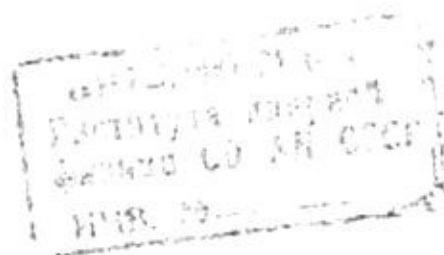


препринт 255

Я.С.Дербенёв, А.Н.Скрипский

КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ  
ПУЧКОВ В НАКОПИТЕЛЯХ ТЯЖЁЛЫХ ЧАСТИЦ



Новосибирск  
1968

Я.С.Дербенев, А.Н.Скринский

## КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ ПУЧКОВ В НАКОПИТЕЛЯХ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ

### А Н Н О Т А Ц И Я

В работе изучаются кинетические особенности метода электронного охлаждения пучков в накопителях тяжёлых частиц /1/. В первой части на основе интеграла столкновений Ландау /2/ для кулоновского взаимодействия получено кинетическое уравнение для пучка частиц, проходящих периодически через сопутствующий электронный поток. Кроме столкновений с электронами, учитывается рассеяние на когерентных (нетермодинамического происхождения) флуктуациях пространственного заряда пучка электронов, а также на атомах остаточного газа. Окончательное кинетическое уравнение является уравнением Фоккера-Планка в переменных действия. Во второй части на этой основе исследуется влияние на кинетический процесс отклонений в электронном потоке от состояния термодинамического равновесия (в сопутствующей системе). Качественно исследована зависимость скорости затухания и установившихся значений углового и энергетического разброса от распределения электронов по скоростям и пространственной неоднородности пучка электронов в радиальном направлении. Сделана оценка допустимого уровня когерентных шумов в электронном потоке. Получено решение кинетического уравнения в области малых углов ( $\theta_p < \theta_e$ ). При этом установлена важная теорема о сумме декрементов колебаний. Исследован также характер решения в области больших амплитуд.

## В в е д е н и е

Как известно, синхротронное излучение, используемое в накопителях электронов и позитронов для получения плотных пучков, практически отсутствует у тяжёлых частиц. Г.И.Будкером был предложен метод "электронного охлаждения" пучков в накопителях тяжёлых частиц /1/, основанный на передаче тепловой энергии пучка сопутствующему электронному потоку с более низкой температурой. В первом приближении кинетический процесс может быть описан как обычная релаксация двухкомпонентной плазмы /1, 2, 3/. Если поток электронов непрерывно возобновляется, то при полном выравнивании температур угловой и относительный энергетический разброс протонов (антипротонов) уменьшается в  $\sqrt{M/m}$  раз по отношению к разбросу электронов. Время "релаксации" при плотности электронов  $n = 10^8 \text{ см}^{-3}$ , энергии протонов  $W = 1 \text{ Бэв}$ , начальном угловом разбросе  $\theta_p \leq \theta_e = 3 \cdot 10^{-3}$  и коэффициенте заполнения орбиты электронным пучком  $\eta = 0,1$ , по оценке для максвелловских распределений свободных частиц составляет  $\sim 100 \text{ эк}$ .

В действительности, кинетика электронного охлаждения может оказаться значительно более сложной, так как сфокусированный пучок протонов (антипротонов), движущихся вблизи замкнутой орбиты, нельзя рассматривать как газ свободных частиц. С другой стороны, пучок электронов не может, строго говоря, рассматриваться в качестве термостата, так как возможные (а частью неизбежные) отклонения от состояния термодинамического равновесия в электронном потоке не будут затухать (в отличие от замкнутой системы) и могут оказать влияние на кинетический процесс.

Кинетическое уравнение, позволяющее корректно учитывать влияние указанных особенностей на кинетику электронного охлаждения, получено в первой части настоящей работы. В § 1 на основе интеграла столкновений Ландау /2/ и его релятивистского обобщения /4/, получено выражение  $Stoss$ -члена парных столкновений протонов с электронами пучка и атомами остаточного газа в переменных действие-фаза. В § 2 проделан вывод "когерентной" части  $Stoss$ -члена, описывающей диффузию частиц на флуктуациях нетермодинамического происхождения в электронном потоке. В § 3 обосновывается усреднение коэффициентов уравнения по фазам, пос-

де чего кинетический процесс описывается уравнением Фоккера - Плана в пространстве переменных действия.

Во второй части на этой основе изучается влияние "неидеальностей" электронного потока на скорость затухания импульсного разброса и его установившуюся ширину. В § 1 качественно исследована роль отклонений распределения электронов в сопутствующей системе от максвелловского. Показано, что кулоновские столкновения могут привести к неустойчивости колебаний по отдельным степеням свободы, если энергия упорядоченного движения электронов превышает тепловую. Вследствие связи радиального и продольного движения в ускорителях, кинетический процесс оказывается весьма чувствительным к пространственной неоднородности пучка электронов. В § 2 получены оценки допустимых значений градиентов средней скорости, плотности и температуры электронов, при превышении которых колебания протонов становятся неустойчивыми. В § 3 сделана оценка допустимого уровня когерентных шумов в электронном потоке и рассмотрены другие вопросы. Решение кинетического уравнения в области малых углов  $\theta_p < \theta_e$  ( $\theta_e$  - разброс электронов) получено в § 4. Здесь же установлена важная теорема о положительности суммы декрементов колебаний и независимости её от градиентов распределения электронов в фазовом пространстве  $(\vec{p}, \vec{z})$ . Наконец, в § 5 исследованы также характер решения в области  $\theta_p > \theta_e$  и зависимость скорости затухания от поперечных размеров электронного пучка.

## Часть I. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

### § 1. Stoss-член парного взаимодействия

Кинетическое уравнение для функции распределения взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле, имеет общий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{p}, \vec{z}, t) + [\mathcal{H}; f] = - \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p_{\alpha}} \quad (I.1.1)$$

где  $\mathcal{H}$  - гамильтониан частицы во внешнем поле,  $\vec{j}$  - вектор тока частиц в фазовом пространстве, обусловленный взаимодействием

(в "декартовых" координатах  $\vec{p}, \vec{z}$ , вектор тока имеет только импульсные компоненты). Если в уравнении совершить преобразование от обычных импульсов и координат к каноническим интегралам движения во внешнем поле (например, действие-фаза), скобка Пуассона выпадает из уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(C, t) = - \frac{\partial}{\partial C_i} j_i. \quad (1.1.2)$$

Компоненты  $j_i$  связаны с  $j_\alpha$  обычным законом преобразования векторов:

$$j_i = \frac{\partial C_i}{\partial p_\alpha} j_\alpha \quad (1.1.3)$$

Кинетическое уравнение для пучка протонов удобно получить в сопутствующей системе, где взаимодействие протонов и электронов кулоновское (относительные скорости нерелятивистские). Так как функция распределения есть релятивистский инвариант /4/, можно не вводить специального обозначения её в этой системе.

Правую часть (1.1.1) можно представить в виде /5,6/

$$\text{div} \vec{j} = [e \varphi_c; f] + \text{div} \vec{j}^{st} \quad (1.1.4)$$

где  $\varphi_c$  - потенциал самосогласованного поля системы зарядов,  $\vec{j}^{st}$  - собственно столкновительный ток.

Вклад в  $\vec{j}^{st}$ , кроме столкновений с электронами, дают также столкновения протонов между собой и с атомами остаточного газа. Учёт взаимодействия между протонами выходит за рамки этой работы. Во всяком случае, мы будем полагать, что плотность пучка протонов достаточно мала, чтобы за время затухания можно было пренебречь их столкновениями.

Рассмотрим сначала столкновения с электронами. В приближении Ландау /2,5,6/  $\vec{j}^{st}$  в пространстве обычных импульсов имеет хорошо известный вид:

$$j_\alpha = 2\pi e^2 e'^2 L \int d^3 p' \frac{u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta}{u^3} \left( \frac{\partial f'}{\partial p_\beta} - \frac{\partial f'}{\partial p_\beta'} \right), \quad (1.1.5)$$

где  $e$  и  $e'$  - заряды частиц,  $f(\vec{p}, \vec{z}, t)$  и  $f'(\vec{p}', \vec{z}, t)$  - функции распределения,  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$  - относительная скорость,

$L = \ln(\rho_{max}/\rho_{min})$  - кулоновский логарифм. Чтобы выражение (1.1.5) было справедливым, должно быть  $L \gg 1$ . В качестве

$\rho_{min}$  обычно принимается прицельное расстояние, при котором передача импульса при столкновении  $\Delta p \sim p$ :

$2|ee'|/\rho_{min} u \approx \mu u$  ( $\mu$  - приведенная масса). При относительном угловом разбросе в лабораторной системе  $10^{-3} \div 10^{-2}$ ,

$\rho_{min} \sim 5.(\beta\gamma)^{-2} \chi (10^{-9} \div 10^{-7})$  см. В качестве  $\rho_{max}$  могут конкурировать между собой: дебаевский радиус электронной "плазмы"  $d$ , поперечный размер пучка  $b$  и прицельное расстояние  $\rho_0 = u \tau_0$ , определяемое временем пролёта протона через пучок  $\tau_0$ :

$$\rho_{max} = \min\{d, b, \rho_0\}. \quad (1.1.6)$$

Для типичных параметров электронного пучка,  $\rho_{max} \sim 0.1 \div 1$  см. При этом  $L \approx 20$ . Большая величина  $L$  позволяет использовать (1.1.5) и при значительной пространственной неоднородности.

Электронный пучок может быть сфокусирован продольным магнитным полем  $\vec{H}$  с целью "компенсации" пространственного заряда. Если средний ларморовский радиус электронов  $\rho_L$  окажется значительно меньше  $\rho_{max}$ , выражение (1.1.5) станет, вообще говоря, неприменимым, так как нужно учитывать ларморовское вращение электронов (относительно протонов предположим, что искривлением их траекторий в области взаимодействия пучков можно пренебречь). При этом нужно использовать общее выражение  $\vec{j}^{st}$ , учитывающее влияние внешнего поля на столкновения [6,7]. В случае однородного (или слабо неоднородного) магнитного поля  $\vec{j}^{st}$  можно записать в виде

$$\vec{j}_\alpha = e^2 e'^2 \int d^3 p' d^3 k \int d\vec{z} \exp[i\vec{k} \cdot \int_0^{\vec{z}} \vec{u}(\vec{z}') d\vec{z}'] \frac{K_\alpha K}{K^4} \left( \frac{\partial f}{\partial \vec{p}_z} f' - f \frac{\partial f'}{\partial \vec{p}_z'} \right) \quad (1.1.7)$$

где  $\vec{p}_z, \vec{p}_z'$  - импульсы частиц в магнитном поле как функции времени с начальным условием  $\vec{p}_0 = \vec{p}, \vec{p}_0' = \vec{p}'$

Интегрирование по  $K$  заключено в пределах между  $\rho_{\max}^{-1}$  и  $\rho_{\min}^{-1}$ .

Для протонов  $\vec{\rho}' = \vec{\rho}$ , а для электронов  $\vec{\rho}' = \vec{\rho}'$  удобно разложить на продольную и поперечную к магнитному полю составляющие:

$$\rho'_z = \rho'_H + \rho'_1(z).$$

Фаза экспоненты в (1.1.7) равна

$$\phi = \vec{k}(\vec{v} - \vec{v}'_H)z + \vec{k}_1 \int_0^z \vec{v}'_1(z') dz' \equiv \vec{k} \vec{u}_H z + \vec{k}_1 \vec{z}'_1(z). \quad (1.1.8)$$

По порядку величины  $|\vec{z}'_1(z)| \sim \rho_L$ .

В области  $k\rho_L \gg 1$  существенны малые значения  $\tilde{z}$  ( $\omega_L \tilde{z} \ll 1$ ); при этом  $\phi = \vec{k} \vec{u} z$ ; это значит, что вклад этой области прицельных параметров ( $k = \rho^{-1}$ ) имеет вид (1.1.5), где  $L = L_1 = \ln(\rho_L / \rho_{\min})$ ,  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$ .

В области  $k\rho_L < 1$  можно пренебречь вторым слагаемым в выражении (1.1.8), что соответствует замене  $\vec{u} \rightarrow \vec{u}_H = \vec{v} - \vec{v}'_H$ . Таким образом, для этой области  $\vec{j}^{st}$

также можно записать в виде (1.1.5), где

$$L = L_2 = \ln(\rho_{\max} / \rho_L), \quad \vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'_H, \quad \rho_{\max} \gg \rho_L. \quad (1.1.9)$$

Такая структура  $\vec{j}^{st}$  имеет простой физический смысл: в области  $k\rho_L \ll 1$  столкновения происходят адиабатически по отношению к ларморовскому вращению электронов, и поперечные к  $\vec{H}$  степени свободы не принимают участия в обмене импульсом и энергией. (Более точно, условием адиабатичности является

$k u_H \ll \omega_L$ ; если  $u_H \gg v_{T'}$ , то  $\rho_L$  в (1.1.9) нужно заменить на  $\rho_1 = u / \omega_L$ ).

