

24027

23

577

Д 08
437

+ v

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт

исит

В.И.Карпман, Е.М.Крушкаль

О модулированных волнах в нелинейных
диспергирующих средах

Новосибирск
1968

1. Основные уравнения

В работах Уитэма /1,2/ был развит общий метод усредненного описания нестационарных волн в нелинейных диспергирующих средах. Этот метод применим в тех случаях, когда нестационарную волну можно с достаточной точностью представить как квазистационарную, с медленно меняющимися в пространстве и во времени амплитудой, длиной волны и т.д.

Как известно, существование нелинейных стационарных волн (под последними мы понимаем волны, где все колеблющиеся величины являются функциями только от $x - Vt$), возможно только благодаря взаимодействию нелинейных и дисперсионных эффектов (например, в обычной газодинамике точные стационарные решения уравнений Эйлера не существуют). В случае периодической стационарной волны с длиной волны λ удобно ввести фазу колебаний $\theta = kx - \omega t$, где $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kV$; тогда все осциллирующие величины могут быть представлены как периодические функции фазы θ (с периодом 2π). При этом частота нелинейной волны ω зависит не только от волнового числа k , но и от других величин, которые в линейном приближении считаются малыми (например, от амплитуды волны a и т.д.). Эту зависимость обычно нетрудно найти, рассматривая периодические решения полной системы уравнений, зависящие от x и t только через фазу $\theta = kx - \omega t$. В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда частота ω зависит только от одного нелинейного параметра - амплитуды a . Такую зависимость

$$\omega = \omega(k^2, a^2)$$

(1.1)

(среда, для простоты, предполагается изотропной) мы будем называть нелинейным дисперсионным уравнением. При этом мы будем рассматривать волны достаточно малой (но конечной) амплитуды так, чтобы можно было ограничиться двумя первыми членами разложения дисперсионного уравнения (1.1) по степеням a^2 , т.е.

$$\omega \approx \omega^0(k^2) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 a^2 \quad (1.2)$$

где $\omega^0(k^2)$ определяет закон дисперсии в линейном приближении.

В настоящей статье исследуются модуляционные процессы в нелинейных нестационарных волнах, где амплитуда, длина волны и т.д. изменяются достаточно медленно на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода колебаний. При этом основные интересующие нас вопросы будут относиться к той области, где "адиабатическое" приближение Уитэма-Лайт-хилла [1-3] становится неприменимым. Прежде всего заметим, что в случае, когда можно пренебречь нелинейными членами более высокого порядка чем a^2 , основные уравнения для медленно меняющихся величин в "адиабатическом" приближении можно получить исходя не из общего формализма Уитэма, а из более элементарного метода эйконала (см., напр., [4]).

Рассмотрим, например, волну, мало отличающуюся от стационарной (последняя имеет параметры ω_0, k_0, a_0 , удовлетворяющие дисперсионному уравнению (1.1)). Тогда фазу волны можно представить в виде

$$\theta(\vec{z}, t) = k_0 x - \omega_0 t + \varphi(\vec{z}, t) \quad (1.3)$$

где $\varphi(\vec{z}, t)$ - добавка к фазе, обусловленная нестационарностью. Полагая в уравнении (1.2)

$$\begin{aligned} \omega(\vec{z}, t) &= -\theta_t = \omega_0 - \varphi_t, \\ \vec{k}(\vec{z}, t) &= \vec{\nabla} \theta(\vec{z}, t) = \vec{k}_0 + \vec{\nabla} \varphi(\vec{z}, t), \\ a &= a(\vec{z}, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

и ограничиваясь членами второго порядка по $a, \vec{\nabla} \varphi/k_0$,

получим

$$\varphi_t + u_0 \varphi_x + 1/2 u_0' \varphi_x^2 + \frac{u_0}{2k_0} (\vec{\nabla}_\perp \varphi)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 (a^2 - a_0^2) = 0 \quad (1.5)$$

где

$$u_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0, a=0}, \quad u_0' = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k=k_0, a=0} \quad (1.6)$$

В качестве второго уравнения мы возьмем уравнение переноса энергии, которое можно написать в виде

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}_E a^2) = 0 \quad , \quad \text{В нашем приближении для скорости переноса энергии } u_E \text{ мы можем принять}$$

$$u_E(k, a^2) \approx u_E(k, 0) = \partial \omega(k, 0) / \partial k,$$

т.е. считать её равной групповой скорости в линейном приближении (вообще говоря, эти две скорости различны [13]). При этом нужно учесть, что \vec{k} определяется выражением (1.4).

В результате, с принятой степенью точности получаем

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial a^2}{\partial x} + u_0' \frac{\partial (\varphi_x a^2)}{\partial x} + \frac{u_0}{k_0} \vec{\nabla}_\perp (\vec{\nabla}_\perp \varphi a^2) = 0 \quad (1.7)$$

где u_0, u_0' определены в (1.6).

Система уравнений (1.5), (1.7) полностью определяет эволюцию величин $a(\vec{z}, t), \varphi(\vec{z}, t)$. Нетрудно показать, что она эквивалентна соответствующим уравнениям для волн малой амплитуды, полученным Лайтхиллом /3/, который исходил из общего формализма Уитэма.

В одномерном случае, когда все величины зависят только от x, t , удобно перейти к новым переменным

$$\xi = x - u_0 t, \quad \tau = u_0' t \quad (1.8)$$

(ξ - координата в системе отсчета, движущейся с "невозможной" групповой скоростью u_0). Тогда уравнения (1.5), (1.7) принимают вид

$$\varphi_\tau + \frac{1}{2} \varphi_\xi^2 + \frac{1}{u_0'} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 (a^2 - a_0^2) = 0, \quad (1.9)$$

$$(a^2)_\tau + (a^2 \varphi_\xi)_\xi = 0,$$

совпадающий с гидродинамическими уравнениями, где $\varphi(\xi, \tau)$ - потенциал скоростей, роль плотности играет величина a^2 , "адиабатическая сжимаемость" определяется выражением:

$$\alpha = - \frac{a_0^2}{u_0'} \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right)_0 \quad (1.10)$$

и квадрат скорости "звука" равен $C_s^2 = -\alpha$. Отсюда следует, что для устойчивости плоской волны относительно малых изменений фазы и амплитуды необходимо, чтобы величина C_s^2 была положительной, т.е. $\alpha < 0$. В противном случае рассматриваемая плоская волна будет неустойчивой. Этот результат был

впервые получен Лайтхиллом /3/. Замечательно, что для применения этого критерия устойчивости нужно знать только нелинейное дисперсионное уравнение в виде (1.2).

Очевидно, что в случае неустойчивости ($\alpha > 0$) уравнения (1.9) становятся неприменимыми, вообще говоря, уже при небольших значениях τ и для правильного описания нестационарных процессов их следует дополнить членами, содержащими производные более высокого порядка от медленно изменяющихся величин, которые были опущены при выводе уравнений (1.9) (и которые, соответственно, опускаются в "адиабатическом" приближении Уитэма). Следует также отметить, что уравнения (1.9) становятся неприменимыми при достаточно больших τ и в случае, когда величина $C_s^2 = -\alpha$ положительна, поскольку нелинейное укрупнение профиля волны приводит к образованию "ударных волн" /1,5/. Появление больших градиентов в этом случае также требует учёта членов со старшими производными. Эти члены проще всего получить следующим образом.

Рассмотрим величину $\Phi = \psi(\vec{z}, t) \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)]$,

где

$$\psi(\vec{z}, t) = a(\vec{z}, t) \exp [i\varphi(\vec{z}, t)] \quad (1.11)$$

Действительная часть Φ описывает рассматриваемые волны в случае достаточно малых амплитуд. В линейном приближении величина Φ удовлетворяет уравнению

$$[\hat{k}^2 - F_0(\hat{\omega})] \Phi = 0, \quad (1.12)$$

где $\hat{k} = i\nabla$, $\hat{\omega} = -i\partial/\partial t$, а $k^2 = F_0(\omega)$ — закон дисперсии в линейном приближении (т.е. функция $F_0(\omega)$ обратна $\omega^0(k^2)$ в уравнении (1.2). Если комплексная амплитуда (1.11) изменяется достаточно медленно, то можно написать

$$F_0(\hat{\omega})\psi = \left[F_0(\omega_0)\psi + iF_0'(\omega_0)\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}F_0''(\omega_0)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \dots \right] \exp[i(k_0x - \omega_0t)], \quad (1.13)$$

где точками обозначены члены с третьей и более высокими производными. Подставляя (1.13) в (1.12) и учитывая, что $k_0^2 = F_0(\omega_0)$, $F_0'(\omega_0) = 2k_0/u_0$, $F_0''(\omega_0) = 2(u_0 - k_0 u_0')/u_0^2 u_0'$, получаем с точностью до членов, содержащих вторые производные по t и x , включительно (в этом приближении можно заменить A_{tt} на $u_0^2 A_{xx}$).

$$2ik_0(\psi_t + u_0\psi_x) + k_0 u_0' \psi_{xx} + u_0 \Delta_{\perp} \psi = 0 \quad (1.14)$$

Подставляя сюда выражение (1.11) и беря действительную часть, получим

$$\psi_t + u_0\psi_x + \frac{1}{2} \left[u_0' \psi_x^2 + \frac{u_0}{k_0} (\nabla_{\perp} \psi)^2 \right] - \frac{u_0'}{2a} a_{xx} - \frac{u_0}{2k_0 a} \Delta_{\perp} a = 0 \quad (1.15)$$

Мнимая часть от (1.14) в точности совпадает с (1.7).

Уравнение (1.15) отличается от (1.5) в двух отношениях. Во-первых — оно не содержит членов, пропорциональных a^2 .

Это связано с тем, что это уравнение получено из линейного уравнения (1.12). Во-вторых, оно содержит вторые производные a по координатам, которые отсутствуют в (1.5). Если бы мы исходили, как и выше, из метода "геометрической оптики", подставив выражения (1.4) в линейное дисперсионное уравнение, то мы получили бы уравнение (1.15) без вторых производных. Таким образом, из сопоставления уравнений (1.15) и (1.5) следует, что уравнение для ψ с учетом нелинейных членов порядка a^2 и членов с производными до второго порядка включительно должно иметь вид

$$\psi_t + u_0\psi_x + \frac{1}{2} \left[u_0' \psi_x^2 + \frac{u_0}{k_0} (\nabla_{\perp} \psi)^2 + (\partial\omega/\partial a^2)(a^2 - a_0^2) - (u_0'/2a) a_{xx} - (u_0/2k_0 a) \Delta_{\perp} a \right] = 0 \quad (1.16)$$

Уравнения (1.16) и (1.7), таким образом, составляют полную систему уравнений, содержащих поправочные члены, которые не учитываются в "адиабатическом" приближении Уитэма. При этом члены со вторыми производными могут иметь, вообще говоря, такой же порядок, как и члены порядка a^2 (в случае достаточно больших градиентов^{x)}).

Отметим также, что систему (1.16) и (1.7) можно записать в форме одного уравнения для комплексной амплитуды

x) Разумеется, уравнение (1.16) можно было бы получить методом усреднения, рассмотрев приближение, следующее за адиабатическим, но мы предпочли привести здесь более наглядный вывод, позволяющий более ясно представить физический смысл отдельных членов.

$\psi(\vec{r}, t)$, определенной в (1.11), а именно

$$i\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{u_0'}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{u_0}{2k_0} \Delta_{\perp} \psi + \left(\frac{\partial \omega}{\partial a^2}\right)_0 (|\psi|^2 - |\psi_0|^2) \psi = 0 \quad (1.17)$$

Существенно, что коэффициенты системы (1.16), (1.7) или уравнения (1.17) полностью определяются нелинейным дисперсионным уравнением (1.2). Поэтому волны различной природы можно рассматривать с единой точки зрения. Например, в нелинейной оптике, где выражение для диэлектрической проницаемости имеет вид $\epsilon = \epsilon_0(1 + \epsilon'|E|^2)$, E — напряженность поля, нелинейное дисперсионное уравнение есть

$$\omega = kc/\sqrt{\epsilon} \approx (kc/\epsilon_0) [1 - (\epsilon'/2)|E_0|^2]$$

и уравнение (1.17) превращается в усредненное уравнение для электрического поля, описывающее эффекты самосодуляции и самофокусировки [6,7].

