АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 259

В.Ц.Гурович ,В.И.Карпман

К ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ И ПЛАЗМЕ

Новосибирск
1968

В.Ц.Гурович, В.И.Карпман

К ДИНАМИКЕ ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ И ПЛАЗМЕ

АННОТАЦИЯ

Исследуются волновые процессы с учётом стрикционных эффектов в высокочастотном электромагнитном поле (электрозвуковые волны). Рассмотрены характерные особенности электрозвуковых волн в случаях положительной и отрицательной диэлектрической проницаемости.

1. Введение. Основные уравнения

Термин "электрозвуковые колебания" был введен впервые в работе Т.Ф.Волкова /1/, где было показано, что малые модуляции бегущей электромагнитной волны в плазме неустойчивы благодаря взаимодействию последней с колебаниями плотности. В последние годы выяснилось, что этот эффект является частным случаем нелинейных неустойчивостей электромагнитной волны большой амплитуды, обусловленных зависимостью показателя преломления от интенсивности волны и приводящих к самофокусировке и самомодуляции света /2-4/. Двумя наиболее распространенными причинами такой зависимости являются оптический эффект Керра и электрострикция, которые приводят к качественно различным нелинейным эффектам /5,6/. Неустойчивость, указанная Волковым, обусловлена стрикционными явлениями.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению нелинейных электрозвуковых волн. Мы исходим из общих уравнений нестационарных электроакустических процессов, состоящих из уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла для сред, где диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega,\rho)$ "медленно" зависит от времени благодаря тому, что плотность среды есть функционал от нестационарной интенсивности поля волны $\rho=\rho\{|E|^2\}$. Некоторые важные особенности таких уравнений обсуждаются ниже, в этом п. При этом диссипативные эффекты и пространственная дисперсия в настоящей работе не учитываются.

В п.2 рассмотрена динамика развития модуляционной неустойчивости электромагнитной волны в средах, где $\epsilon>0$. Исследованы основные типы нелинейных стационарных электрозвуковых волн, которые могут распространяться в таких средах, и, в частности, уединенных волн. Показано, что последние могут принадлежать к двум различным классам (по нашей терминологии - к "оптическому" и "акустическому"). Качественный анализ, проведенный во втором п. указывает на определенную связь между акустическими нелинейными волнами и модуляционной неустойчивостью стрикционного типа.

В п.3 изучаются нелинейные электрозвуковые процессы в средах с отрицательной диэлектрической проницаемостью, имеющие место при падении на такую среду достаточно интенсивной электромагнитной волны с переменной амплитудой. Результаты этого п.

приводят к выводу о возможности распространения в такой среде нелинейных волн разрежения (плотности), заполненных запертым в них высокочастотным электромагнитным полем.

Мы будем исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathcal{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \tag{1.1}$$

где индукция $\mathcal{D}(t)$ связана с напряженностью $\mathcal{E}$ соотношением

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau, t)\,\mathcal{E}(t-\tau)\,d\tau \tag{1.2}$$

а функция $f(\tau, t)$ определяет диэлектрическую проницаемость $\tilde{\epsilon}(\omega, t)$ нестационарной среды, введенную Л.П.Питаевским /7/

$$\tilde{\epsilon}(\omega, t) = 1 + \int_0^\infty f(\tau, t)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau + \text{к.с.} \tag{1.3}$$

Если свойства среды "медленно" меняются со временем ($\partial f/\partial t \ll \partial f/\partial \tau$) , а поле является квазимонохроматическим, т.е.

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[E(t)e^{-i\omega t} + \text{к.с.}\right], \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[H(t)e^{-i\omega t} + \text{к.с.}\right], \tag{1.4}$$

где E и H - медленно меняющиеся функции (по сравнению с фазовым множителем), то приближенно можно написать

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t}E - i\omega\tilde{\epsilon}E + \frac{i}{2}\frac{\partial^2(\omega\tilde{\epsilon})}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\partial(\omega\tilde{\epsilon})}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial E}{\partial t}\right]e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[-i\omega H + \frac{\partial H}{\partial t}\right]e^{-i\omega t} + \text{к.с.}$$

При получении (1.5) пренебрегали слагаемыми, содержащими про-

изведения производных по времени.

Диэлектрические свойства среды изменяются в явлениях рассмотренных ниже, вместе с плотностью $\rho = \rho(t, r)$. В этом случае, как показано в работе /7/, можно написать

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon(\omega, \rho) + \frac{i}{2}\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\omega\,\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{1.6}$$

где $\epsilon(\omega, \rho)$ - есть диэлектрическая проницаемость стационарной среды, в которую подставлено $\rho = \rho(t)$.

Подставляя (1.4) - (1.6) в уравнения Максвелла (11), получаем следующие основные уравнения для амплитуд поля в принятом приближении

$$c \operatorname{rot} H = -i\omega\epsilon E + \frac{1}{2}\omega\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\omega\,\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}E + \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}E + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{2}\frac{\partial^2(\epsilon\omega)}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \tag{1.7}$$

$$c \operatorname{rot} E = i\omega H - \frac{\partial H}{\partial t} \tag{1.8}$$

Эти уравнения дополняются уравнениями гидродинамики, определяющими ρ,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\rho}f_e, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{1.10}$$

где f_e - плотность сил электромагнитного поля, которую, в соответствии с результатами /7/, можно написать в виде[1)]

$$f_e = \frac{1}{16\pi}\left\{\nabla\left[|E|^2\rho\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)_s\right] - |E|^2\nabla\epsilon\right\} \tag{1.11}$$

1) В случае плазмы, где $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$, выражение (1.11) совпадает с соответствующей силой, определенной в статье /8/.

В этом выражении и во всех других формулах (в частности в (1.6)) мы должны рассматривать все производные по ρ при постоянной энтропии S, поскольку в этой работе мы не учитываем диссипативных процессов.

