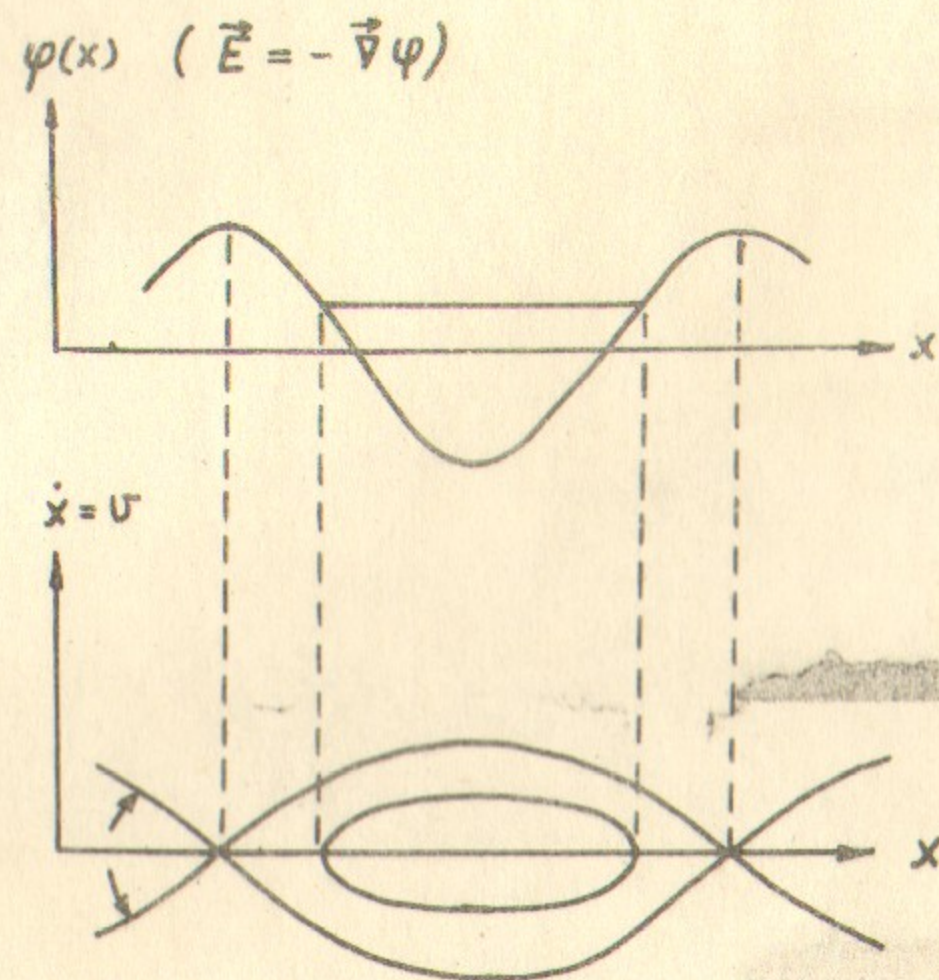


Рис. 1

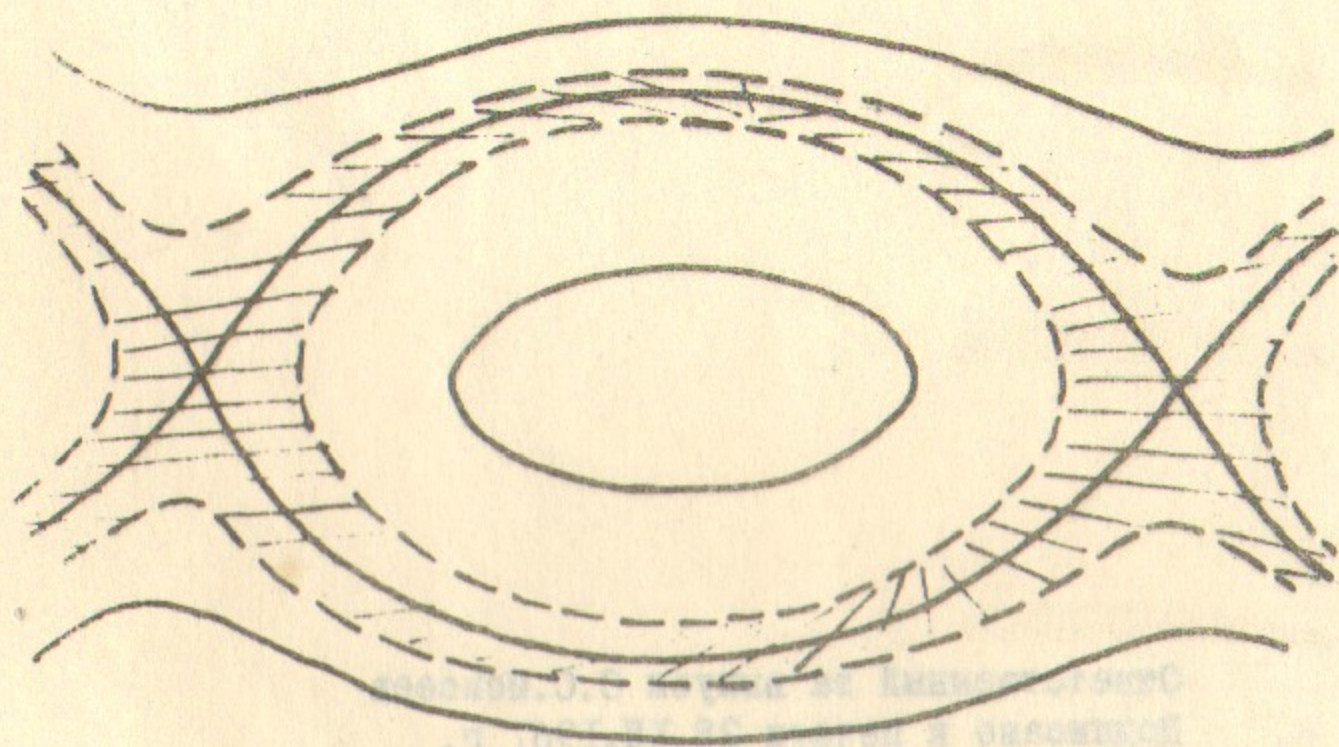


Рис. 2

Содержание

1. С.С. Моисеев, О.Н. Тарусин, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
2. С.С. Моисеев, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
3. С.С. Моисеев, Phys. Letters, 24, 177 (1967).
4. М.М. Р. Баскаков, Р.А. Сагдеев, С.М. Васильев, Nuclear Fusion, 7, 4 (1967).
5. А.А. Золотов, М.С. Демин, Р.С. Сагдеев, Изв. АН СССР, 1, 62 (1967).
6. С.С. Моисеев, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
7. С.С. Моисеев, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
8. М.М. Р. Баскаков, Р.А. Сагдеев, С.М. Васильев, Nuclear Fusion, 7, 4 (1967).
9. Р.Н. Золотов, Изв. АН СССР, 1967 г.
10. А.А. Золотов, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
11. С.С. Моисеев, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.
12. С.С. Моисеев, ИЯФ СО АН СССР, 1967 г.

Ответственный за выпуск С.С.Моисеев
 Подписано к печати 28.XII.1967 г.
 Усл. I печ.лист, тираж 260 экз. Бесплатно.
 Заказ № 176

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР