АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 262

В.Ц.Гурович, В.И.Карпман,
Р.Н.Кауфман

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УЕДИНЕННЫХ ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫХ ВОЛН

Новосибирск
1968

В.Ц.Гурович, В.И.Карпман, Р.Н.Кауфман

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УЕДИНЕННЫХ ЭЛЕКТРОЗВУКОВЫХ ВОЛН

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуется устойчивость электрозвуковых солитонов в жидкостях с отрицательной диэлектрической проницаемостью. Показано, что солитоны достаточно малой амплитуды устойчивы относительно малых возмущений.

В работе /1/ показано, что нелинейное взаимодействие высокочастотного электромагнитного поля с колебаниями плотности приводит к возможности распространения в средах с отрицательной диэлектрической проницаемостью ϵ нелинейных электрозвуковых волн, переносящих с собой электромагнитное поле (которое в линейном приближении в таких средах распространяться не может). Наиболее простым примером электрозвуковой волны в среде с $\epsilon < 0$ является стационарная уединенная волна (солитон). По аналогии с другими случаями, где встречаются солитоны, можно ожидать, что последние должны играть важную роль в динамике нестационарных электрозвуковых процессов.

В настоящей заметке рассматривается устойчивость электрозвуковых солитонов в жидкостях. При этом мы ограничимся исследованием солитонов достаточно малой амплитуды. В таком случае основные уравнения для электрозвуковых волн (см. /1/ уравнения (3.7), (2.24)) можно привести к виду

$$a_{xx} - \varkappa^2 \gamma^{-2} (\gamma^2 + \nu) a = 0, \tag{1}$$

$$\nu_t + c_s \nu_x = - \frac{c_s}{2E_c^2} (a^2)_x + O\left(\frac{a^4}{E_c^4}\right) \tag{2}$$

$$(a^2)_t + c_s (a^2)_x = O\left(\frac{a^4}{E_c^4}\right) \tag{3}$$

Здесь ν – относительное отклонение плотности жидкости ρ от равновесного значения ρ_0: $\nu = (\rho - \rho_0)/\rho_0$, $E_c^2 = 16\pi c_s^2 / |\partial \epsilon_0 / \partial \rho_0|$, c_s – скорость звука в среде, $\epsilon_0 = \epsilon(\omega, \rho_0)$ – диэлектрическая проницаемость среды при равновесной плотности ρ_0 $(\epsilon_0 < 0)$, a – амплитуда напряженности электрического поля $\left(\mathcal{E} = \frac{1}{2}[a(x,t) e^{-i\omega t} + \text{к.с.}]\right)$

$$\varkappa^2 = - \frac{\omega^2 \epsilon_0}{c^2}, \quad \gamma^2 = - \epsilon_0 / |\rho_0 \partial \epsilon_0 / \partial \rho_0| \tag{4}$$

Величина $\varkappa^{-1}$ – совпадает с расстоянием, на которое может проникнуть электромагнитное поле в среду с $\epsilon = \epsilon_0 < 0$ в линейном приближении, т.е. с размерами линейного скин-слоя.

Из уравнений (1) - (3) следуют законы сохранения для волн затухающих при $x \to \pm\infty$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \nu \, dx = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \Phi = \frac{\alpha}{\gamma^4}\int_{-\infty}^{\infty} \nu^2 \, dx, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} a^2 \, dx = 0 \tag{7}$$

Соотношение (5) имеет смысл закона сохранения массы, а (6),(7)- законов сохранения "упругой" и "электрической" энергий волны соответственно.

Стационарное решение уравнений (1)-(3), описывающее уединенную волну, имеет вид

$$\nu(x,t) = -2\gamma^2 \operatorname{sech}^2 \alpha(x - wt), \tag{8}$$

$$a(x,t) = a_m \operatorname{sech} \alpha(x - wt), \tag{9}$$

$$a_m = 2E_c(1-M)^{1/2}\gamma \tag{10}$$

где $M = w/c_s$ - "электрозвуковое число Маха", которое всегда меньше единицы. Условие малости амплитуды, необходимое для справедливости уравнений (2), (3) сводится к[1]

$$1 - M \ll 1 \tag{11}$$

---

1) Решение (8)-(10) отличается от солитонного решения, полученного в работе /1/ на основе более точных уравнений (см. выражения (3.19)-(3.21)) из /1/ заменой $1 - M^2 \to 2(1-M)$.