Умножая уравнения (1.7), (1.8) скалярно на E^*, H^*, соответственно, вычитая одно из другого и складывая с комплексно-сопряженными уравнениями, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega}|E|^2+|H|^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial^2(\omega\epsilon)}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial E}{\partial t}E^*-\text{к.с.}\right)\right]=$$

$$=-\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}|E|^2-c\,\mathrm{div}\left([E^*H]+[EH^*]\right) \tag{1.12}$$

Первые два слагаемых в левой части уравнения (1.12) отвечают плотности энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией /8/. Последнее слагаемое описывает изменение плотности энергии, связанное с изменением частоты волны.

Первый член в правой части имеет смысл работы в единицу времени, совершаемой гидродинамическими силами, по изменению плотности энергии электромагнитного поля в среде. Это выражение было получено из несколько других рассуждений Питаевским /7/.

Приращение гидродинамической энергии, согласно уравнениям (1.9) и (1.10), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho U\right)=v f_e-\mathrm{div}\left[v\left(\frac{\rho v^2}{2}+p+\rho U\right)\right] \tag{1.13}$$

где U - внутренняя энергия среды, приходящаяся на единицу массы, а f_e - плотность силы (1.11), действующей на среду со стороны поля. Складывая (1.12) и (1.13) получаем после несложных преобразований следующее уравнение сохранения полной энергии среды и поля

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega}|E|^2+|H|^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\omega\epsilon)}{\partial\omega^2}\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial E}{\partial t}E^*-\text{к.с.}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho v^2}{2}+\rho U\right\}=-\mathrm{div}\left\{\frac{c}{16\pi}\left[[E^*H]+[EH^*]\right]+\right.$$

$$\left.+v\left(\frac{\rho v^2}{2}+p+\rho U+\frac{|E|^2}{16\pi}\rho\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\right)\right\} \tag{1.14}$$

Рассмотрим теперь более подробно уравнения для поля волны. Исключая H из уравнений (1.7), (1.8) и ограничиваясь одномерным случаем, получаем

$$\left(\omega^2\epsilon+c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)E+i\frac{\partial(\omega^2\epsilon)}{\partial\omega}\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2(\omega^2\epsilon)}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+$$

$$+i\omega\left(\frac{1}{2}\omega\frac{\partial^2\epsilon}{\partial\omega\partial t}+2\frac{\partial\epsilon}{\partial t}\right)E \tag{1.15}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что отклонение плотности ρ от равновесного значения ρ_0 достаточно мало, т.е.

$$(\rho-\rho_0)/\rho_0 \ll 1 \tag{1.16}$$

Тогда можно написать

$$\epsilon(\omega,\rho)=\epsilon_0+\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_0}(\rho-\rho_0),$$

$$\epsilon_0=\epsilon(\omega,\rho_0),\quad \frac{\partial\epsilon}{\partial t}=\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.17}$$

Поскольку скорость изменения плотности порядка скорости изменения комплексной амплитуды $\partial E/\partial t$, то

$$\partial(\rho-\rho_0)/\partial t \ll \omega(\rho-\rho_0) \tag{1.18}$$

Подставив (1.17) в (1.15) получим

$$\left[\omega^2\epsilon_0 + \omega^2\frac{\partial\epsilon_0}{\partial\rho_0}(\rho-\rho_0) + c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]E + i\,\frac{\partial(\omega^2\epsilon_0)}{\partial\omega}\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2(\omega^2\epsilon_0)}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{1.19}$$

где мы пренебрегали слагаемыми меньшего порядка, чем $\omega^2(\rho-\rho_0)E/\rho_0$.

Уравнение (1.19), совместно с уравнениями гидродинамики, будут исходными для описания электрозвуковых волн в жидкости. При этом мы ограничимся здесь рассмотрением только поперечных волн и остановимся подробно на двух случаях: $\epsilon(\omega,\rho_0)>0$ (в среде могут распространяться бегущие электромагнитные волны), и $\epsilon(\omega,\rho_0)<0$ (в линейном приближении бегущих волн нет).

2. Электрозвуковые волны при $\epsilon_0>0$.

В этом случае удобно несколько переопределить амплитуду волны E, положив вместо (1.4)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[E(t)\,e^{i(Kx-\omega t)} + к.с.\right] \tag{2.1}$$

где K - "невозмущенное" волновое число, определяемое соотношением

$$c^2K^2 = \epsilon_0\omega^2 \tag{2.2}$$

При этом в уравнении (1.19) следует сделать замену $E \to E\,e^{iKx}$; учитывая (2.2), получаем

$$i\left(\frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial E}{\partial x}\right) + \frac{u}{2K}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1-Ku'}{2Ku}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{uK}{2\epsilon_0}\left(\rho_0\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_0}\right)\nu E = 0 \tag{2.3}$$

Здесь и ниже

$$\nu = (\rho-\rho_0)/\rho_0, \tag{2.4}$$

а u – групповая скорость волны с частотой в невозмущенной среде[2])

$$u = \left(\frac{\partial\omega}{\partial K}\right)_{\rho=\rho_0}, \quad u' = \left(\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)_{\rho=\rho_0} \tag{2.5}$$

Уравнение (2.3) совместно с уравнениями гидродинамики составляют исходную систему для нелинейных электрозвуковых колебаний в области $\epsilon_0>0$.

В ряде случаев удобно уравнение для поля писать в "гидродинамической" форме. Положив для этого

$$E = a\,e^{i\varphi} \tag{2.6}$$

где a - положительная величина, и отделяя в (2.3) действительную и мнимую части получим

---

2) Полезно иметь ввиду формулы, вытекающие из (2.2)

$$\frac{d(\omega^2\epsilon_0)}{d\omega} = \frac{2Kc^2}{u}, \quad \frac{d^2(\omega^2\epsilon_0)}{d\omega^2} = \frac{2c^2(1-Ku')}{u^2}$$

напомним, что для газов $\rho_0(\partial\epsilon_0/\partial\rho_0) = \epsilon_0 - 1$

$$-(\varphi_t + u\varphi_x) + \frac{u}{2k}\left[\frac{a_{xx}}{a} - \varphi_x^2\right] - \frac{1-ku'}{2ku}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{a_{tt}}{a} - \varphi_t^2\right] + \frac{uk}{2\epsilon_0}\left(\rho_0\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_0}\right)\nu = 0 \qquad (2.7)$$

$$(a^2)_t + u(a^2)_x + \frac{u}{k}(a^2\varphi_x)_x - \frac{1-ku'}{ku}(a^2\varphi_t)_t = 0 \qquad (2.8)$$

Перейдем к рассмотрению устойчивости нелинейной плоской волны, описываемой уравнениями (1.9), (1.10), (2.7), (2.8). Предполагаемая все отклонения от величин, описывающих исходную плоскую волну, пропорциональными $\exp i(\varkappa x - \Omega t)$, получим следующее дисперсионное уравнение

$$\left[(\Omega - \varkappa u)^2 - \frac{u^2\varkappa^4}{4k^2}\right](\Omega^2 - c_s^2\varkappa^2) = \frac{u^2\varkappa^4}{4k^2\tau^2} \qquad (2.9)$$

где

$$\tau^{-2} = \frac{8\pi c^2}{E_0^2\omega^2\rho_0(\partial\epsilon/\partial\rho_0)^2}, \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s \qquad (2.10)$$

Величина τ имеет размерность времени и определяет, как будет видно из дальнейшего, характерные времена нелинейных модуляционных процессов; c_s - скорость звука в среде. При получении (2.9) мы пренебрегали несущественными для исследования неустойчивости слагаемыми порядка Ω/kc.

Рассмотрим вначале уравнение (2.9) при достаточно малых $\varkappa$. В этом случае, как нетрудно убедиться, корни уравнения (2.9) имеют вид

$$\Omega_{1,2} = \pm c_s\varkappa\left[1 + \frac{u^2}{c_s^2\tau^2[4k^2(u\mp c_s)^2 - \varkappa^2u^2]}\right]^{1/2} \qquad (2.11)$$

$$\Omega_{3,4} = \varkappa u \mp \frac{u\varkappa^2}{2k}\left[1 + \frac{1}{(u^2 - c_s^2)\varkappa^2\tau^2}\right]^{1/2} \qquad (2.12)$$

Эти формулы получены в предположении

$$c_s^2\tau^2k^2(1 - c_s/u)^2 \gg 1 \qquad (2.13)$$

эквивалентном некоторому ограничению сверху на амплитуду исходной электромагнитной волны.

Формулы (2.11), (2.12) справедливы и в случае достаточно больших $\varkappa$, удовлетворяющих, однако, условию

$$|\varkappa/k| \ll 1 \qquad (2.14)$$

являющемся в то же время и условием справедливости исходных уравнений (2.7), (2.8) (при получении которых предполагалось, что $\varphi_x \ll k$).

В области своей применимости формулы (2.11), (2.12) описывают возмущения, распространяющиеся со скоростями, близкими к звуковой $(\pm c_s)$ и групповой скорости электромагнитной волны $(\pm u = \pm\partial\omega/\partial k)$, соответственно. Поэтому мы будем называть указанные ветви колебания квазизвуковыми и квазиоптическими.

В случае $u \gg c_s$ из (2.11) следует дисперсионное уравнение для возмущений волны, полученное Волковым /1/ для случая плазмы[3)]

3) Для плазмы (где $\epsilon = 1 - \omega_0^2/\omega^2$) величина τ, определяемая формулой (2.10), совпадает с соответствующим нелинейным временем $\tau = 2(2\pi/\rho_0)^{1/2}c\omega/E_0\omega_0^2$, введенным в работе /1/. Заметим также, что ветви колебаний, определяемые нашей формулой (2.12) в работе /1/ отсутствуют, поскольку принятое там приближение соответствует $u\to\infty$.

$$\Omega = \pm c_s \varkappa \left[1 + 1/C_s^2 \tau^2 (4K^2 - \varkappa^2)\right]^{1/2} \quad (2.15)$$

Однако, область неустойчивости, найденная Волковым в /1/ на основании (2.15) лежит вне области применимости его приближения, ограниченного, как и у нас, условием (2.14). Приведенная выше более точная формула (2.11) также непригодна для этой цели, так как область комплексности корней лежит вне её области применимости.

Корректное исследование области неустойчивости должно производиться на основе исходного уравнения четвертого порядка (2.9). Рассмотрим отдельно два случая: $u > c_s$, $u < c_s$.

1) $u > c_s$. Как показано в Приложении, область неустойчивости в этом случае определяется неравенствами

$$0 \le \left(1 - \frac{c_s}{u}\right) - \alpha\left(1 - \frac{c_s}{u}\right)^{-1/2} \le \frac{\varkappa}{2K} \le$$

$$\le \left(1 - \frac{c_s}{u}\right) + \alpha\left(1 - \frac{c_s}{u}\right)^{-1/2}, \quad (2.16а)$$

$$-\left(1 - \frac{c_s}{u}\right) - \alpha\left(1 - \frac{c_s}{u}\right)^{-1/2} \le \frac{\varkappa}{2K} \le$$

$$\le -\left(1 - \frac{c_s}{u}\right) + \alpha\left(1 - \frac{c_s}{u}\right)^{-1/2} \le 0 \quad (2.16б)$$

где

$$\alpha^2 = 1/4 u c_s K^2 \tau^2 \quad (2.17)$$

Выражения для корней, принимающих комплексные значения в областях (2.16а), (2.16б) имеют вид, соответственно,

$$\Omega_{1,3} = \varkappa c_s + \frac{\varkappa(u - c_s) - \varkappa^2 u/2K}{2} \mp$$

$$\mp \sqrt{\left[\varkappa(u - c_s) - \frac{\varkappa^2 u}{2K}\right]^2 - \frac{\alpha^2 \varkappa^2 u^2}{1 - c_s/u}}, \quad (2.18а)$$

$$\Omega_{1,4} = \varkappa c_s + \frac{\varkappa(u - c_s) + \varkappa^2 u/2K}{2} \mp$$

$$\mp \sqrt{\left[\varkappa(u - c_s) + \frac{\varkappa^2 u}{2K}\right]^2 - \frac{\alpha^2 \varkappa^2 u^2}{1 - c_s/u}} \quad (2.18б)$$

При $\alpha = 0$ формула (2.18а) переходит, при соответствующих знаках, в выражения для Ω_1 и Ω_3, определенные формулами (2.11), (2.12), где также положено $\alpha = 0$. Соответственно, выражения (2.18б) при $\alpha = 0$ переходят в Ω_1 и Ω_4, определенные формулами (2.11), (2.12). Мы видим, таким образом, что неустойчивость в рассматриваемом случае имеет место, когда звуковая и оптическая ветви в некоторой области достаточно близки друг к другу ($1 - c_s/u \simeq |\varkappa/2K| > \alpha$).

Максимальный инкремент неустойчивости достигается при $\varkappa = \varkappa_0^{\pm}$, где

$$\varkappa_0^{\pm} = \pm 2K(1 - c_s/u) \quad (2.19)$$

Величина максимального инкремента имеет при этом вид

$$Im\, \Omega(\varkappa_0^{\pm}) = \frac{1}{2\tau}\left(\frac{u}{c_s} - 1\right)^{1/2} \quad (2.20)$$

2) $u < c_s$. В этом случае, как вытекает из анализа, проведенного в Приложении, неустойчивость возможна только при

$$0 \le |\varkappa| \le (c_s^2 - u^2)^{-1/2} \tau^{-1} \quad (2.21)$$

а соответствующие частоты даются выражением (2.12), определяющим оптическую ветвь. Максимальный инкремент достигается здесь при

$$\varkappa_0^{-1} = \pm \sqrt{2}\, \tau (c_s^2 - u^2)^{1/2} \quad (2.22)$$

и равен

$$\operatorname{Im}\Omega(\varkappa_0) = \frac{u}{4\kappa\tau^2(c_s^2-u^2)} \qquad (2.23)$$

Неустойчивость, определяемая формулами (2.12) и (2.21)-(2.23) полностью идентична неустойчивости плоской волны в средах, где нелинейные эффекты обусловлены эффектом Керра. (См., например, обзоры /10-12/, а также /13/. В работе Волкова /1/ неустойчивость такого типа, естественно, отсутствует (см.примечание 3).

Всё, сказанное выше, определяет лишь начальную стадию процесса неустойчивости. Исследование развития неустойчивости при больших временах лежит вне рамок линейного приближения для возмущения исходной волны. Качественные соображения, аналогичные изложенным в работах /14,15/ приводят к выводу о том что в результате развития неустойчивостей ~~должны появиться~~ развиваются "солитоны огибающих" /10-12/, описываемые стационарными решениями уравнений (2.7), (2.8) и уравнений гидродинамики.

Рассмотрим более подробно структуру таких солитонов. При не слишком сильных ограничениях, которые будут указаны ниже (см.формулы (2.39), (2.40))уравнения гидродинамики могут быть линеаризованы, что даёт в одномерном случае

$$V_{tt} - C_s^2 V_{xx} = C_s^2 (a^2)_{xx} / E_c^2 \qquad (2.24)$$

Здесь V - относительное изменение плотности (см. 2.4), а через E_c^2 обозначена величина

$$E_c^2 = \frac{16\pi C_s^2}{|\partial\varepsilon_0/\partial\rho_0|} = 2E_0^2\tau^2\omega^2\rho_0|\partial\varepsilon/\partial\rho_0|\,c_s^2/C^2 \qquad (2.25)$$

(E_c характеризует величину напряженности поля, при которой становится существенным взаимодействие электромагнитных и звуковых волн). Рассмотрим теперь стационарные решения уравнений (2.7), (2.8) и (2.24), описываемые выражениями вида

$$a = a(x - wt), \quad v = v(x - wt), \quad \varphi = Ct + \varphi_1(x - wt) \qquad (2.26)$$

где C - постоянный сдвиг частоты, обусловленный нелинейными процессами. Подставляя (2.26) в уравнения (2.7) и (2.8) получаем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = -\frac{\kappa}{u}\,\frac{(a^2 - a_0^2)(u - w)}{a^2} \qquad (2.27)$$

Остальные формулы оказываются различными лоя двух случаев: 1) $u > C_s$, 2) $u < C_s$.

1) $u > C_s$.

$$a = a_0^2 - (a_0^2 - a_{min}^2)\,\mathrm{sech}^2[(x - wt)/\delta], \qquad (2.28)$$

$$\delta = 2\tau\left[(W^2 - C_s^2)/(1 - a_{min}^2/a_0^2)\right]^{1/2}, \qquad (2.29)$$

$$C = 0, \quad v = v_0 + \frac{C_s^2}{E_c^2}\,\frac{a^2 - a_0^2}{W^2 - C_s^2}, \qquad (2.30)$$

где v_0 - относительное изменение плотности в плоской волне с амплитудой $a_0 = |E_0|$. Таким образом, в рассматриваемом случаем амплитуда поля и величина плотности внутри солитона всегда меньше, чем соответствующие значения в плоской волне[4) При этом скорость распространения такой "волны разрежения" определяется из уравнения

$$(W^2 - C_s^2)(W - u)^2 = \frac{a_{min}^2}{a_0^2}\,\frac{u^2}{4\kappa^2\tau^2} \qquad (2.31)$$

(Отсюда следует, в частности, что $W^2 > C_s^2$). Соотношение (2.31) для нелинейной стационарной волны аналогично дисперсионному уравнению и может быть исслеловано таким же способом (см.Приложение). При этом оказывается, что если u и C_s удовлетворяют условию (2.13), то все четыре корня уравнения

4) Термин "солитон" следовало бы здесь заменить более точным термином "солитоноподобное возмущение плоской волны" (поскольку $a \to a_0$, при $x \to \pm\infty$).

(2.31) вещественны. Соответственно в этом случае мы имеем два типа солитонов – "акустические" – скорость которых близка к C_s

$$W_a^2 \approx c_s^2 + \frac{a_{min}^2}{a_0^2}\,\frac{u^2}{4K^2\tau^2(u-c_s)^2}, \qquad (2.32)$$

и "оптические", скорость которых близка к u

$$W_0 \approx u \pm \frac{a_{min}}{a_0}\,\frac{u}{2K\tau(u^2-c_s^2)^{1/2}} \qquad (2.33)$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.29), получим следующие выражения для обратных длин акустического и оптического солитонов

$$\delta_a^{-1} \approx \left(\frac{a_0^2}{a_{min}^2}-1\right)^{1/2} K\left(1-\frac{c_s}{u}\right), \qquad (2.34)$$

$$\delta_0^{-1} \approx \frac{1}{2\tau u}\left(1-\frac{a_{min}^2}{a_0^2}\right)\left(1-\frac{c_s}{u}\right)^{-1} \qquad (2.35)$$

2) $u < c_s$. В этом случае

$$\varphi = -\frac{A^2}{4E_c^2}\,\frac{c_s^2}{(c_s^2-u^2)}\left(\rho_0\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\rho_0}\right)\frac{uK}{\varepsilon_0}\,t, \qquad (2.36)$$

$$a = A\,\mathrm{sech}[(x-wt)/\delta], \quad \delta = \frac{2a_0\tau}{A}(c_s^2-u^2)^{1/2} \qquad (2.37)$$

$$\nu = -\frac{c_s^2}{c_s^2-u^2}\,\frac{a^2}{E_c^2} \qquad (2.38)$$

В солитоне, описываемом этими формулами, с ростом амплитуды поля плотность среды убывает, амплитуда волны максимальна в центре солитона, а плотность соответственно минимальна; на бесконечности $a \to 0$, $\nu \to 0$. Скорость солитона равна групповой скорости волны u, так что его также можно считать оптическим (он, однако, принципиально отличается от оптического солитона при $u > c_s$, рассмотренного выше).

Солитон, описываемый формулами (2.36)-(2.38) качественно совершенно аналогичен солитонам "огибающих" в средах, где нелинейные эффекты обусловлены оптическим эффектом Керра и где при этом волны неустойчивы относительно самомодуляции. В связи с этим напомним, что неустойчивость, имеющая место при $u < c_s$ (при условии (2.21)) также качественно аналогична самомодуляционной неустойчивости, обусловленной эффектом Керра.

Если теперь учесть результаты работ /14,15/, то мы получим, что развитие неустойчивости (описываемой формулами (2.21)-(2.23)) приводит к распаду волны на отдельные волновые пакеты, качественно близкие к солитонам (2.36)-(2.38). Амплитуда таких волн порядка амплитуды исходной волны, а их размеры, как видно из формулы (2.37) порядка длины возмущения, отвечающей максимальному инкременту неустойчивости.

В случае $u > c_s$, длина акустических солитонов, определяемая формулой (2.34), близка по порядку величины (при $a_0 \sim a_{min}$) к длине, отвечающей максимальному инкременту неустойчивости (2.16)-(2.19). Качественный анализ, аналогичный примененному в работах /14,15/ приводит к заключению, что результатом развития неустойчивости при $u > c_s$ является образование акустических солитонов.

Остановимся теперь коротко на случае среды с $c_s \to 0$. Простым примером такой среды может быть "холодная" плазма. Дисперсионное уравнение при этом совпадает с уравнением Волкова (2.15), где $c_s = 0$. Это уравнение было впервые получено Горбуновым /16/. Из него следует, что в рассматриваемом случае нет областей неустойчивости.

Приближение, использованное Горбуновым, эквивалентно пренебрежению слагаемыми с φ_{xx} и a_{xx} в уравнениях (2.7), (2.8). Соответственно в его приближении невозможно получить солитоны. Из результатов, полученных выше, следует, что в этом случае существуют только оптические солитоны (формулы (2.28)-(2.30), (2.33), (2.35)), где следует положить $c_s = 0$.

Укажем, в заключение этого п., условия справедливости линеаризации уравнений гидродинамики. Из выражений для плотности солитонов (2.30), (2.38) следуют ограничения на параметры среды и амплитуду поля исходной волны

$$\frac{u^2 \rho_0}{|u^2 - c_s^2| \varepsilon_0} \left| \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \rho_0} \right| \gg 1 \tag{2.39}$$

$$\frac{a_0^2}{16\pi} \ll \frac{|u^2 - c_s^2|}{|\partial \varepsilon_0 / \partial \rho_0|} \tag{2.40}$$

Если теперь воспользоваться условием

$$|1 - c_s/u| \ll 1 \tag{2.41}$$

следующим из неравенства $\kappa^{-1} \ll \delta$ и формул (2.34), (2.37), то соотношение (2.40) имеет место при условии $a_0^2 \ll \mathcal{E}_c^2$.

3. Электрозвуковые волны при $\varepsilon_0 < 0$.

В линейном приближении электромагнитное поле может проникать в такую среду лишь на расстояние порядка длины "скин-слоя" $\varkappa^{-1}$, где

$$\varkappa^2 = -\frac{\omega^2 \varepsilon_0}{c^2} \tag{3.1}$$

Структура нелинейного стационарного скин-слоя (т.е. когда амплитуда падающей волны не меняется во времени) изучалась в работах /17,18/ для случая плазмы, где было показано, в частности, что глубина проникновения поля в этом случае не меньше, чем $1/\varkappa$ 5). Этот результат нетрудно обобщить для произвольной среды с $\varepsilon_0 < 0$.

Мы рассмотрим здесь нестационарные процессы, имеющие место, когда амплитуда поля, падающего на среду с отрицательным ε_0 , меняется во времени. В этом случае взаимосвязанные изменения амплитуды поля и плотности в среде приводят к возможности распространения в последней нелинейных электрозвуковых импульсов, которые, проникая в глубь среды, переносят с собой электромагнитное поле. Характерные размеры таких импульсов - как будет видно из дальнейшего - порядка $\varkappa^{-1}$, а их скорость не превышает скорости c_s .

---

5) Здесь имеется в виду скин-слой поперечной волны. Нелинейная теория стационарного скин-слоя для продольной волны изучена в работе /19/.

Введем основные обозначения, которые будут использоваться в этом п. Частоту, при которой ε_0 меняет знак, обозначим через ω_0 $(\varepsilon_0(\omega_0) = 0)$.Если частота падающей волны достаточно близка к ω_0 , то можно написать

$$\varepsilon_0(\omega) \approx \beta(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega^2, \ (\text{при } (\omega_0 - \omega)/\omega \ll 1) \tag{3.2}$$

где β - множитель порядка единицы. При этом мы будем считать, что эффектами пространственной дисперсии можно пренебречь. Кроме того, введем естественное предположение о том, что характерное время T изменения комплексной амплитуды поля E достаточно велико по сравнению с $(\omega_0 - \omega)^{-1}$. Учитывая (3.1) и (3.2), это условие можно написать в виде

$$T \gg \omega/(\varkappa c)^2 \tag{3.3}$$

Амплитуда поля считается, как и всюду выше, достаточно малой $(|E|^2/\mathcal{E}_c^2 \ll 1)$. При этих условиях пространственные масштабы изменения амплитуды, плотности и других медленно меняющихся величин, как уже упоминалось, имеют порядок $L \sim \varkappa^{-1}$. Тогда из (3.3) следует, что в основных уравнениях для поля (1.19) производные по времени достаточно малы по сравнению с членом $c^2 \partial^2 E/\partial x^2$, так что ими можно пренебречь.

Подставляя теперь в (1.19) $E = a e^{i\varphi}$, получим основные уравнения для поля в виде

$$\partial(a^2 \varphi_x)/\partial x = 0 \tag{3.4}$$

$$a_{xx} - \frac{\varkappa^2}{\gamma^2}(\gamma^2 + \nu) a + a \varphi_x^2 = 0 \tag{3.5}$$

где обозначено

$$\gamma^2 = -\varepsilon_0 / |\rho_0 \, \partial \varepsilon_0 / \partial \rho_0|, \quad \nu = (\rho - \rho_0)/\rho_0 \tag{3.6}$$

Из уравнения (3.4) получаем $a^2 \varphi_x = P(t)$, где $P(t)$ -произвольная функция времени. Поскольку в рассматриваемой нами постановке задачи поле $E(x,t)$ должно исчезать при $x \to \infty$, то $P(t)=0$. Таким образом, окончательно получаем первое основное уравнение в виде

$$a_{xx} - M^2\gamma^{-2}(\gamma^2+v)\,a = 0 \qquad (3.7)$$

где $a^2(x,t) = |E|^2$. В качестве второго основного уравнения возьмем линеаризованное уравнение гидродинамики (2.24). Условие допустимости линеаризации, как будет видно из дальнейшего (см. примечание 6) имеет вид

$$\gamma^2 = (\omega_0^2-\omega^2)/\omega_0^2 \ll 1 \qquad (3.8)$$

т.е. частота падающей волны должна быть достаточно близка к пороговой частоте ω_0.

Рассмотрим, прежде всего стационарные волны, удовлетворяющие уравнениям (3.7), (2.24). Подставляя в эти уравнения

$$v = v(x-wt), \quad a = a(x-wt)$$

получим

$$v = -\frac{a^2-a_0^2}{E_c^2(1-M^2)} - \gamma^2 \qquad (3.9)$$

$$\frac{2a_0^2}{\varkappa^2}\,a_{xx} - a^2(a_0^2-a^2) = 0 \qquad (3.10)$$

где a_0 – постоянная интегрирования,

$$M = w/c_s, \quad \varkappa^2 = 2M^2a_0^2/\gamma^2E_c^2(1-M^2) \qquad (3.11)$$

Величину M можно назвать "электрозвуковым числом Маха".

Ограниченное решение уравнения (3.10) имеет вид

$$a^2 = a_2^2\, dn^2\,\frac{\varkappa a_2}{2a_0}(x-wt) \qquad (3.12)$$

где $dn\,z$ – эллиптическая функция Якоби с модулем

$$q^2 = (a_2^2-a_1^2)/a_2^2 \qquad (3.13)$$

Величины a_2 и a_1 являются здесь постоянными интегрирования, имеющими смысл

$$a_2 = \max a(x-wt), \quad a_1 = \min a(x-wt) \qquad (3.14)$$

Область значений этих постоянных ограничена неравенствами

$$0 \le a_1 < a_0 < a_2 \le \sqrt{2}\,a_0 \qquad (3.15)$$

Длины волн λ и их частоты Ω определяются формулами

$$\lambda = 4a_0 K(q^2)/a_2\varkappa, \quad \Omega = 2\pi w/\lambda \qquad (3.16)$$

$K(q^2)$ – эллиптический интеграл 1-го рода.

При $a_1 \to 0$, $q \to 1$ получаем

$$dn\,z \to \mathrm{sech}\,z, \quad \lambda \sim \ln|1-q^2| \to \infty \qquad (3.17)$$

т.е. периодическая волна при $a_1 \to 0$ переходит в солитоны, расстояния между которыми логарифмически растут.

Рассмотрим более подробно структуру таких солитонов. Из определения v следует, что при удалении от солитона $v \to 0$. Тогда из (3.9) получаем[6)]

$$a_0^2 = \gamma^2E_c^2(1-M^2), \quad \varkappa^2 = 2M^2 \qquad (3.18)$$

---

6) Законность линеаризации уравнений гидродинамики проще всего получить из (3.9) требуя, чтобы было $v \ll 1$. При этом, в частности, получаем условие (3.8), а также ограничение на значение постоянной a_0^2: $a_0^2 \ll E_c^2(1-M^2)$.

Кроме того, в этом случае $a_2^2 = 2a_0^2$ (что легко получить из "интеграла энергии" уравнения (3.10)). Вводя новое значение для амплитуды солитона $a_m = a_2$ получаем 7)

$$a(x,t) = a_m \,\mathrm{sech}\, \alpha(x - c_s M t) \tag{3.19}$$

$$\nu(x,t) = -2\gamma^2 \mathrm{sech}^2 \alpha(x - c_s M t) \tag{3.20}$$

$$a_m^2 = 2\gamma^2 E_c^2 (1 - M^2) \tag{3.21}$$

Таким образом, все солитоны имеют одинаковую длину, а их амплитуда однозначно связана с числом Маха соотношением (3.21).