Для дальнейшего удобно записать (1.1.5) в виде:

$$j_{\alpha}^{st} = \langle \Delta p_{\alpha} \rangle^e f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_{\beta}} \langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle^e f \quad (1.1.10)$$

где

$$\langle \Delta p_\alpha \rangle^e = \bar{F}_\alpha^e + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_\beta} \langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle \quad (1.1.11)$$

$$\bar{F}^e = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \int d^3 p' \frac{u_\beta}{u} \frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} \cdot 2\tilde{n} e^2 e'^2 L \quad (1.1.12)$$

$$\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle^e \equiv d_{\alpha\beta}^e = 4\tilde{n} e^2 e'^2 L \int d^3 p' f' \frac{u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta}{u^3} \cdot (1.1.13)$$

По физическому смыслу,  $\bar{F}^e$  представляет собой средний импульс, передаваемый частице средой в единицу времени, если пренебречь рассеянием (чему соответствует  $M \rightarrow \infty$ ). В связи с этим силу  $\bar{F}$  называют динамической силой трения [8, 9]. Тензор диффузии  $d_{\alpha\beta}$ , напротив, отвечает взаимодействию с бесконечно тяжелыми движущимися нулоновскими центрами. Истинная средняя сила равна  $\langle \Delta \vec{p} \rangle$ . Как видно из (1.1.12), сила  $\bar{F}^e$  имеет потенциал в пространстве скоростей:

$$\bar{F}^e = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} U(\vec{v}, \vec{z}) \quad (1.1.14)$$

где

$$U(\vec{v}, \vec{z}) = \frac{2\tilde{n} e^2 e'^2}{m} L \int d^3 p' f' \left( \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} \frac{\vec{u}}{u} \right) = \frac{4\tilde{n} e^2 e'^2}{m} L \varphi_{\vec{v}} \quad (1.1.15)$$

Для тока  $\vec{j}_1$ , когда  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$ ,  $\varphi_{\vec{v}}$  как функция скорости  $\vec{v}$  имеет вид потенциала притяжения, создаваемого распределёнными кулоновскими источниками:

$$\varphi_{\vec{v}} = - \int \frac{d^3 p'}{u} f', \quad \nabla_{\vec{v}}^2 \varphi_{\vec{v}} = 4\tilde{n} m^3 f'. \quad (1.1.16)$$

Эту аналогию, благодаря её привычности, удобно использовать при практических расчётах и оценках.

Для тока  $\vec{j}_2$ , когда  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'_H$ ,  $\varphi_{\vec{v}}$  не имеет



кулоновского аналога:

$$\rho_{\vec{v}} = \frac{1}{2} \int f' d^3 p' \left( \frac{\partial}{\partial \vec{v}'_H} \frac{\vec{u}_H}{u_H} \right) = -\frac{1}{2} v_{\perp}^2 \int \frac{d^3 p'}{u_H^3} f' = -\frac{\vec{v}_{\perp} \cdot \partial}{2 \partial \vec{v}'_{\perp}} \rho_H', \quad (I.1.17)$$

где  $\rho_H$  - потенциал (I.1.16), создаваемый  $\delta$ -образным в поперечном к магнитному полю направлении распределением

Получим теперь  $\int_{j_0}^{j_{st}}$  для столкновений с атомами остаточного газа. Его влияние должно заключаться в поперечном рассеянии протонов на ядрах и торможении (увлечение в сопутствующей системе) на электронах. Так как относительные скорости протонов и атомов могут быть релятивистскими, нужно пользоваться выражением  $\int_{j_0}^{j_{st}}$ , полученным в релятивистском случае Беляевым и Будкером /4/:

$$j_{\alpha} = 2\pi e^4 \sum_a z_a^2 L_a \int d^3 p' S_{\alpha\beta} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial p_{\beta}} f_a - \frac{\partial f_a}{\partial p'_{\beta}} f \right)$$

где  $Z_a$  - заряд частиц сорта "а",  $L_a$  - соответствующий кулоновский логарифм,  $S_{\alpha\beta}$  - stoss - матрица, громоздкое выражение которой для общего случая приведено в /4/. В нашем случае можно получить простое выражение для  $S_{\alpha\beta}$ , если воспользоваться малостью скоростей протонов  $\vec{v}$  по отношению к величине скорости газа  $v'$  и отбросить в  $S_{\alpha\beta}$  члены порядка  $v/v'$ ,  $v/c$  и выше:

$$S_{\alpha\beta} = \frac{v'^2 \delta_{\alpha\beta} - v'_{\alpha} v'_{\beta}}{v'^3} + O\left(\frac{v}{v'}, \frac{v}{c}\right) + \dots$$

Взяв для частиц остаточного газа функцию распределения в виде  $f_a = n_a \delta(\vec{p}' + \gamma m_a \vec{v}_0)$ , где  $\vec{v}_0$  - средняя скорость протонов в лабораторной системе, получим:

$$\langle \Delta p_{\parallel 0} \rangle = F_{\parallel 0} = -4\pi e^4 \sum_a \frac{L_a z_a^2 n_a}{\gamma m_a v_0^2}; \quad \langle \Delta \vec{p}_{\perp} \rangle = 0 \quad (I.1.18)$$

$$\langle (\Delta p_z)^2 \rangle_0 = \langle (\Delta p_z)^2 \rangle_0 = 4\tilde{\pi} e^4 \sum_a L_a z_a^2 \frac{n_a}{v_0},$$

$$\langle (\Delta p_{\parallel})^2 \rangle_c = \langle \Delta p_{\alpha} \Delta p_{\beta} \rangle_{\alpha \neq \beta} = 0; \quad (\vec{p}_1 = \{p_z, p_z\}) \quad (I.1.19)$$

как и должно быть.

В выражении  $\langle \Delta p_{\parallel} \rangle_0$  достаточно учесть только электронную компоненту, ввиду малости массы электрона. Рассеяние, напротив, происходит главным образом на ядрах.

## § 2. Рассеяние на когерентных флуктуациях пространственного заряда

Кулоновское рассеяние может быть не единственным механизмом диффузии (или "нагрева") пучка протонов в электронном потоке. Кроме основной, стационарной части, в поле пространственного заряда нужно учитывать также нерегулярную, "случайную" часть, связанную с коллективными флуктуациями плотности и скорости, возбуждаемыми источниками "внешнего" происхождения (колебания управляющего напряжения, катодные мерцания и т.п.).

Проделаем сначала формальный вывод выражения соответствующего Stoss-члена, отвлекаясь в (1.1.4) от стационарной части потенциала  $\psi_c = \psi_c(\vec{z}) + \tilde{\psi}_c(\vec{z}, t)$  и кулоновских столкновений. По теории возмущений, разложим  $f(\vec{p}, \vec{z}, t)$  в ряд по степеням  $\tilde{V} = e\tilde{\psi}_c$ :

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots \quad (I.2.1)$$

Поскольку времена когерентных флуктуаций могут быть не малы по сравнению с периодом движения во внешнем поле, удобно сразу перейти в кинетическом уравнении к переменным  $C_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} f + [\tilde{V}; f] = 0.$$

Подставляя сюда разложение (I.2.1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)} + [\tilde{V}; f^{(0)}] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} f^{(2)} + [\tilde{V}; f^{(1)}] = 0$$

Средняя скорость изменения  $f(C, t)$  равна

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} f} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} f^{(2)}} = \overline{[\tilde{V}; [\int_{-\infty}^t \tilde{V}(C, t') dt'; f]]} \quad (1.2.2)$$

так как, по определению

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} f^{(1)}} = \overline{[\tilde{V}; f^{(0)}]} = 0.$$

Введём обозначение

$$\tilde{S} = \int_{-\infty}^t \tilde{V}(C, t') dt'$$

и преобразуем (1.2.2), используя свойства скобок Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\tilde{S}; [\tilde{S}; f]] - [U_c; f] = 0 \quad (1.2.3)$$

где  $U_c = \frac{1}{2} [\tilde{V}; \tilde{S}]$  - коррелятивный потенциал [10].

Последний член в (1.2.3) является обычной скобкой Пуассона и не даёт вклада в диффузию; потенциал  $U_c$  можно рассматривать как малую поправку к регулярной части  $e\varphi_c$ . Используя запись скобок Пуассона в виде дивергенции вектора тока в фазовом пространстве, получим уравнение диффузии:

$$\frac{\partial}{\partial t} f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ \frac{d}{dt} (\tilde{\Delta} C_i \tilde{\Delta} C_k) \right\} \frac{\partial f}{\partial C_k} \quad (1.2.4)$$

где

$$\tilde{\Delta} C_i = [\tilde{S}; C_i].$$

Если, как обычно, от усреднения по времени перейти к усреднению по вероятностям, тензор рассеяния в (1.2.4) можно записать в виде

$$\tilde{D}_{ik} = \langle [\tilde{V}; C_i][\tilde{S}; C_k] + [\tilde{V}; C_k][\tilde{S}; C_i] \rangle.$$

$\tilde{D}_{ik}$  можно выразить явно через флуктуации электрического поля:

$$[\tilde{V}; C_i] = e \tilde{\Delta} \vec{E} \frac{\partial C_i}{\partial \vec{r}}; \quad [\tilde{S}; C_i] = e \int_{-\infty}^t \tilde{\Delta} \vec{E}(\vec{z}', t') \frac{\partial C_i}{\partial \vec{r} t'} dt'$$

$$\tilde{D}_{ik} = e^2 \int_{-\infty}^t \langle \tilde{\Delta} E_\alpha(\vec{z}, t) \tilde{\Delta} E_\beta(\vec{z}', t') \rangle \left( \frac{\partial C_i}{\partial r_\alpha} \frac{\partial C_k}{\partial r_\beta t'} + \frac{\partial C_k}{\partial r_\alpha} \frac{\partial C_i}{\partial r_\beta t'} \right) dt' \quad (1.2.5)$$

Среднее  $\langle \dots \rangle$  в (1.2.5) есть, по определению, корреляционная функция флуктуаций поля  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}(\vec{z}|\vec{z}', t|t')$ . При условии пространственной и временной однородности  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  является функцией разности аргументов и может быть выражена через спектральную плотность флуктуаций [9, 11]:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \sum_{\vec{k}, \omega} (E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega} \exp[i\vec{k}(\vec{z} - \vec{z}') - i\omega(t - t')] \quad (1.2.6)$$

причём

$$\langle \Delta E_\alpha(\vec{z}, t) \Delta E_\beta(\vec{z}, t) \rangle = \sum_{\vec{k}, \omega} (E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega} \quad (1.2.7)$$

В пространственно неоднородном случае  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  не является функцией только разности  $\vec{z} - \vec{z}'$ . Форму записи (1.2.6) и (1.2.7) можно сохранить, если ввести "локальную" спектральную плотность:

$$(E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega}^{\vec{z}} \cdot \delta(\omega - \omega') = \int d^3k' \langle E_\alpha(\vec{k}', \omega') E_\beta^*(\vec{k}, \omega) \rangle e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{z}} \quad (1.2.8)$$

(корреляция Фурье-гармоник теперь не пропорциональна  $\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ ). Тензор диффузии в пространстве интегралов  $C_i$  можно, таким образом, записать в виде:

$$\tilde{D}_{ik} = e^2 \sum_{\vec{k}, \omega} (E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega}^{\vec{z}} \int_{-\infty}^0 d\tilde{z} \cdot \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{z} - \vec{z}_i) + i\omega \tilde{z}] A_{ik}^{\alpha\beta} \quad (1.2.9)$$

где  $A_{ik}^{\alpha\beta}$  - выражение в круглых скобках в (1.2.5).