Введем теперь новую переменную $z = th\,\alpha(x - wt)$ и представим все величины как функции z и t : тогда уравнение солитона в этих переменных примет вид: $a_{(s)} = a_m\sqrt{1-z^2}$, $\nu_{(s)} = -2\gamma^2(1-z^2)$. Пусть теперь на фоне солитона имеется некоторое возмущение, так что

$$a(z,t) = a_m\sqrt{1-z^2}\,[1 + \varphi(z,t)] \tag{12}$$

где $\varphi(z,0) \ll 1$. Выражая ν через a с помощью уравнения (1) получим

$$\nu = \gamma^2(1-z^2)\left[\frac{\hat{L}\varphi}{1+\varphi} - 2\right] \tag{13}$$

$$\hat{L} = (1-z^2)^{-1}\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^2\frac{d}{dz}\right] \tag{14}$$

Учитывая вид оператора $\hat{L}$, разложим возмущение $\varphi(z,t)$ по полиномам Гегенбауэра $C_n^{3/2}(z) = dP_{n+1}/dz$ (P_n - полином Лежандра), являющимся собственными функциями оператора $\hat{L}$: $\hat{L}C_n^{3/2} = -n(n+3)C_n^{3/2}$

$$\varphi(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(t)\, C_n^{3/2}(z), \tag{15}$$

$$\alpha_n(t) = h_n^{-1}\int_{-1}^{1} \varphi(z,t)\, C_n^{3/2}(z)(1-z^2)\, dz \tag{16}$$

$$h_n = 2(n+1)(n+2)/(2n+3) \tag{17}$$

Таким образом, задача сводится к исследованию поведения во времени счётного числа обобщенных координат $\alpha_n(t)$, характеризующих возмущение. Для исследования этого поведения мы применим основную идею метода Ляпунова (см., например, /2/). Для этого рассмотрим величину Φ, определенную как функционал от $\varphi(z,t)$ выражениями (6), (13). Приращение $\delta\Phi$, обусловленное возмущением солитона есть

$$\delta\Phi \equiv \Phi\{\varphi(z,t)\} - \Phi\{0\} = \tag{18}$$
$$= 4\int_{-1}^{1}(1-z^2)\varphi\hat{L}\varphi\, dz + \int_{-1}^{1}(1-z^2)(\hat{L}\varphi)^2 dz$$

Подставляя (15) в (18) получим

$$\delta\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2(t)\, n(n+3)[n(n+3)-4]\, h_n \tag{19}$$

Первые два члена в этой сумме равны нулю, так что $\delta\Phi$ есть положительно определенная квадратичная форма от обобщенных координат $\alpha_n(t)$, $(n=2,3,\dots)$. Учитывая, что $\Phi(t)$ есть интеграл движения, и считая, что начальное возмущение достаточно мало, получаем $\delta\Phi(t) = \delta\Phi(0) < \varepsilon^2$, - где ε - наперед заданное малое число. Отсюда следует

$$\alpha_n^2(t) < \frac{\varepsilon^2}{n(n+3)[n(n+3)-4]\, h_n} \tag{20}$$

Таким образом, коэффициенты $\alpha_n(t)$ при $n = 2, 3, 4\dots$ остаются малыми, если они были достаточно малы в начальный момент времени.

Перейдем теперь к исследованию величин $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$. Подставляя (12) и (15) в (7) будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}(0) \tag{21}$$

Из (21) и (20) следует, что

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(0) + O(\varepsilon) \tag{22}$$

При этом, не нарушая общности, мы можем считать, что

$$\alpha_0(0) = 0, \tag{23}$$

ибо в противном случае, как видно из (12), (15), можно было бы

рассматривать задачу об устойчивости солитона с амплитудой $\tilde{a}_m = a_m[1+\alpha_0(0)]$ при начальном возмущении[2)]

$$\tilde{\varphi}(z,0) = [\varphi(z,0) - \alpha_0(0)]/[1+\alpha_0(0)] \tag{24}$$

Для получения уравнения, описывающего изменение $\alpha_1(t)$ подставим (12), (13), (15) в уравнение (2), и разложим обе части последнего уравнения по полиномам Гегенбауэра. Тогда получается следующая система уравнений для величин

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{2}{3}\mu c_s(1-M)\left(\alpha_0 + \frac{27}{7}\alpha_2\right), \tag{25}$$

$$n(n+3)\dot{\alpha}_n = -\mu c_s(1-M)\Big\{\alpha_{n-1}[4-(n-1)(n+2)]\cdot\frac{n(n+1)}{(2n+1)} - \alpha_{n+1}[4-(n+1)(n+4)]\frac{(n+2)(n+3)}{(2n+5)}\Big\}, \tag{26}$$

$n = 2,3,\dots$

Обратим внимание на то, что уравнения (26) не содержат величин $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$. т.е. представляют собой замкнутую систему уравнений относительно параметров $\alpha_2(t), \alpha_3(t), \dots$. При этом функция Φ , определенная соотношением (6), является функцией Ляпунова для системы (26).

Из (20), (22), (25) следует, что

$$d\alpha_1/dt = O(\varepsilon) \tag{27}$$

Из соотношения (27) вытекает, что при достаточно малых ε характерное время существенного изменения коэффициента $\alpha_1(t)$ будет значительно большим, чем время, при котором начнут ска-

2) Одновременно следует переопределить z , положив

$$z = th\,\mu(x - c_s\tilde{M}t) .$$

зываться члены, отброшенные в уравнениях (1)-(3).

Таким образом, в пределах принятой точности можно считать, что электрозвуковой солитон достаточно малой амплитуды является устойчивым по отношению к малым возмущениям.

Л и т е р а т у р а

1. В.Ц.Гурович, В.И.Карпман. ЖЭТФ (в печати).

2. И.Г.Малкин. Теория устойчивости движения. Ф.М. 1966.