Остановимся еще на предельном случае стационарных волн, получающимся при

$$a(x,t) = a_0 \quad , \quad \nu(x,t) = -\gamma^2 \tag{3.22}$$

Решение (3.22) описывает волну постоянной амплитуды 8). Нетрудно, однако, убедиться, что эта волна неустойчива. Действительно, подставляя в (3.7) и (2.24) выражения

$$a(x,t) = a_0 + \delta a \exp i(\varkappa x - \Omega t)$$

$$\nu(x,t) = -\gamma^2 + \delta\nu \exp i(\varkappa x - \Omega t) \tag{3.23}$$

---

7) Если положить в соотношениях (3.19)-(3.21), M=0 и $x \to x + const$, то получаются формулы, описывающие структуру нелинейного скин-слоя при постоянной амплитуде падающей волны, полученные В.П.Силиным. /18/.

8) Обратим внимание, что электромагнитное поле в этой волне как и в других волнах, рассмотренных в этом п., не является полем бегущей волны. Действительно, поскольку у нас $\varphi_x = 0$, то вектор Пойтинга равен нулю: $S = (c/16\pi)\{[EH^*] + k.c.\} = 0$. Электромагнитная энергия переносится только конвективным способом, т.е. вместе со средой (см. уравнение (1.14)).

где δa и $\delta\nu$ амплитуды малых возмущений, получаем следующее дисперсионное уравнение

$$\Omega^2 = c_s^2(\varkappa^2 - \varkappa_0^2), \quad \varkappa_0^2 = 2\alpha^2 a_0^2/\gamma^2 E_c^2 \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что возмущения с $\varkappa^2 < \varkappa_0^2$ экспоненциально нарастают. Точно также можно убедиться в неустойчивости периодических стационарных волн вида (3.12) по крайней мере в предельном случае $a_2 - a_1 \ll a_0$.

С другой стороны, можно показать /20/, что солитоны (по крайней мере достаточно малой амплитуды, когда число Маха близко к единице) устойчивы.

Остановимся теперь на некоторых характерных особенностях процессов, возникающих при падении на среду с $\epsilon_0 < 0$ модулированной волны с достаточно большой амплитудой. Прежде всего укажем, что основным уравнениям (3.7) и (2.24) удовлетворяют решения, описывающие два типа волн: 1) электрозвуковые волны, где изменение относительной плотности ν взаимосвязаны с a так, что, если в окрестности данной точки $\nu \neq 0$, то и $a \neq 0$. Простейшим примером таких волн являются солитоны (3.19)-(3.21). 2) Чисто звуковые волны, где $\nu \neq 0$, $a = 0$ (нетрудно видеть, что такие решения удовлетворяют основным уравнениям (3.7), (2.24)). Скорость распространения последних равна c_s. Скорость же волн первого типа - электрозвуковых - меньше скорости звука (простейший пример - стационарные электрозвуковые волны, рассмотренные выше).

Можно получить, далее, общий вид асимптотики электрозвуковых волн, распространяющихся в невозмущенной среде. Если учесть, что на "переднем крае" такой волны ν и a достаточно малы, то можно пренебречь последним слагаемым в (3.7); при этом асимптотика решения при $x \to +\infty$ имеет вид

$$a(x,t) = A(t)\, e^{-\alpha x} \tag{3.25}$$

где $A(t)$ - произвольная функция времени. Асимптотика солитонов (3.19) является частным случаем (3.25).

При возбуждении скин-слоя модулированной волной достаточно большой амплитуды прежде всего излучаются звуковые колебания, распространяющиеся со скоростью c_s. За ними движутся с меньшей скоростью электрозвуковые волны с асимптотикой (3.25). Изучению детального характера эволюции волн будет посвящена отдельная работа. Здесь же мы отметим, что предварительное исследование этого вопроса даёт основание предполагать, что конечным результатом этой эволюции является образование электрозвуковых солитонов (3.19)-(3.21).

В заключение рассмотрим, как выглядят приведенные выше общие соотношения для плазмы. Пусть, например, имеется неизотермическая плазма с $T_i \ll T_e$ (для простоты положим $T_i = 0$), тогда $c_s^2 = T_e/m_i$ и размер солитона определяется согласно (3.19) формулой

$$\delta = r^{-1} = c/(\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2} \tag{3.26}$$

Амплитуда солитона (3.21) в этом случае имеет вид

$$a_m = \sqrt{2}\left[(\omega_0^2 - \omega^2)(1 - M^2)\right]^{1/2} E_c/\omega_c,$$

$$E_c^2 = 16\pi\rho_0 c_s^2 \omega^2/\omega_0^2 \tag{3.27}$$

Эта величина при M=0 равна $2E_h$, где E_h – полученное В.П.Силиным предельное значение амплитуды поля, падающей на плазму электромагнитной стационарной волны, при которой плазма ещё скинирует поле (см. /18/ формулы (3.9), (3.10)).

Возможно, что образование солитонов внутри плазмы при $\omega < \omega_0$ наблюдалось в экспериментах, изложенных в сообщении М.Л.Левина и К.В.Ходатаева /21/, однако, более детальное количественное сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными требует учёта ограниченности системы, использовавшейся в этой работе. Соответствующее рассмотрение выходит за рамки этой статьи.

Пользуемся возможностью выразить благодарность М.Л.Левину, Л.П.Питаевскому и Р.З.Сагдееву за полезное обсуждение результатов.

П р и л о ж е н и е

Заметим, прежде всего, что формулы (2.11), (2.12) остаются справедливыми, если

$$\varkappa^2/K^2 \ll |c_s - u|^2/u^2 \tag{П.1}$$

При этом условии формула (2.11) не приводит к комплексным корням, а формула (2.12) даёт комплексные корни при

$$u < c_s, \quad \varkappa^2/K^2 < 1/|c_s^2 - u^2|\tau^2 K^2 \tag{П.2}$$

Это и есть единственная область неустойчивости при условии (П.1)

Заметим далее, что если $|c_s - u| \gtrsim u$, то условие (П.1) всегда имеет место в области применимости нашей теории благодаря неравенству (2.14). Пусть теперь $|c_s - u| \ll u$, т.е.

$$c_s/u \sim 1 \tag{П.3}$$

Тогда условие (П.1) не выполняется при

$$|c_s - u|^2/u^2 \lesssim \varkappa^2/K^2, \tag{П.4}$$

причём правая часть этого неравенства ограничена условием (2.14).