Как известно [9], интеграл парных столкновений (1.1.10) также может быть получен в духе общего метода составления уравнения Фоккера-Планка, при учёте "радиационной" силы трения, вычисленной по невозмущённому движению заряда, и рассеяния на термодинамических флуктуациях поля среды. В однородной плазме выражения  $\vec{F}$  и  $d_{\alpha\beta}$ , учитывающие динамическую поляризацию среды взаимодействующими частицами, имеют вид

$$F_\alpha = 2e^2 e^{i^2} \sum_{\vec{k}, \omega} \frac{K_\alpha K_\beta}{K^4 |\epsilon_{11}|^2} \int d^3p' \frac{\partial f'}{\partial p'_\beta} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}') \cdot \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (1.2.10)$$

$$d_{\alpha\beta} = \hat{\pi} e^2 \sum_{\vec{k}, \omega} (E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega}^{\vec{z}} \cdot \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (1.2.11)$$

где

$$(E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega}^{\vec{z}} = \frac{2K_\alpha K_\beta}{\hat{\pi} K^4 |\epsilon_{11}|^2} \int d^3p' f' \cdot \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}') \quad (1.2.12)$$

$\epsilon_{||}(\vec{k}, \omega)$  - электрическая проницаемость /6, 9, 12/ .  
 Множитель  $|\epsilon_{||}|^{-2}$  учитывает дебаевское экранирова-  
 ние ( $|\epsilon_{||}| \sim 1 + (kd)^{-2}$ ). (1.2.10) и (1.2.11) с логарифмической точностью совпадают с (1.1.12) и (1.1.13).

Из сравнения (1.2.9) и (1.2.11) видно, что (1.2.9) может являться общим выражением тензора диффузии через полную спектральную плотность, включающую как (1.2.12), так и "надтепловую" часть.

В термодинамически равновесной плазме, когда

$$(E_\alpha E_\beta^*)_{\vec{k}, \omega} = (E_\alpha E_\beta)_{\vec{k}, \omega}^{T'}$$

, учёт поглощения энергии флук-

туационного поля приводит к тепловому равновесию ансамбля пробных частиц (протонов) со средой:  $T = T'$ . Если же в плазме возбуждаются волны со случайными фазами (когерентные флуктуации), спектральная плотность может значительно превосходить (1.2.12). Физически это означает, что энергия волн сравнима или много больше дебаевской энергии кулоновского взаимодействия зарядов плазмы:

$$\langle (\tilde{\Delta} \vec{E})^2 \rangle \geq \frac{T'}{d^3} \quad (1.2.13)$$

т.е. превышает термодинамически равновесное значение /9, 13/ (в то же время, для применимости представления о волнах, должно быть  $\langle (\tilde{\Delta} \vec{E})^2 \rangle \ll nT'$ , т.е. при учёте волн не должны изменяться "грубые" характеристики среды). Соответственно возрастает и скорость диффузии. Скорость же кулоновских потерь

$$- \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = -\vec{F} \cdot \vec{v}$$

практически не изменяется, так как воздействие частицы на среду обязано подавляющим образом парным столкновениям, на которые присутствие "слабых" когерентных шумов не оказывает заметного влияния. Когерентные флуктуации, таким образом, повышают конечную температуру пучка протонов, не сказываясь на скорости затухания. Однако, для того, чтобы затухание вообще имело место, необходимо, чтобы максимальное значение кулоновских потерь превышало скорость диффузии:

$$|\vec{F} \vec{v}|_{v \sim v_T'} \gg \langle (\Delta p)^2 \rangle / 2M.$$

Обсудим еще некоторые особенности взаимодействия с когерентными шумами, связанные со спецификой задачи. В изолированном объеме плазмы спектральная плотность воли сосредоточена в области  $k \ll d^{-1}$ , где возможно развитие неустойчивостей, а в области  $k \geq d^{-1}$  волны быстро затухают. Поэтому когерентная часть спектра  $(E_{\alpha}^* E_{\beta})_{\vec{k}, \omega}$  резко отделена от термодинамической (взаимодействие с "плазмонами" /13/). В нашем случае, когда время пролёта протона через пучок может быть сравнимо с периодом ленгмюровских колебаний  $d/v_T'$ , а пучок и "волны" в нём непрерывно возобновляются, спектральная плотность может существенно отличаться от (I.2.12) и в области  $k > d^{-1}$ , так как волны не успевают затухнуть. По той же причине не могут играть существенной роли и возможные плазменные неустойчивости, так как обычно их времена  $\tau \gg d/v_T'$ . Флуктуации, возбуждаемые "внешним" источником, могут лишь существенно деформироваться при распространении в электронном потоке. Другая особенность связана с колебательным характером движения протонов возле равновесной орбиты: медленные изменения тока и плотности в пучке с частотами  $\omega \ll \omega_i$  ( $\omega_i$  - парциальные частоты колебаний протонов) являются адиабатическими по отношению к осцилляции протонов и не приводят к росту амплитуд. При заданной спектральной плотности, это автоматически обеспечивается структурой тензора диффузии (I.2.9).

### § 3. Усреднение по фазам

Запишем теперь в переменных  $C_i$  полное кинетическое уравнение, учитывающее столкновения с электронами пучка, остаточным газом и рассеяние на когерентных шумах:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial C_i} \left\{ Q_i f - \frac{1}{2} D_{ik} \frac{\partial f}{\partial C_k} \right\} = 0, \quad (I.3.1)$$

где

$$Q_i = \frac{\partial C_i}{\partial \vec{p}} (\vec{F}^e + \vec{F}^o),$$

$$D_{ik} = \frac{\partial C_i}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial C_k}{\partial p_{\beta}} (d_{\alpha\beta}^e + d_{\alpha\beta}^o) + \tilde{D}_{ik}. \quad (I.3.2)$$

В качестве канонических интегралов движения выберем три пары сопряженных переменных действие  $I_i$  - фаза  $\varphi_i$ , через которые радиальные, аксиальные и продольные отклонения координат и импульсов от равновесной фазовой траектории выражаются следующим образом /14/:

$$z = z_b + z_c; \quad p_z = \frac{p_s}{R} \frac{\partial z}{\partial \theta_s}$$

$$z_b = \frac{R}{p_s} \sqrt{\frac{1}{2} I_z} f_z(\theta) \exp[i\nu_z \theta_s + i\varphi_z] + \text{к.с.}; \quad z_c = \frac{\gamma R}{p_s} \Psi(\theta) \cdot p_{||}$$

$$Z = \frac{R}{p_s} \sqrt{\frac{1}{2} I_Z} f_Z(\theta) \exp[i\nu_Z \theta_s + i\varphi_Z] + \text{к.с.}; \quad p_Z = \frac{p_s}{R} \frac{\partial Z}{\partial \theta_s} \quad (1.3.3)$$

$$\vartheta = \theta - \theta_s = \vartheta_c + \vartheta_b; \quad \vartheta_b = \frac{1}{R} \left( \Psi \frac{\partial z_b}{\partial \theta_s} - z_b \frac{d\Psi}{d\theta_s} \right),$$

$$\left| \frac{d\vartheta_c}{d\theta_s} \right| \sim \left| \frac{p_{||}}{p_s} \right| \ll 1.$$

Здесь  $\theta_s = \omega_s t$  .  $p_s = \gamma M \beta c$  .  $2\pi R$  -

соответственно азимут, импульс и длина орбиты равновесной частицы,  $f_z$  и  $f_Z$  - функции Флоке,  $\Psi$  - вынужденное решение уравнения

$$\frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} + [1 - n(\theta)] \Psi = R/R(\theta),$$

$p_{||}$  - продольный импульс в сопутствующей системе. В отсутствии в.ч.-поля  $p_{||} = I_{||}$  ,  $\frac{d\vartheta_c}{d\theta} = \sim \frac{p_{||}}{p_s} = \text{Const}$  , а

в режиме автофазировки

$$p_{||} = -\sqrt{2I_c} \sin(\nu_c \theta_s + \varphi_c), \quad \frac{\partial I_c}{\partial p_{||}} = p_{||} \quad (1.3.4)$$



Вместе с координатами и импульсами частиц, коэффициенты кинетического уравнения (I.3.1) являются периодическими функциями. "быстрых" фаз  $\Psi_i = \omega_i t + \varphi_i$ . Рассматриваемые как функции от  $\Gamma$  и  $\varphi$ , они осциллируют со временем, причём осцилляции относительно среднего уровня в общем случае нельзя считать малыми. Можно, однако, заменить (I.3.1) более простым уравнением с коэффициентами, не зависящими от времени, если изменение  $f(\zeta, t)$  за время порядка  $\omega_i^{-1}$  мало. Для этого применим к (I.3.1) метод усреднения, записав для краткости уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \hat{L}(t)f = 0$$

Оператор  $\hat{L}(t)$ , как функцию с линейчатым спектром, можно представить в виде

$$\hat{L}(t) = \bar{\hat{L}} + \tilde{\hat{L}}(t),$$

где  $\bar{\hat{L}}$  представляет собой среднее по периоду  $T_c \sim \omega_i^{-1}$  значение  $\hat{L}$ , а  $\tilde{\hat{L}}$  - его осциллирующую часть. (Под периодом  $T_c$  следует понимать достаточно большой промежуток времени, такой что  $T_c^{-1} \left| \int_t^{t+T_c} \hat{L} dt' \right| \ll |\bar{\hat{L}}|$ ; в этом смысле с оператором  $\tilde{\hat{L}}$  можно обращаться, как с периодической функцией времени с равным нулю средним значением). Усредненное уравнение, дающее правильное изменение функции  $f$  за период  $T_c$  с точностью до членов второго порядка, есть

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \bar{\hat{L}} f + \frac{1}{2} [\hat{L} \hat{M}] f = 0$$

где  $[\hat{L} \hat{M}]$  - коммутатор операторов  $\hat{L}$  и  $\hat{M} = \int_{t_0}^{t_0+t} \hat{L} dt'$  (I.3.5).

Если третий член в (I.3.5) представляет собой малую поправку ( $\hat{M} \ll 1$ ), его учёт не может изменить характера решения даже за большие времена, так как решение кинетического уравнения со временем либо стремится к устойчивому стационарному, либо расходится. Достаточно использовать уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\bar{L}f = -\frac{\partial}{\partial C_i} (\bar{Q}_i f - \frac{1}{2} \bar{D}_{ik} \frac{\partial f}{\partial C_k}) .$$

(1.3.6)

Условие  $\hat{M} \ll 1$  означает, что время релаксации  $\tilde{\tau} \gg T_0$ , так как  $\hat{M} \sim T_0 \hat{L}$ , а  $\hat{L} \sim \tilde{\tau}^{-1}$ , по физическому смыслу. Усреднение коэффициентов кинетического уравнения по времени "на траектории" при этом условии составляет основу так называемого антидиффузионного приближения /10/.

Практически почти всегда усреднение по времени можно заменить усреднением по фазам  $\Psi_i$ . Оператор  $\hat{L}$  как функция фаз представим рядом Фурье

$$\hat{L}(I, \Psi) = \sum_{\{m\}} \hat{L}_{\{m\}} \exp [i \sum_i m_i \Psi_i] .$$

Частоты изменения гармоник со временем равны

$$\omega_{\{m\}} = \sum_i m_i \omega_i .$$

Кроме "нулевой" гармоники  $m_i = 0$ , представляющей собой просто среднее по фазам значение  $\hat{L}$ , при усреднении по времени отличный от нуля вклад в  $\hat{L}(C, t)$  могут давать, вообще говоря, также гармоники с частотами

$$\omega_{\{m\}} \lesssim \tilde{\tau}^{-1}$$

(1.3.7)

Формально, всегда можно подобрать такую комбинацию  $\{m\}$ , что  $\omega_{\{m\}}$  может быть сделана сколь угодно малой. Однако, выполнение условия (1.3.7) в общем случае возможно лишь для весьма высоких  $m$ , если учесть, что  $\omega_i \tilde{\tau} \gg 1$ , а частоты  $\omega_i$ , как правило, не образуют между собой рациональных отношений низкого порядка. Поэтому величины таких гармоник будут пренебрежимо малы. Реально нужно учитывать также нелинейность колебаний частиц, которая приводит к зависимости частот от амплитуд. Несмотря на относительную слабость изменения частоты с амплитудой:

$$|\Delta \omega_i| = \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_k} \Delta I_k \right| \ll \omega_i ,$$

эта зависимость приведёт к нарушению "резонансного" условия (I.3.7), когда, под действием столкновений,  $I$  получит приращение  $\Delta I$  такое, что

$$|\Delta \omega_{\{m\}}| > \tau^{-1}.$$

Это обстоятельство особенно существенно при оценке роли резонирующих гармоник невысокого порядка, величины которых могут быть сравнимы с величиной нулевой гармоники. Исключения могут составить случаи, когда резонансное условие поддерживается благодаря автофазировке, возникающей под действием какого-либо "внешнего" возмущения, например, поля электронного пучка. Для нелинейных резонансов, этим явлением можно пренебречь, если фазовый объём внутри сепаратрицы резонанса относительно мал.

Таким образом, при условии  $\tau \gg T_0$ , почти всегда можно считать, что кинетические коэффициенты  $\bar{Q}_i$  и  $\bar{D}_{ik}$  не зависят от фаз  $\varphi_i$ . Это позволяет перейти к более простому уравнению для функции трех переменных  $I_i$ , проинтегрировав по фазам уравнение (I.3.6):

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial I_i} \left\{ \bar{Q}_i - \frac{1}{2} \bar{D}_{ik} \frac{\partial f}{\partial I_k} \right\}. \quad (I.3.8)$$

Знак (  $\bar{\quad}$  ) означает теперь усреднение по фазам поперечных и продольного колебаний и азимуту на равновесной орбите протонов.

Уравнение (I.3.8) удобно записать в стандартной форме Фоккера-Планка [15,16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial I_i} \left\{ \langle \Delta I_i \rangle f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \left( \langle \Delta I_i \Delta I_k \rangle f \right) \right\} = 0, \quad (I.3.9)$$

где

$$\langle \Delta I_i \rangle = \bar{Q}_i + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I_k} \langle \Delta I_i \Delta I_k \rangle \equiv \langle \Delta I_i \rangle_d + \langle \Delta I_i \rangle_{fl}. \quad (I.3.10)$$

$$\langle \Delta I_i \Delta I_k \rangle = \bar{D}_{ik}. \quad (I.3.11)$$

По физическому смыслу,  $\langle \Delta I_i \rangle_d = \bar{Q}_i$  даёт скорость  $\dot{I}$  за счёт диссипативных процессов ( $\bar{Q}_i$  - "мощность" силы трения), а  $\langle \Delta I_i \rangle_{fl}$  описывает среднее приращение  $I_i$  в единицу времени за счёт поглощения энергии флуктуационного поля "среды". В режиме колебаний, когда  $I_i$  определяет энергию осциллятора, величины  $\langle \Delta I_i \rangle$  характеризуют, для группы частиц с близкими значениями  $I_i$ , направление кинетического процесса в целом. При инфинитности движения, когда  $I \sim p$ , в этом смысле являются важными также и моменты (I.3.11).

Коэффициенты  $\partial I_i / \partial p_\alpha$ , необходимые для составления (I.3.10 - I.3.11), можно найти непосредственно из выражений (I.3.3 - I.3.4), воспользовавшись свойством канонического преобразования  $(\partial I_i / \partial p_\alpha) = (\partial q_\alpha / \partial \Psi_i)$ . Приведём еще обычные выражения  $\langle \Delta I_i \rangle$  через моменты  $\langle \Delta p_\alpha \rangle$  и  $\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle$  (разумеется, тождественные (I.3.10)). С учётом (I.3.3) получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Delta I_z \rangle = & \overline{\frac{\partial I_z}{\partial p_z} \langle \Delta p_z \rangle} + \overline{\frac{\partial I_z}{\partial p_{||}} \langle \Delta p_{||} \rangle} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 I_z}{\partial p_z^2} \langle (\Delta p_z)^2 \rangle} + \\ & + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 I_z}{\partial p_{||}^2} \langle (\Delta p_{||})^2 \rangle} + \overline{\frac{\partial^2 I_z}{\partial p_z \partial p_{||}} \langle \Delta p_z \Delta p_{||} \rangle}; \end{aligned} \quad (I.3.12)$$

$$\langle \Delta I_z \rangle = \overline{\frac{\partial I_z}{\partial p_z} \langle \Delta p_z \rangle} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 I_z}{\partial p_z^2} \langle (\Delta p_z)^2 \rangle}; \quad (I.3.13)$$

$$\langle \Delta I_c \rangle = \overline{\frac{\partial I_c}{\partial p_{||}} \langle \Delta p_{||} \rangle} + \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 I_c}{\partial p_{||}^2} \langle (\Delta p_{||})^2 \rangle}. \quad (I.3.14)$$

Амплитуда радиальных бетатронных колебаний  $a_z \sim \sqrt{I_z}$ , как видно из (I.3.12), изменяется под действием толчков не только в радиальном, но и в азимутальном направлении, так как положение равновесия, определяемое полной энергией (импульсом) протона, меняется при этом скачкообразно (в отличие от адиабатически медленных колебаний при синхротронном движении).

## Часть II. КИНЕТИКА ЭЛЕКТРОННОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

На основе уравнения (I.3.9) исследуем теперь основные особенности кинетического процесса, связанные с отклонениями от термодинамического равновесия в электронном потоке. Наиболее существенным здесь является, по-видимому, зависимость скорости затухания и установившегося распределения от формы электронного распределения по скоростям и пространственной неоднородности пучка электронов, а также нагрев пучка протонов на когерентных "шумах" в электронном потоке.

### § 1. "Монохроматическая" неустойчивость

Установим вначале общий характер зависимости скорости затухания и установившихся средних амплитуд от формы распределения электронов по скоростям. Для большей ясности отвлечемся от рассеяния на когерентных шумах и остаточном газе, а электронный поток будем считать пространственно однородным. Пренебрежем также для простоты азимутальной неоднородностью фокусировки протонов ( $|f_z| = \text{const}$ ,  $|f_z| = \text{const}$ ).

При этих условиях выражения кинетических коэффициентов (I.3.12 - I.3.14) принимают вид:

$$\langle \Delta I_z \rangle = \overline{\rho_z F_z^e} + \frac{1}{2} \overline{d_{zz}^e}, \quad (\text{II.1.1})$$

$$\langle \Delta I_z \rangle = \overline{\rho_z F_z^e} + \frac{1}{2} \overline{d_{zz}^e} + \frac{\eta^2}{2v_z^2} \overline{d_{||}}, \quad (\text{II.1.2})$$

$$\langle \Delta I_c \rangle = \overline{\rho_{||} F_{||}^e} + \frac{1}{2} \overline{d_{||}^e}, \quad (d_{||} = \langle (\Delta p_{||})^2 \rangle). \quad (\text{II.1.3})$$

Как отмечалось (I.1.14 - I.1.16), сила трения  $\vec{F}^e(\vec{v})$  является аналогом поля притяжения, создаваемого распределением кулоновских источников  $f'(\vec{v})$ . Отсюда сразу можно получить поведение  $\vec{F}^e(\vec{v})$ , когда распределение в сопутствующей системе близко к максвеллову  $f'(\vec{v}) = f'_{T_1}(\vec{v})$ :

$$\vec{F}e \sim -\frac{1}{m} \begin{cases} \frac{\vec{v}}{v_T'^3} & v < v_T' \\ \vec{v} & v > v_T' \end{cases} \quad (\text{II.1.4})$$

Нетрудно оценить и  $d_{\alpha\alpha}$  :

$$d_{\alpha\alpha} \sim \begin{cases} (v_T')^{-1} & v < v_T' \\ v^{-1} & v > v_T' \end{cases} \quad (\text{II.1.5})$$

Установившееся значение  $v_i^2$  находится из условия  $\langle \Delta I_i \rangle = 0$  :

$$\overline{v_i^2} \sim \frac{m}{M} v_T'^2,$$

как и должно быть.

Рассмотрим теперь случай, когда распределение Максвелла "сдвинуто" в сопутствующей системе на  $\langle \vec{v} \rangle = \vec{\Delta}$  :  $f' = f_T'(\vec{v}' - \vec{\Delta})$  (ошибка в средней скорости электронов). Если  $\Delta < v_T'$ , то (II.1.4) и (II.1.5) остаются справедливыми, так как среднее значение силы трения  $\langle \vec{F} \rangle = \vec{\Delta} / m v_T'$  не даёт вклада в  $\overline{Q_i}$  (сдвиг  $\Delta < v_T'$  не изменяет характеристику трения, которая определяет декремент затухания).

Совсем иная ситуация имеет место, если  $\Delta > v_T'$ . Пусть ошибка  $\vec{\Delta}$  направлена по нормальной степени свободы 1. Найдём среднюю мощность трения по этой степени для малых колебаний:

$$\overline{Q_1} \sim -\frac{M}{m} v_1 \frac{v_1 - \Delta}{[(v_1 - \Delta)^2 + v_T'^2]^{3/2}} \approx 2 \frac{M}{m} \frac{v_1^2}{\Delta^3}$$

(II.1.6)

если  $\Delta \gg v_T'$  и  $|\Delta| \gg |v_1|$ .

Таким образом,  $\overline{Q_1}$  меняет знак, и колебания по данной степени раскачиваются. "Поперечные" степени свободы остаются устойчивыми:

$$\overline{(Q_{\alpha})_1} \sim -\frac{M}{m} \frac{v_{\alpha}^2}{\Delta^3}, \quad \langle \Delta I_i \rangle_{fl} \sim \frac{1}{\Delta}. \quad (\text{II.1.7})$$

Причина появления неустойчивости в направлении  $\vec{\Delta}$  (здесь существенно, однако, что  $\vec{\Delta}$  направлена по нормальной степени свободы) заключается в том, что при большом смещении в средней скорости  $\Delta > v_{T1}'$  малые колебания попадают в область, где характеристика трения отрицательна, и происходит набор энергии колебаний (рис.1). Хотя оценка (II.1.6) получена при условии  $\Delta \gg v_{T1}'$ , ясно, что для возникновения неустойчивости малых колебаний достаточно, чтобы при сдвиге изменился знак характеристики трения. Для степеней свободы, поперечных к  $\vec{\Delta}$ , появление ошибки эквивалентно увеличению температуры электронного пучка в отношении  $(\Delta/v_{T1}')^2$ , а характеристика трения остаётся положительной.

При условии  $\Delta \gg v_{T1}'$ , если рассматриваются малые ( $v < \Delta$ ) колебания, немонохроматичностью пучка электронов можно пренебречь. Возникающая неустойчивость имеет тогда простую интерпретацию: имеется маятник, обтекаемый "ветром", причём сила трения имеет отрицательную характеристику и мала по сравнению с упругой силой. Колебания происходят тогда возле практически не изменённого положения равновесия ( $X = 0$ ), но становятся неустойчивыми: набор энергии за полупериод движения "по ветру" превышает потери при движении "против".

Оценим теперь установившиеся средние амплитуды. Как видно из рис.1, раскачка продолжается, во всяком случае, до тех пор, пока амплитудное значение скорости  $v_1^0$  не приблизится к

$$\Delta : \quad \frac{\Delta - v_1^0}{v_{T1}'} \sim \frac{v_{T1}'^2}{\Delta^2} \ll 1$$

(как показано ниже,  $u_1 \approx v_{T1}'$  ).

С дальнейшим ростом амплитуды в игру вступает участок фаз  $v_1^0 \sin \Psi_1 > \Delta$ , где сила трения имеет другой знак, и компенсирует при усреднении участок  $0 \leq v_1^0 \sin \Psi_1 \leq \Delta$ . Устойчивая амплитуда  $v_1^s$  лежит, по-видимому, в области

$\Delta < v_1^0 \leq 2\Delta$ . Амплитуды с большим значением затухают к  $v_1^s$ .

Существенно, что разброс амплитуд не порядка равновесного значения, как при устойчивости, а много меньше, так как средняя амплитуда в данном случае не определяется скоростью диффузии. Если  $v_1^S > \Delta$ , то приближенно

$$\bar{Q}_1 \sim -\frac{M}{m} v_1 \frac{v_1 - \Delta}{[(v_1 - \Delta)^2 + v_{T1}'^2]^{3/2}} \sim -\frac{M}{\hat{n} m v_1^0} \ln \frac{v_1^0}{v_{T1}'} \quad (v_1^0 > v_1^S) \quad (\text{II.1.8})$$

$$\langle \Delta I_1 \rangle_{fl} \sim v_{T1}'^2 [(v_1 - \Delta)^2 + v_{T1}'^2]^{-3/2} \approx \frac{1}{\hat{n} v_1^S} \quad (\text{II.1.9})$$

т.е.  $(|\bar{I}_1 - \bar{I}_1| / \bar{I}_1) \sim (\langle \Delta I_1 \rangle_{fl} / |\bar{Q}_1|) \sim \frac{m}{M} \ll 1.$

Этот признак и отличает диссипативный "нагрев" от теплового. Энергия передается осциллятору не из теплового, а из упорядоченного движения электронного потока. Поэтому и распределение по амплитудам сосредоточено в узком интервале возле среднего значения.

Для колебаний в поперечном к  $\vec{\Delta}$  направлении

$$(Q_\alpha)_1 \sim -\frac{M}{m} v_\alpha^2 [(v_1 - \Delta)^2 + v_{T1}'^2]^{-3/2} \approx \frac{M}{m} \frac{\bar{v}_\alpha^2}{\hat{n} v_{T1}'^2 v_1^S},$$

$$\langle \Delta I_\alpha \rangle_{fl} \sim (v_1 - \Delta)^2 [(v_1 - \Delta)^2 + v_{T1}'^2]^{-3/2} \approx \frac{1}{\hat{n} v_1^S} \ln \frac{v_1^S}{v_{T1}'}$$

откуда

$$(\bar{v}_\alpha^2 / v_{T1}'^2) \sim \frac{m}{M} \ln \frac{v_1^S}{v_{T1}'} \ll 1.$$

По поперечным степеням, таким образом, устанавливаются практически те же амплитуды, что и при термодинамическом равновесии (логарифм не может быть очень большим). По сравнению с "началом" процесса, когда  $v^2 \sim v_{T1}'^2$ , время затухания



уменьшается в отношении  $v_{T1}^2/\Delta^2$ .

Заметим, что из (II.1.6) и (II.1.7) следует, что сумма декрементов колебаний равна нулю, если определить их как

$$\tilde{\zeta}_i^{-1} = -(\bar{Q}_i/I_i) :$$

$$\tilde{\zeta}_1^{-1} + \tilde{\zeta}_2^{-1} + \tilde{\zeta}_3^{-1} \sim (-2\Delta^{-3} + \Delta^{-3} + \Delta^{-3}) = 0.$$

(II.1.10)

Этот приближенный результат является частным случаем общей теоремы, установленной в § 4.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\vec{\Delta}$  имеет проекции одинакового порядка величины на две или три нормальных степени свободы. Для малых колебаний

$$\bar{Q}_\alpha \sim -\frac{M}{m} v_\alpha \frac{v_\alpha - \Delta_\alpha}{[(\vec{v} - \vec{\Delta})^2 + v_{T1}^2]^{3/2}} \approx -\frac{M}{m} \frac{\Delta^2 - 3\Delta_\alpha^2}{\Delta^5} \bar{v}_\alpha^2. \quad (\text{II.1.11})$$

появление ошибки по другим степеням свободы может, таким образом, компенсировать неустойчивость по данной степени свободы, так как эквивалентно по своему действию увеличению температуры электронного газа, как отмечалось выше. Характеристика силы остается положительной, если  $3\Delta_\alpha^2 < \Delta^2$ , несмотря на то, что

$\Delta_\alpha^2 > v_{T1}^2$ . В то же время сумма декрементов, как это видно из (II.1.11), остается равной нулю. В действительности, как будет показано дальше, при большой ошибке  $\Delta \gg v_{T1}^2$ , неустойчивости избежать трудно (хотя теоретически возможно), если же

$\Delta$  незначительно превышает  $v_{T1}^2$  (но так, что малые колебания лежат в области отрицательности характеристики, если  $\vec{\Delta}$  направить по нормальной степени свободы), то все колебания будут затухать при условии, что  $\Delta_1 \simeq \Delta_2 \simeq \Delta_3$ . Такая неизотропия затухания по направлению  $\vec{\Delta}$  объясняется существованием выделенных направлений нормальных колебаний (невырожденный трехмерный осциллятор).

Возникновение неустойчивости при распределении вида

$\sim \exp[-(\vec{v} - \vec{\Delta})^2/v_{T1}^2]$  является специфическим свойством колебательного движения. Если движению инфинитно (отсутствии автофазировки в "синхротронном" движении), неустойчивость не воз-

никает, а происходит увлечение одного потока другим.

Хотя мы рассматривали здесь случай, когда средняя скорость электронного потока в сопутствующей системе отлична от нуля, это не является обязательным для возникновения неустойчивости. Например, если взять  $f'(\vec{v}')$  в виде двух раздвинутых распределений Максвелла  $\exp[-(\vec{v}' \pm \vec{\Delta})^2 / v_T'^2]$ , то  $\langle \vec{v}' \rangle = 0$ , однако характеристика трения при  $\vec{v} = 0$  в направлении сдвига будет отрицательна, если  $\Delta > v_T'$ , что приведёт к неустойчивости. Вообще, для возникновения неустойчивости необходимо, чтобы энергия упорядоченного движения в электронном потоке превышала тепловую<sup>х)</sup>, т.е. распределение должно быть качественно отличным от максвеллова. Существенной особенностью здесь является, что установившееся значение энергии осциллятора по порядку величины в  $M/m$  раз больше энергии "упорядоченного движения электрона", так как происходит выравнивание скоростей, а не температур:  $(v^2)_{уст} \sim \Delta^2$ .

Беляевым С.Т. и Будкером Г.И. /4/ был отмечен также случай сферического распределения

$$f'(\vec{v}') \sim v_0^{-1} \delta(v^2 - v_0^2); \quad (II.1.12)$$

при этом сила трения и передача импульса равны нулю, если ( $v < v_0$  поле заряженной сферы), и происходит нагревание протонного пучка:  $v_{уст}^2 \sim v_0^2$ . Этот случай ярко демонстрирует свойства кулоновского взаимодействия, хотя практически является, по-видимому, исключительным.

Оценим еще скорость затухания в практически важном случае, когда ошибка  $\vec{\Delta}$  осциллирует со временем. Осцилляции могут быть связаны, например, с колебаниями управляющего напряжения. Пусть  $w(\vec{\Delta})$  - распределение вероятности ошибок:

$$\int w(\vec{\Delta}) d^3\Delta = 1.$$

Средневероятное значение силы трения можно записать в виде

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{1}{m} \int \frac{\vec{v} - \vec{\Delta} - \vec{v}'}{|\vec{v} - \vec{\Delta} - \vec{v}'|^3} f'(\vec{v}') w(\vec{\Delta}) d^3v' d^3\Delta \quad (II.1.13)$$

х) Это условие и оправдывает название неустойчивости.

где  $f'(\vec{v}')$  — распределение электронов по скоростям относительно среднего значения скорости  $\langle \vec{v}' \rangle = \vec{\Delta}$ , близкое по форме к максвеллову:  $\langle v'^2 \rangle \simeq v_{T1}'^2$ . Нам интересен случай  $\langle \Delta^2 \rangle \gg v_{T1}'^2$ .

Если осцилляции происходят в трёх измерениях, то, очевидно, для всех степеней свободы это эквивалентно увеличению теплового разброса электронов до значения  $\langle \Delta^2 \rangle$ . (Подразумевается, что распределение  $w(\vec{\Delta})$  является колоколообразным). В случае одномерных осцилляций, направленных по нормальной степени, для малых колебаний протонов

$$\overline{Q}_1 \sim M \overline{v_1'^2} \frac{\partial \langle F_1 \rangle}{\partial v_1} \sim - \frac{M \overline{v_1'^2}}{m} \int d^3 \Delta w(\vec{\Delta}) \frac{\partial}{\partial \Delta_1} \frac{\Delta_1}{[\Delta^2 + v_{T1}'^2]^{3/2}} \simeq - \frac{M \overline{v_1'^2}}{m \langle \Delta^2 \rangle^{3/2}}$$

Характеристика трения, таким образом, остаётся положительной, хотя эффективная температура электронного пучка увеличивается так же, как и в случае трёхмерных осцилляций. Для остальных степеней

$$(\overline{Q}_\alpha)_1 \sim - \frac{M}{m} \int \frac{v_\alpha^2 w(\vec{\Delta}) d^3 \Delta}{(\Delta^2 + v_{T1}'^2)^{3/2}} \simeq - \frac{M \overline{v_\alpha^2}}{m v_{T1}'^2 \langle |\Delta| \rangle}$$

Этот результат объясняется просто: ввиду резкой зависимости "поперечной" силы трения от ошибки  $\sim \Delta^{-3}$ , основной вклад в мощность даёт участок  $\Delta \sim v_{T1}'$ ; доля времени, "проводимого" ошибкой на этом участке, равна  $v_{T1}' / \langle |\Delta| \rangle$ .

Заметим, что для  $\delta$ -образных осцилляций

$w(\vec{\Delta}) = \frac{1}{2} \Delta_c \delta(\Delta_1^2 - \Delta_c^2) \cdot \delta(\vec{\Delta}_1)$  интеграл в (II.1.13) даёт предыдущий результат (II.1.6), т.е. неустойчивость, как и должно быть.

Таким образом, появление переменной ошибки с распределением  $w(\vec{\Delta})$  при условии  $\langle \Delta^2 \rangle \gg v_{T1}'^2$  эквивалентно установлению стационарного распределения электронов  $w(\vec{v}')$  (в случае одномерных или двумерных осцилляций поперечный к ним разброс электронов остаётся равным  $v_{T1}'$ ). Имея в виду эту аналогию, можно обобщить высказанный выше качественный критерий неустойчивости (или разогрева) и на случай нестационарного распределения электронов по скоростям:

$$\overline{E^2} > \overline{(\Delta E)^2} = \overline{(E - \bar{E})^2}, \quad \left(E = \frac{mv'^2}{2}\right)$$

где  $(-)$  означает усреднение по "мгновенному" распределению и по времени. Это условие является необходимым, но не достаточным. Строгим необходимым и достаточным условием является формальное требование отрицательности (равенства нулю) характеристики трения в направлении нормального колебания.

## § 2. Эффекты пространственной неоднородности

Рассмотрим теперь, какое влияние оказывает пространственная неоднородность распределения электронов  $f'(\vec{p}', \vec{z})$  на скорость затухания малых амплитуд. Пространственную неоднородность будем задавать градиентами средней скорости, температуры и плотности в электронном потоке, предполагая, что в отсутствие градиентов движение протонов затухает (в сопутствующей системе). Для этого достаточно представить

$$f'(\vec{p}', \vec{z}) = f'_{T'}(\vec{v}' - \vec{\Delta}(\vec{z})) n(\vec{z}), \quad (II.2.1)$$

где  $f'_{T'}$  - распределение типа максвеллова с температурой  $T' = T'(\vec{z})$ , а ошибка  $\vec{\Delta}(\vec{z})$  по порядку величины не превосходит скорость:

$$|\vec{\Delta}| < v'_{T'}. \quad (II.2.2)$$

При этом условии сила трения для малых скоростей протонов  $v < v'_{T'}$  имеет вид (см. II.1.4)

$$\vec{F}(\vec{v}, \vec{z}) \sim - \frac{\vec{v} - \vec{\Delta}}{T'^{3/2}} n \quad (II.2.3)$$

Принимая фокусировку однородной, получаем с помощью выражений (I.1.13), (I.3.2) и (I.3.3):

$$\bar{Q}_z \sim - \overline{v_z \frac{v_z^2 - \Delta_z}{T^{3/2}} n} = - \frac{\overline{v_z^2 n}}{T^{3/2}} < 0;$$

$$\bar{Q}_z \sim - \overline{v_z F_z} - \omega_s \overline{z_b F_{||}} \approx - \frac{\overline{v_z^2 n}}{T^{3/2}} - \omega_s z_b^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{n \Delta_{||}}{T^{3/2}} \right] \quad (\text{II.2.4})$$

где  $z = z_c + z_b$ ,  $z_c = \frac{v_{||}}{v_z^2 \omega_s}$

$$z_b = a_z \cos \Psi_z, \quad v_z = -a_z v_z \omega_s \sin \Psi_z. \quad (\text{II.2.5})$$

В продольном направлении достаточно получить усредненную по бетатронным колебаниям силу  $F_{||}$ :

$$F_{||} \sim - \frac{\overline{v_{||} - \Delta_{||}^0}}{T^{3/2}} n + z_c \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{n \Delta_{||}}{T^{3/2}} \right] \quad (\text{II.2.6})$$

где  $\Delta_{||}^0 = \Delta_{||} \Big|_{z=0}$  (в режиме без В.Ч.-поля нужно полагать  $\Delta_{||}^0 = 0$ ), так как равновесная скорость определяется из условия  $F_{||} = 0$ .

С учётом (II.2.5) выражения (II.2.4) и (II.2.6) принимают вид

$$\bar{Q}_z \sim - \overline{v_z^2} \left[ \left( \frac{n}{T^{3/2}} \right)_0 + \frac{1}{v_z^2 \omega_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n \Delta_{||}}{T^{3/2}} \right)_0 \right] \quad (\text{II.2.7})$$

$$F_{||} \sim - \overline{v_{||}} \left[ \left( \frac{n}{T^{3/2}} \right)_c - \frac{1}{v_z^2 \omega_s} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n \Delta_{||}}{T^{3/2}} \right)_c \right] \quad (\text{II.2.8})$$

Аксимальные колебания, таким образом, всегда затухают, если выполняется условие (II.2.2), в то время как в (II.2.4) и

(II.2.6) появляются члены, пропорциональные градиенту  $F_{||}$

в радиальном направлении на равновесной орбите. Эти члены обязаны связи радиального и продольного движения или, как говорят, эффекту замкнутости, и дают одинаковые по величине, но разного знака изменения декрементов затухания. Из сравнения (II.2.7) и (II.2.8) можно получить условие устойчивости

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n \chi_{\Delta}}{T^{1/2}} \right) \right| < \left( \frac{n}{T^{1/2}} \right)_0, \quad (\chi_{\Delta} \equiv \frac{\Delta_{||}}{v_z^2 \omega_s}). \quad (II.2.8)$$

Хотя влияние пространственной неоднородности исчезает, если  $\Delta_{||} \equiv 0$ , для возникновения "градиентной" неустойчивости вовсе не обязательно условие  $|\Delta_{||}| > v_{T1}'$ , как в разбиравшемся выше случае "монокроматической" неустойчивости. Пусть, например,  $\frac{\partial}{\partial z} (n T^{-3/2}) = 0$ . Тогда из (II.2.9) следует, что неустойчивость возможна при условии

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \Delta_{||} \right| > v_z^2 \omega_s = \frac{d v_{||}(z)}{dz} \quad (II.2.10)$$

где  $v_{||}(z)$  - азимутальная скорость как функция радиального отклонения на траектории протона. Если  $|v_{||}| < v_{T1}'$ , то (II.2.10) и (II.2.2) могут быть совместны, так как по-существу, (II.2.10) означает, что  $|\Delta_{||}| > |v_{||}|$ . В случае

$\Delta_{||} = \text{Const}$  условие неустойчивости

$$|\Delta_{||}| > \left| \left( \frac{n}{T^{1/2}} \right)_0 \right| \left| \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{n}{T^{1/2}} \right) \right| \cdot \frac{d v_{||}}{dz} \equiv b_z \frac{d v_{||}}{dz} \quad (II.2.11)$$

где  $b_z$  - размер неоднородности, если относительное изменение  $\delta \ln (n/T^{1/2}) \sim 1$ . Объединяя два последних условия, можно сформулировать общий качественный критерий градиентной неустойчивости: на размере радиальной неоднородности средняя по радиусу величина ошибки  $|\Delta_{||}|$  должна превосходить изменение  $v_{||}(z)$ . Если В.Ч.-поле отсутствует, неустойчивость может возникать только при наличии градиента средней скорости;

в режиме автофазировки вклад в декременты дают также градиенты плотности и температуры, если есть ошибка в скорости - на равновесной орбите. Практически наиболее опасен, по-видимому, градиент скорости.

Оценим максимальные амплитуды, достигаемые при градиентной неустойчивости. Для этого, не предполагая малости

$|\vec{v} - \vec{\Delta}| / v_{T1}'$ , возьмем силу  $\vec{F}$  в виде

$$\vec{F} \sim - \frac{\vec{v} - \vec{\Delta}}{[(\vec{v} - \vec{\Delta})^2 + v_{T1}'^2]^{\frac{3}{2}}} n; \quad \vec{\Delta} = \{0, \Delta_{||}, 0\}$$

Если неустойчивы радиальные бетатронные колебания, то можно считать  $v_{||}^2 \ll v_{T1}'^2$ , так как продольное движение будет затухать (пусть  $\Delta_{||}^0 < v_{T1}'$ ). Тогда

$$\overline{Q_z} \sim - (v_z^2 + \omega_s \tau_b \Delta_{||}) (\Delta_{||}^2 + v_z^2 + v_{T1}'^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \Delta_{||} \approx \Delta_{||}^0 + \tau_b \frac{\partial \Delta_{||}}{\partial z}$$

Положим для конкретности  $\frac{\partial v_{T1}'}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \Delta_{||}}{\partial z} = \frac{\Delta_{||}'}{\tau_b}$ , где  $\tau_b$  - радиальный размер пучка. Имея в виду условия (II.2.10) и (II.2.11), можно заключить, что установившаяся амплитуда  $Q_z > \tau_b$  и определяется в общем случае равенством

$$\overline{v_z^2} \approx \langle \Delta_{||}^2 \rangle_z$$

При этом не обязательно, чтобы было  $\Delta_{||}^2 < v_{T1}'^2$ .

В случае неустойчивости синхротронного движения

$$F_{||} \sim - (v_{||} - \Delta_{||}) [(v_{||} - \Delta_{||})^2 + v_{T1}'^2]^{-\frac{3}{2}}; \quad \Delta_{||} = \Delta_{||}^0 + \frac{v_{||}}{v_z^2 \omega_s} \frac{\partial \Delta_{||}}{\partial z}$$

Если движение инфинитно, "антизатухание" прекращается, когда радиальное отклонение превысит размер пучка:

$$|v_{||}| \sim \tau_b v_z^2 \omega_s$$

В режиме автофазировки колебания нарастают неограниченно. Это очевидно, если  $\Delta_{||}^0 = 0$  и выполняется условие (II.2.10). Если же  $(\partial \Delta_{||} / \partial z) = 0$  и выполняется условие (II.2.11), то для всех амплитуд  $\overline{Q_s} > 0$ , так как набор энергии происходит только при "малых" скоростях  $|v_{||}| < |\Delta_{||}|$ , когда траек-

тория частицы проходит через пучок.

### § 3. Критический уровень когерентных флуктуаций и другие вопросы

Оценим допустимый уровень флуктуаций пространственного заряда электронного пучка, исходя из условия, чтобы диффузионный рост амплитуды не превосходил максимальную мощность кулоновских потерь:

$$\langle \Delta I_i \rangle_{f\ell} < |\bar{Q}_i|_{\max}$$

где

$$\langle \Delta I_i \rangle_{f\ell} = \frac{1}{2} \langle (\Delta p_i)^2 \rangle, \quad \bar{Q}_i = \overline{p_i F_i}.$$

Рассмотрим рассеяние на флуктуациях электрического поля (в сопутствующей системе), времена корреляции которых

$$\tilde{\tau}_{\text{corr}} < \omega_i^{-1}, \quad \text{а пространственный размер (длина волны)}$$

$K^{-1} > v \tilde{\tau}_0$ , где  $v$  - скорости протонов,  $\tilde{\tau}_0 = \ell / \beta c$  - время прохождения протоном участка орбиты, занятого электронным пучком. Тогда "столкновения" происходят мгновенно по отношению к периодическому движению протонов, а сечение рассеяния не зависит от импульса. При однократном пролете протон получает импульс

$$\Delta \vec{p} = e \Delta \vec{E} \cdot \tilde{\tau}_0;$$

отсюда

$$\langle (\Delta p_i)^2 \rangle = e^2 [(\Delta E_i)^2] \frac{\tilde{\tau}_0^2}{T_0}, \quad (T_0 = 2\pi / \omega_s)$$

где  $[(\Delta E_i)^2]$  - означает статистическое среднее.

Так как сила трения в области  $v > v'_T$  убывает как  $v^{-2}$ , максимум  $|\bar{Q}_i|$  достигается при  $v \sim v'_T$  и по порядку величины равен

$$|\bar{Q}|_{\max} \approx (4\pi e^4 L \ln \tilde{\tau}_0 M / m v'_T T_0). \quad (\text{II.3.1})$$



Для относительной флуктуации получаем

$$\left( \frac{[\Delta \vec{E}]^2}{E^2} \right)_{кр}^{\frac{1}{2}} \sim (\gamma \theta_e n V m L M)^{-\frac{1}{2}}$$

где  $L$  - кулоновский логарифм,  $\gamma \theta_e$  - угловой разброс электронов в лабораторной системе,  $\gamma$  - релятивистский фактор,  $n$  и  $V$  - плотность и объём пучка электронов. Возьмем, например, численные значения

$$L \approx 20, \quad \gamma = 2, \quad \theta_e = 3 \cdot 10^{-3}, \quad n = 10^8 \text{ см}^{-3}, \quad V = 3 \cdot 10^3 \text{ см}^3.$$

$$\text{При этом } (\Delta E/E)_{кр} \sim 5 \cdot 10^{-3}.$$

Рассмотренный тип флуктуаций является, по-видимому, наиболее опасным, с точки зрения величины сечения рассеяния.

Приведём здесь же оценку критического значения плотности остаточного газа  $n_0$  [1], рассеяние на котором можно включить в общий "флуктуационный фон" (I.1.18):

$$(n_0^{кр})_{расс} \sim (L M n \tilde{n}_0 / L_z m Z^2 \gamma^3 \theta_e)$$

где  $Z$  - заряд ядра,  $L_z$  - соответствующий кулоновский логарифм, плотности относятся к лабораторной системе.

Для режима без В.Ч.-поля может возникнуть вопрос, не будет ли торможение на электронах остаточного газа преобладать над "увлечением" протонов электронным пучком. С помощью выражения силы трения на остаточном газе (I.1.18) нетрудно получить отношение

$$\left[ (n_0^{кр})_{торм} / (n_0^{кр})_{расс} \right] \sim (Z L_z m / \theta_e L_e M)$$

где  $L_e$  - кулоновский логарифм для рассеяния на электронах газа. Практически это отношение не отличается очень сильно от единицы.

Наконец, приведём еще оценку времени жизни протонов относительно процесса рекомбинации (образования атомов) в электрон-

ном пучке. Отношение  $\tilde{\tau}_{rec}$  к времени релаксации  $\tilde{\tau}$  ока-  
зывается равным:

$$\frac{\tilde{\tau}_{rec}}{\tilde{\tau}} \sim \frac{m}{M} L \frac{b_R}{b_{rec}} \sim \frac{m}{M} L \left\{ \alpha (\gamma \beta \theta)^2 \ln \left[ 1 + \left( \frac{\alpha}{\gamma \beta \theta} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \quad (II.3.2)$$

где  $b_R$  - резерфордское сечение рассеяния на большие углы

$$b_R \sim \frac{4\gamma e^2}{(\gamma \beta \theta)^4}$$

$b_{rec}$  - суммарное по всем уровням атома водорода сече-  
ние рекомбинации,  $\theta$  - относительный угловой разброс частиц  
в лабораторной системе,  $\alpha$  - постоянная тонкой структуры.  
Формула (II.3.2) является интерполяционной [17] и даёт пра-  
вильное поведение для малых скоростей  $(\gamma \beta \theta)^2 / \alpha^2 \ll 1$

и больших  $1 < (\gamma \beta \theta / \alpha)^2 < \approx 10$ . Например, для  
 $\theta = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $(\tilde{\tau}_{rec} / \tilde{\tau}) \sim 3 \cdot 10^4$ .

#### § 4. Кинетика малых амплитуд

Исследуем решение кинетического уравнения (I.3.9) при  
условии, что суммарная скорость диффузии значительно меньше  
критического уровня, при котором затухание вообще не происхо-  
дит. Рассмотрим сначала область малых скоростей  $v < v'_T$  и  
предположим также, что пространственную неоднородность для  
соответствующей области амплитуд можно с хорошей точностью  
характеризовать градиентом  $f'(\vec{p}', \vec{z})$ . Так как характер-  
терный масштаб изменения силы трения  $\vec{F}(\vec{v}, \vec{z})$  порядка  
 $v'_T$ , её можно разложить при этом в ряд:

$$F_\alpha(\vec{v}, \vec{z}) = (F_\alpha)_0 + \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{v}} \right)_0 \vec{v} + \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial \vec{z}_1} \right)_0 \vec{z}_1 + \dots$$

Аналогичное предположение сделаем относительно квадратичных  
флуктуаций

$$\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle = \langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle_0 + \dots$$

Ограничиваясь в этих разложениях членами низшего порядка, дающими не исчезающий вклад при усреднении  $Q_i$  и  $D_{ik}$  по фазам, получаем после усреднения

$$\bar{Q}_i = -2\lambda_i I_i \quad (II.4.1)$$

$$\bar{D}_{ik} = 2\mu_i I_i \equiv D_i, \quad i = \kappa; \quad D_{ik} = 0, \quad i \neq \kappa \quad (II.4.2)$$

где (I.3.3)

$$\lambda_z = \frac{1}{2M} \left[ -\overline{\left( \frac{\partial F_z}{\partial v_z} \right)}_0 + \gamma \overline{\frac{d\Psi}{d\theta_s} \left( \frac{\partial F_{||}}{\partial v_z} \right)}_0 + \overline{\frac{\Psi}{\omega_s} \left( \frac{\partial F_{||}}{\partial z} \right)}_0 \right], \quad (II.4.3)$$

$$\lambda_{||} = \frac{1}{2M} \left[ -\overline{\left( \frac{\partial F_{||}}{\partial v_{||}} \right)}_0 - \gamma \overline{\frac{d\Psi}{d\theta_s} \left( \frac{\partial F_{||}}{\partial v_z} \right)}_0 - \overline{\frac{\Psi}{\omega_s} \left( \frac{\partial F_{||}}{\partial z} \right)}_0 \right], \quad (II.4.4)$$

$$\lambda_z = -\frac{1}{2M} \overline{\left( \frac{\partial F_z}{\partial v_z} \right)}_0; \quad (II.4.5)$$

$$\mu_z = \frac{1}{2} |f_z|^2 \overline{\langle (\Delta P_z)^2 \rangle}_0 + \frac{\gamma^2}{2} |\zeta|^2 \overline{\langle (\Delta P_{||})^2 \rangle}_0 + \gamma \Im (f_z^* \zeta) \overline{\langle \Delta P_z \Delta P_{||} \rangle}_0,$$

$$\mu_{||} = \frac{1}{2} \overline{\langle (\Delta P_{||})^2 \rangle}_0, \quad \mu_z = \frac{1}{2} |f_z|^2 \overline{\langle (\Delta P_z)^2 \rangle}_0.$$

Здесь  $\zeta = \nu_z f_z \Psi - i \left( \Psi \frac{df_z}{d\theta_s} - f_z \frac{d\Psi}{d\theta_s} \right).$

Физический смысл коэффициентов  $\mu_i$  ясен из соотношения

$$\langle \Delta I_i \rangle_{fl} = \frac{1}{2} \left( \partial D_{ik} / \partial I_k \right), \quad \text{откуда} \quad \langle \Delta I_i \rangle_{fl} = \mu_i.$$

В режиме без В.Ч.-поля нужно положить

$$D_{||} = 2\mu_{||}, \quad \text{так как}$$

$$I_{||} = P_{||}.$$

Величины  $\lambda_i$  представляют собой декременты затухания колебаний по нормальным степеням свободы. (II.4.4) совпадает с

обычным определением декремента и в отсутствие автофазировки:

$$\langle \Delta p_{\parallel} \rangle = -2\lambda_{\parallel} p_{\parallel} ;$$

энергетический разброс, однако, затухает при этом вдвое быстрее, чем в режиме колебаний:

$$\frac{d}{dt} p_{\parallel}^2 = -4\lambda_{\parallel} p_{\parallel}^2 .$$

Это различие имеет простой физический смысл: теплоёмкость осцилляторов в два раза превышает теплоёмкость свободных частиц.

В декременты радиального и продольного движения входят члены, пропорциональные производной  $F_{\parallel}$  по скорости и координате в радиальном направлении. Влияние членов  $\sim (\partial F_{\parallel} / \partial z)$  подробно обсуждалось выше. Появление членов  $\sim (\partial F_{\parallel} / \partial v_z)$  связано с модуляцией скорости  $v_z$  синхротронным движением, при азимутальной неоднородности фокусировки и кривизны равновесной орбиты. Качественно, их роль может быть существенной, если только ошибка  $\Delta$  имеет не нулевые компоненты  $\Delta_z \sim \Delta_{\parallel} \approx v_z'$ .

Как видно из выражений декрементов, сумма  $\lambda_z + \lambda_{\parallel}$  не зависит от связи радиального и продольного движения. Аналогичный результат для декрементов радиационного затухания известен в теории ускорителей [14]. Для полной суммы имеет место замечательное соотношение

$$\lambda_z + \lambda_{\parallel} + \lambda_z = -\frac{1}{2M} \operatorname{div}_{\vec{v}} \vec{F} = \frac{8\pi^2 e^4 L}{mM} m^3 \overline{f'_0} , \quad (\text{II.4.6})$$

(I.1.14 - I.1.16), где  $\overline{f'_0}$  - среднее значение функции распределения электронов  $f'(\vec{p}', \vec{z})$  на равновесной траектории протонов.

Таким образом, сумма декрементов не зависит и от "ориентации" неізотропного распределения по скоростям и определяется только его величиной. Эта теорема является общим утверждением, независимо от величины и знака отдельных декрементов и формы

$$f'(\vec{p}', \vec{z}) .$$

Для изотропного пространственно однородного распределения электронов:

$$\lambda_2 = \lambda_{||} = \lambda_z = \lambda = \frac{8\pi^2 e^4 L}{3mM} m^3 \bar{f}_0 \approx \frac{8\pi^2 e^4 L n}{3mM v_T^3} \quad (11.4.7)$$

что соответствует обычной формуле для времени релаксации плазмы, когда скорости ионов  $v_T$  меньше скоростей электронов  $v_{T1}, v_{T2}, v_{T3}$ .

Из (11.4.6), в частности, следует, что все  $\lambda_i$  могут оставаться положительными, даже если ошибка  $\Delta \gg v_{T1}$ . При этом, однако, их величина становится весьма малой, так как пропорциональна "хвосту" распределения. Так, для максвелловского "спектра",  $\sum \lambda_i \sim \exp(-\Delta^2/v_{T1}^2)$ . Этот вывод согласуется с результатами проведенного в § 1 приближённого исследования.

Отметим также, что в условиях пространственной однородности величины декрементов не могут по порядку величины превосходить значение (11.4.7). При сильной же пространственной неоднородности, как это следует из результатов § 2, величина

$|\lambda_2 - \lambda_{||}|$  может сделаться значительно больше  $\lambda$ . Разумеется, мощность трения ни при каких условиях не может превосходить максимальное значение (11.3.1).

Построим решение кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial}{\partial I_i} \left\{ 2\lambda_i I_i f + \mu_i I_i \frac{\partial f}{\partial I_i} \right\} = 0 \quad (11.4.8)$$

при условии, что все  $\lambda_i > 0$ . Методом разделения переменных  $f = \prod_i e^{-\alpha_i t} f_i(I_i)$  приходим к уравнению (для краткости опустим индекс  $i$ )

$$\alpha f + \frac{d}{dI} (2\lambda I f + \mu I \frac{\partial f}{\partial I}) = 0$$

которое путём подстановок  $I = (\mu/2\lambda)x$ ,  $f = ye^{-x}$  приводится к уравнению для полиномов Лагерра [18]:

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0, \quad \alpha = \frac{\alpha}{2\lambda} = n = 0, 1, 2, \dots$$

Нормальное решение уравнения ( II.4.8)

$$f_{\{n\}} = \prod_i L_{n_i}(x_i) \exp(-x_i - 2n_i \lambda_i t).$$

Общее решение можно выразить через фундаментальное, или функцию Грина

$$G(I|I', t) = \prod_i g_i(x_i|x'_i, t)$$

где

$$g_i(x|x', t) = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) L_n(x') e^{-2n\lambda_i t} = \frac{e^{-\frac{x-x'e^{-2\lambda_i t}}{1-e^{-2\lambda_i t}}}}{1-e^{-2\lambda_i t}} I_0\left(\frac{\sqrt{xx'}}{\operatorname{sh}\lambda_i t}\right) \quad (\text{II.4.9})$$

(  $I_0$  - функция Бесселя мнимого аргумента):

$$f(I, t) = \int d^3 I' G(I|I', t) f(I', 0).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$g(x|x', 0) = \delta(x-x'), \quad g(x|x', \infty) = e^{-x}$$

$$\int g(x|x', t) dx' = 1.$$

Равновесное распределение и эволюцию средних амплитуд можно получить и прямо из ( II.4.8):

$$f_s = \prod_i \exp\left(-\frac{I_i}{I_{is}}\right), \quad I_{is} = \frac{\mu_i}{2\lambda_i};$$

$$\frac{d}{dt} \langle I_i \rangle = -2\lambda_i I_i + \mu_i,$$

как и должно быть.

В режиме без В.Ч.- поля решение уравнения для  $f(p_{||})$

$$\alpha_{||} f + \frac{d}{dp_{||}} (2\lambda_{||} p_{||} f + \mu_{||} \frac{df}{dp_{||}}) = 0$$

есть  $f_n = e^{-x^2} H_n(x)$  /18/,  $x = (\lambda_{||}/\mu_{||}) p_{||}$ , где  $H_n$  - полином Эрмита. Фундаментальное решение /18/

$$g(x|x',t) = e^{-x^2} \sum_n H_n(x) H_n(x') e^{-2\lambda n t} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\alpha t \lambda} e^{-\frac{(x-x'e^{-2\lambda t})^2}{1-e^{-4\lambda t}}} + \sqrt{t \lambda} e^{-\frac{(x+x'e^{-2\lambda t})^2}{1-e^{-4\lambda t}}} \right\}. \quad (\text{II.4.10})$$

Равновесное решение есть  $e^{-x^2}$ , а эволюция  $\langle p_{||}^2 \rangle$  определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} \langle p_{||}^2 \rangle = -4\lambda_{||} \langle p_{||}^2 \rangle + 2\mu_{||}.$$

Знание фундаментального решения позволяет, при необходимости, непосредственно получать эволюцию начального распределения к равновесному состоянию. Возьмём, например

$$f(I, 0) = I_0^{-1} \exp(-I/I_0)$$

Интегрируя  $f(I, 0)$  с функцией Грина (II.4.9), получаем /18/:

$$f(I, t) = I^{-1}(t) \exp(-I/I(t)), \quad I(t) = I_s(1 - e^{-2\lambda t}) + I_0 e^{-2\lambda t},$$

т.е. форма распределения сохраняется, а изменяется только  $\langle I \rangle$ . Аналогичный результат получается с помощью (II.4.10) при начальном распределении

$$f(p_{||}, 0) = (p_0 \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-p_{||}^2/2p_0^2) :$$

$$f(p_{||}, t) = (p(t) \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-p_{||}^2/2p^2(t)), \quad p^2(t) = \frac{\mu_{||}}{\lambda_{||}} (1 - e^{-4\lambda_{||} t}) + p_0^2 e^{-4\lambda_{||} t}.$$

## § 5. Оценка решения в области больших амплитуд

Под термином "большие амплитуды" будем понимать общий случай, когда кинетические коэффициенты не могут быть линеаризованы по переменным  $I_i$ . Это может быть связано, в основном, с нелинейным поведением силы трения при скоростях  $v > v_{T1}'$ , либо с сильной пространственной неоднородностью электронного пучка (например, когда амплитуды колебаний превышают поперечный размер пучка).

Исследуем сначала характер кинетического процесса в условиях пространственной однородности, пренебрегая азимутальной неоднородностью фокусировки. В области  $v^2 > v_{T1}'^2$  коэффициенты  $\bar{Q}_i$  убывают как  $v^{-1}$  (или быстрее  $\sim v_i^2/v^3$ , если  $v_i^2 \ll v^2$ ). При наличии флуктуационного фона (скорость диффузии на котором примем постоянной:  $\langle \Delta I_i \rangle_{fl} = \text{Const} = \mu_i$ ), значительно превышающего термодинамический уровень флуктуаций в электронном пучке, для достаточно больших амплитуд

$$|\bar{Q}_i| < \mu_i$$

и частицы не захватываются в режим затухания. Оценим область захватываемых амплитуд при условии  $|\bar{Q}|_{\text{max}} \gg \mu$ . Для одномерных колебаний

$$|\bar{Q}_1| \approx 4\pi L e^4 n \frac{M}{m} (v_0 |\sin \Psi_1|)^{-1} \approx \frac{2}{\tilde{n}} \frac{v_{T1}'}{v_0} |\bar{Q}|_{\text{max}} \cdot \ln \frac{v_0}{v_{T1}'}$$

где  $v_0$  - амплитудное значение скорости,  $|\bar{Q}|_{\text{max}} \sim \frac{4\pi e^4 L n M}{m v_{T1}'} \frac{v_0}{T_0}$ . Таким образом,

$$(v_0^{KP}/v_{T1}') \approx \frac{2}{\tilde{n}} \frac{|\bar{Q}|_{\text{max}}}{\mu} \ln \frac{|\bar{Q}|_{\text{max}}}{\mu}$$

Для двух- и трехмерных колебаний подинтегральное выражение при усреднении по фазам не имеет особенностей, поэтому

$$(v_0^{KP}/v_{T1}') \approx \frac{|\bar{Q}|_{\text{max}}}{\mu}$$



Соответственно время прохождения области больших амплитуд в режиме затухания  $v_{T1}' < v_0 < v_0^{KP}$  равно

$$\tilde{\tau}_{(1)} = \tilde{\tau} \ln^{-1} \left( \frac{v_H}{v_{T1}'} \right)$$

в одномерном случае и

$$\tilde{\tau}_{(2)} = (\alpha / \ln(1 + \sqrt{2})) \tilde{\tau} \quad \left( \frac{2}{\tilde{h}} < \alpha < 1 \right)$$

для двумерных колебаний, если  $v_H^1 = v_H^2$  где

$$\tilde{\tau} = (m M v_H^3 T_0) 24 n L e^4$$

а  $v_H \gg v_{T1}'$  - начальная амплитуда скорости по одной степени свободы. В трехмерном случае  $\tilde{\tau}_3$  также отличается от численным множителем, близким к единице.

Общая картина движения амплитуд, приближенно описываемая уравнениями

$$\frac{dI_i}{dt} = \bar{Q}_i + \mu_i \equiv \langle \Delta I_i \rangle$$

довольно сложна, но доступна качественному анализу. Представление о характере процесса даёт рисунок 2, где изображены траектории двумерного движения

$$\left( \frac{dI_1}{\langle \Delta I_1 \rangle} \right) = \left( \frac{dI_2}{\langle \Delta I_2 \rangle} \right)$$

при постоянном (или равном нулю)  $I_3$ . Пунктирные кривые 1 и 2 соответствуют уравнениям  $\langle \Delta I_1 \rangle = 0$  и  $\langle \Delta I_2 \rangle = 0$ . Одновременное затухание амплитуд происходит только в области  $D$ , ограниченной этими кривыми. Кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  ограничивают область захватываемых амплитуд. Как видно из рисунка, при сильном возбуждении одной степени в области захвата, другая степень сначала "греется", а затем траектория проходит в область  $D$ , где обе амплитуды затухают. Точки  $S$  и  $\bar{S}$  соответствуют устойчивому и неустойчивому положению равновесия. При "включении" третьей степени свободы, рисунок можно рассматривать как проекцию трехмерной картины на плоскость. Область  $D$  "превращается в кокон", а общий характер движения не изменяется.

Стационарное распределение, строго говоря, не существует, так как область захватываемых амплитуд ограничена. Однако мож-

но говорить о квазистационарном распределении и времени жизни частиц в области захвата (или в области допустимых амплитуд

$I < I_{\text{дон}}$ ), если  $|\bar{Q}|_{\text{max}} \gg \mu$ . "Равновесное" распределение находится из уравнения

$$\sum_i \frac{\partial j_i}{\partial I_i} = \sum_i \frac{\partial}{\partial I_i} \left\{ \bar{Q}_i f - \mu_i I_i \frac{\partial f}{\partial I_i} \right\} = 0.$$

Решение удастся найти в общем виде, если  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ , воспользовавшись свойством силы трения

$\vec{F} = -(\partial \mathcal{U} / \partial \vec{v})$  (I.1.14). Так как  $v_i = (\sqrt{2I_i}/M) \sin \Psi_i$ , то при принятых здесь условиях,

$$\bar{Q}_i = -\rho_i \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v_i} = -2MI_i \frac{\partial \bar{U}}{\partial I_i}.$$

Полагая  $j_i = 0$ , получаем уравнения

$$2M \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial I_i} f + \mu \frac{\partial f}{\partial I_i} = 0$$

имеющие совместное решение

$$f = C \exp\left(-\frac{2M}{\mu} \bar{U}\right). \quad (\text{II.5.1})$$

В соответствии со сказанным выше, это решение не может быть нормировано, так как  $\bar{U} \rightarrow \text{Const}$  на бесконечности. Его использование имеет смысл, если в интервале  $0 \leq I \leq I_{\text{дон}}$  подавляющая доля частиц сосредоточена в области  $I \ll I_{\text{дон}}$ .

Показатель экспоненты можно записать в виде

$$-\frac{2M}{\mu} \bar{U} = 2 \frac{|\bar{Q}|_{\text{max}}}{\mu} \left\langle \frac{v'_i}{u} \right\rangle$$

где  $u = |\vec{v} - \vec{v}'|$ , а  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение по распределению электронов. Если распределение близко к максвеллову, решение в области  $v < v'_i$  есть

$$f \sim \exp\left[-\frac{2\lambda}{\mu} (I_1 + I_2 + I_3)\right]$$

где  $\lambda$  совпадает с выражением (II.4.7). "Нормированное" решение при условии  $|\bar{Q}|_{\text{max}} \gg \mu$  имеет вид

$$f = (2\lambda/\mu)^3 \exp\left[2 \frac{|\bar{Q}|}{\mu} \max \left\langle \frac{v'_{T'}}{u} - \frac{v'_{T'}}{v'} \right\rangle\right] \quad (II.5.2)$$

Решение (II.5.2) можно в действительности применять для оценки "хвоста" распределения и в том случае, когда  $\mu_i$  резко различаются по величине, полагая просто для степеней свободы с малыми  $\mu_i$ ,  $v_i = 0$ . Рассмотрим, например, рассеяние на остаточном газе. При этом  $\mu_z = \mu_z = \mu$ ,  $\mu_{||} \ll \mu$ , так что  $(v_{||}^2)_{уст} \gg (v_{||}^2)_{уст} \sim \frac{m}{M} v_{T'}'^2$ , и для оценки поперечного распределения и времени жизни можно положить в (II.5.2)  $v_{||} = 0$ . Пусть  $v'_{T'} \ll (v_1)_{дон} \ll v_o^{кр}$ . "Хвост" вытянут в основном в направлениях нормальных колебаний, так как здесь

$$\left\langle \frac{1}{u} \right\rangle_{(1)} \approx \frac{2}{\pi v_o} \ln \frac{v_o}{v'_{T'}} > \frac{1}{v_o} \approx \left\langle \frac{1}{u} \right\rangle_{(2)}$$

Первый член разложения  $\left\langle \frac{1}{u} \right\rangle$  по  $v_{2o}^2 \ll v_{T'}'^2 \ll v_{1o}^2$  есть  $\approx - (v_{2o}^2 / 2\pi v_{1o} v_{T'}'^2)$ . Отсюда видно, что для  $v_1 = (v_1)_{дон}$

$$(v_{2o}^2)_{уст} \approx \pi \frac{(v_1)_{дон}}{v'_{T'}} \frac{\mu}{|\bar{Q}|_{max}} v_{T'}'^2 \ll v_{T'}'^2$$

Интегрируя распределение по  $I_2$  при  $I_1 = (I_1)_{дон}$  получаем для вероятности "выхода" в область  $I_1 > (I_1)_{дон}$  в единицу времени:

$$w = \frac{4\lambda^2}{\mu} (M v_{T'}')^2 \ln \frac{(v_1)_{дон}}{v'_{T'}} \exp\left[2 \frac{|\bar{Q}|_{max}}{\mu} \left( \frac{2 v_{T'}'}{\pi (v_1)_{дон}} \ln \frac{(v_1)_{дон}}{v'_{T'}} - \left\langle \frac{v'_{T'}}{v'} \right\rangle \right)\right]$$

Отметим, что из (II.5.1) следует, согласно оценке § 1, что при наличии ошибки  $|\Delta| > v'_{T'}$  распределение возле  $I = I_s$  имеет гауссов вид:

$$f \sim \exp\left[-\frac{1}{2I_s} \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial I}\right)_s (I - I_s)^2\right]; \quad (\bar{Q}(I_s) = 0)$$

Нетрудно оценить, что  $\langle (I - I_s)^2 \rangle \ll I_s^2$ , если  $v'_{T'} \ll \Delta \ll v_o^{кр}$  т.е. распределение при "монохроматической" неустойчивости сосредоточено вблизи  $I_s$ .

Наконец, обсудим еще зависимость скорости затухания от поперечных размеров электронного пучка. Пусть пучок расположен симметрично относительно равновесной орбиты протонов. В случае возбуждения двумерных бетатронных колебаний, уменьшение поперечных размеров  $b_z$ ,  $b_z$  всегда оказывается выгодным, так как мощность здесь, независимо от размеров "набирается" при скоростях  $|v_i| \sim v_{i0}$ , а произведение плотности  $n$  на долю фаз, когда частица находится в пучке, во всяком случае не уменьшается. Поэтому, при фиксированном токе, интегральное время затухания уменьшается с сокращением размеров.

Для одномерных колебаний  $v_0 \gg v_T'$  при сокращении размера в направлении колебаний от значения  $b=a$  (амплитуда колебаний) до некоторого  $b < a$  мощность уменьшается в отношении  $\ln(v_0/v_T')$ , так как при малых скоростях  $|v| \sim v_T'$ , которые дают основной вклад для  $b \geq a$ , частица находится вне пучка ( $v = -v_c \sin \Psi$ ,  $z = a \cos \Psi$ ).

Иначе обстоит дело, когда возбуждено синхротронное движение. В режиме без автофазировки очевиден эффект "облёта" пучка, когда синхротронное отклонение радиуса превышает  $b_z$ . Этот же эффект приводит к резкому уменьшению мощности  $Q_c$  и в режиме колебаний, так как  $z_c \sim v_{||}$ . Нетрудно оценить, что для амплитуд  $v_{||0} \leq v_T'$  мощность уменьшается в отношении  $\eta \sim \bar{z}_c^2 / b_z^2$ , при сокращении  $b_z$  от значения  $b_z^2 = \bar{z}_c^2$ . Если же  $1 < (v_{||0}^2 / v_T'^2) < \frac{\bar{z}_c^2}{b_z^2}$ , то  $\eta = (v_{||c} / v_T')^2 \frac{b_z^2}{\bar{z}_c^2} > 1$ . Радиальный размер пучка электронов, таким образом, нужно выдерживать на уровне  $b_z^2 \sim \bar{z}_c^2$ .

В заключение выражаем благодарность С.Т.Беляеву и Г.И. Будкеру за дискуссию и обсуждение работы.

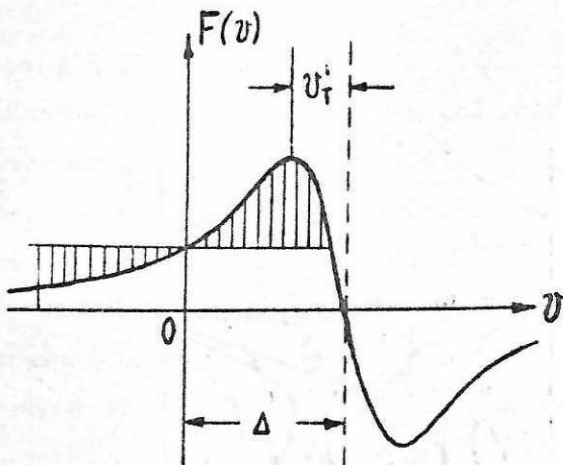


Рис.1. График силы трения, отвечающей распределению  
 $f'(v) \sim \exp[-(v-\Delta)^2/v_\tau^2]$  . Мощность  $\bar{Q}_1 = \overline{F_1 v_1}$   
 положительна для всех амплитуд  $v_1^0 < \Delta$  .

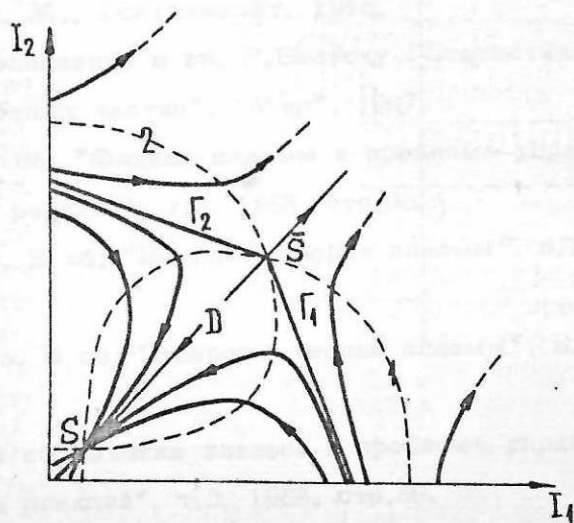


Рис.2. Траектории движения амплитуд

$$\dot{I}_1 = \bar{Q}_1 + \langle \Delta \bar{I}_1 \rangle_{fl},$$

$$\dot{I}_2 = \bar{Q}_2 + \langle \Delta \bar{I}_2 \rangle_{fl}.$$

## Л и т е р а т у р а

1. Г.И.Будкер. "Атомная энергия", т.22, в.5 (1967).
2. Л.Д.Ландау, ЖЭТФ, 7, 203 (1937).
3. Л.Спитцер. Физика полностью ионизованного газа. ИЛ, М., 1957.
4. С.Т.Беляев, Г.И.Будкер. ДАН СССР, 107, 807 (1956).
5. Н.Н.Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946.
6. В.П.Силин. Дополнение в кн. Р.Балеску "Статистическая механика заряженных частиц", "Мир", 1967.
7. С.Т.Беляев. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", г.3, 1958, стр.66.
8. Б.Л.Трубников. В сб. "Вопросы теории плазмы", в.1, 1963, стр.88.
9. В.Д.Шафранов. В сб. "Вопросы теории плазмы", в.3, 1963, стр.3.
10. С.Т.Беляев. В сб. "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций", т.3, 1958, стр.50.
11. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, ФМ, М., 1959.
12. В.П.Силин, А.А.Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Госатомиздат, 1961.
13. А.А.Веденов. В сб. "Вопросы теории плазмы", в.3, 1963, стр.203.
14. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. М., ФМ, 1962.

15. С.Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, 1947.
16. А.Н.Колмогоров. УМН 5, 30 (1938).
17. Г.Бете и Э.Салпетер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М., ФМ, 1960.
18. Э.Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ФМ, 1961.
19. И.С.Градштейн и И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

---

Ответственный за выпуск Я.С.ДЕРБЕНЕВ

Подписано к печати 6.XI.1968 г.

Усл. 4,0 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.

Заказ № 255

---

Отпечатано на ротапринтере в ИЯФ СО АН СССР.