Запишем теперь уравнение (2.9) в виде

$$z(z + 2c_s/u)(z - a)(z - b) = (2c_s/u)\alpha^2, \tag{П.5}$$

где

$$z = (-\Omega/\varkappa - c_s)/u, \quad a = 1 - c_s/u + \varkappa/2K,$$
$$b = 1 - c_s/K - \varkappa/2K \tag{П.6}$$

а α – параметр, определенный формулой (2.17).

Правая часть уравнения (П.5) очень мала; в силу (2.13) и (П.4), условие невыполнения (П.1) принимает вид

$$4(c_s/u)\alpha^2 \ll |1 - c_s/u|^2 \lesssim \varkappa^2/K^2 \tag{П.7}$$

Если положить $\alpha = 0$, то корни уравнения (П.5) примут вид

$$z_1(0)=0,\ z_2(0)=-2C_s/u,\ z_3(0)=a,\ z_4(0)=b \qquad (П.8)$$

При значениях α, удовлетворяющих (П.7), корни $z_i(\alpha)$ будут мало отличаться от значений (П.8), причём комплексные корни могут появляться только в том случае, когда в области (П.7) некоторые из корней сливаются между собой. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы соответствующие значения (П.8) были достаточно близки друг к другу. Легко видеть, что корень $z_2(\alpha)$ заведомо не может слиться ни с одним из других корней,так что он не может быть комплексным. Далее, поскольку мы имеем

$$\frac{C_s}{u} \sim 1,\ \alpha \sim \frac{1}{ukT},\ |C_s - u| \gg \frac{1}{kT} \qquad (П.9)$$

то отсюда и (П.4) следует

$$|b-a| = |\varkappa/k| \gg \alpha \qquad (П.10)$$

Таким образом,

$$|z_4(\alpha) - z_3(\alpha)| \gg \alpha \qquad (П.11)$$

Соотношения (П.10), (П.11) исключают возможность того, что $z_1(\alpha) \sim z_3(\alpha) \sim z_4(\alpha)$. Поэтому нам остается рассмотреть только случаи, когда $z_1(\alpha) \sim \alpha$ и

а) $|z_1(\alpha)| \sim |z_4(\alpha)| \ll |z_3(\alpha)| \ll |z_2(\alpha)|$

б) $|z_1(\alpha)| \sim |z_3(\alpha)| \ll |z_4(\alpha)| \ll |z_2(\alpha)|$

а) В этом случае комплексными могут быть только корни $z_{1,4}(\alpha)$. Для нахождения этих корней уравнение (П.5) можно заменить квадратным уравнением

$$z(z-b) + \alpha^2/2a \qquad (П.12)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае $1 - C_s/u \simeq \frac{\varkappa}{2k} + O(\alpha)$, мы можем с принятой степенью точности заменить величину a на $2(1 - C_s/u)$. В результате получаем, что комплексные корни будут только при условии $u > C_s$. Значения $\varkappa$ должны лежать при этом в интервале (2.16а), а частоты определяются выражением (2.18а).

б) В этом случае комплексные корни можно приближенно определить из уравнения $z(z-a) + \alpha^2/2b$. Поступая, как и выше, получаем опять $u > C_s$, также выражение (2.18б) и неравенства (2.16б).

Итак, мы показали, что при $u > C_s$ неустойчивость возможна лишь при условиях (П.7), а в случае $u < C_s$ – при условиях (П.2).

Литература

1. Т.Ф.Волков. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций $\underline{4}$, Изд. АН СССР, 1958, стр.98.
2. Г.А.Аскарьян. ЖЭТФ, $\underline{42}$, 1567, 1962.
3. В.И.Таланов. Изв.ВУЗов. Радиофизика, $\underline{7}$, 564, 1964.
4. В.И.Беспалов, В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ, $\underline{3}$, 471, 1966.
5. Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер. Письма ЖЭТФ, $\underline{3}$, 137, 1966.
6. J. R. Shen. Phys. Letters, $\underline{20}$, 378 1966
7. Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, $\underline{39}$, 1450, 1960.
8. А.В.Гапонов, М.А.Миллер. ЖЭТФ, $\underline{34}$, 242, 1958.
9. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
10. В.И.Беспалов, А.Г.Литвак, В.И.Таланов. Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике. Новосибирск, "Наука", Сиб.отделение, 1968, стр.428.
11. С.А.Ахманов, А.П.Сухоруков, Р.В.Хохлов. УФН, $\underline{93}$, 19, 1967.
12. В.И.Карпман. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Изд-во НГУ, Новосибирск, 1968.
13. Л.А.Островский. ЖЭТФ, $\underline{51}$, 1189, 1966.
14. В.И.Карпман. Письма ЖЭТФ, $\underline{6}$, 829, 1967.
15. В.И.Карпман, Е.М.Крушкаль. ЖЭТФ, $\underline{55}$, 530, 1968.
16. Л.М.Горбунов. ЖЭТФ, $\underline{1}$, 205, 1968.
17. Р.З.Сагдеев. Диссертация, Москва, 1959.
18. В.П.Силин. ЖЭТФ, $\underline{53}$, 1662, 1967.
19. А.В.Гуревич, Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, $\underline{45}$, 1243.
20. В.И.Карпман, Р.Н.Кауфман В.Ц. Гурович ЖЭТФ (в печати).
21. М.Л.Левин, К.В.Ходатаев. 3-я конференция по исследованиям в области физ.плазмы и управляемым термоядерным реакциям. Доклад CN – 24/J-8, 1968.

Ответственный за выпуск Гурович В.Ц

Подписано к печати 20.11. 1968 г.

Усл. 1,5 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.

Заказ № 259

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.