В качестве второго примера рассмотрим модель нелинейного диэлектрика, где связь между поляризацией P и напряженностью поля E определяется уравнениями

$$P_{tt} + \omega_0^2 P - \beta P^3 = (\omega_p^2/4\pi) E, \quad (1.18)$$

$$E_{tt} - c^2 \Delta E = 4\pi P_{tt}$$

(Такая модель обсуждалась в работе [5]). Рассматривая стационарные решения системы (1.18), т.е. считая, что E и P являются периодическими функциями только от $\theta = kx - \omega t$

(с периодом 2π), получаем нелинейное дисперсионное уравнение в виде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\epsilon_0(\omega) + \frac{3\beta\omega_p^6}{8(4\pi)^2(\omega_0^2 - \omega^2)^4} |E_0|^2 + \dots \right] \quad (1.19)$$

$$\epsilon_0(\omega) = 1 - \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Выражая величины (1.6) через производные k^2 по ω и вычисляя их с помощью (1.19), а затем подставляя в (1.16), (1.7), получим уравнения для слабомодулированных волн, совпадающие с основными уравнениями работы [5]. Аналогичным образом получают уравнения для нелинейных модулированных волн и в других средах (плазме, акустике и т.д.). Существенно при этом, что в рассматриваемом приближении эти уравнения имеют вид (1.17), аналогичный соответствующему уравнению нелинейной оптики, что даёт возможность непосредственно перенести на эти среды результаты, полученные в нелинейной оптике (о последних см., напр., обзоры [6,7]).

2. Самомодуляция неустойчивой плоской волны

Рассмотрим волну, модулированную в направлении её распространения (ось x). В переменных (1.8) (т.е. в системе отсчёта, движущейся с групповой скоростью u_0) уравнения (1.16) и (1.7) принимают вид

$$\psi_{\tau} + 1/2 \psi_{\xi}^2 - \alpha(a^2 - a_0^2)/a_0^2 - a_{\xi\xi}/2a = 0$$

$$(a^2)_{\tau} + (\psi_{\xi} a^2)_{\xi} = 0 \quad (2.1)$$

где α — параметр, определенный в (1.10). Если $\alpha < 0$, система (2.1) аналогична уравнениям "гидродинамики с дисперсией".

Роль плотности играет при этом a^2 . Рассмотрим сначала малые колебания амплитуды и фазы, т.е. модуляционные волны, распространяющиеся на "фоне" плоской волны ($a - a_0 \ll a_0$, $\varphi \ll 1$). Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\Omega = (x^2 - 4\alpha)^{1/2} x/2 \quad (2.2)$$

где Ω - частота, а x - волновое число колебаний. При $\alpha < 0$ и не слишком больших $a - a_0$ система (2.1) может быть приведена к уравнению Кортевега-де Вриза

$$v_\tau + (\sqrt{-\alpha} + \frac{3}{2}v)v_{\xi\xi} - \frac{1}{8\sqrt{-\alpha}}v_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (v = \varphi_{\xi\xi}) \quad (2.3)$$

которое исследовалось в ряде работ (см., напр., /9,10/).

Если пренебречь членом с $a_{\xi\xi}$ в первом уравнении (2.1) (что соответствует "адиабатическому" приближению Уитэма), то из (2.1) следует уравнение (2.3) без последнего члена, т.е. уравнение для простой волны. Профиль последней, как известно, при достаточно больших τ становится неоднозначным, в то время как профиль решения уравнения Кортевега-де-Вриза при больших τ распадается на уединенные волны (солитоны)^{х)} и мелко-масштабные осцилляции, которые подробно описаны в /10 б/. Это дает представление о том, что получается вместо ударных волн в случае, когда $\alpha < 0$ (хотя уравнение (2.3) следует из системы (2.1) при условии не слишком больших значений $a - a_0$,

х) В рассматриваемом случае это будут уединенные волны "разрежения", так как коэффициент при $v_{\xi\xi\xi}$ в уравнении (2.3) отрицателен /10 б/.

качественная картина сохраняется и в общем случае).

При $\alpha > 0$ частота Ω становится чисто мнимой при

$$x^2 < x_0^2 = 4\alpha, \quad (2.4)$$

т.е. модуляционные волны с волновыми числами меньшими критического значения x_0 - неустойчивы. Этот результат в нелинейной оптике был получен Беспаловым и Талановым /11/. Для произвольных диспергирующих сред аналогичный результат, как упоминалось выше, был получен впервые Лайтхиллом /3/, исходящим из уравнений, эквивалентных системе (2.1), но без члена с $a_{\xi\xi}$. Если опустить этот член, то вместо (2.2) мы получили бы $\Omega = \sqrt{-\alpha}$, т.е. $x_0 = 0$. Таким образом, учёт члена с $a_{\xi\xi}$ приводит лишь к появлению верхней границы (2.4) для неустойчивой области. Тем не менее, без члена с $a_{\xi\xi}$ невозможно провести корректный анализ развития модуляционной неустойчивости. Качественные результаты этого анализа на основе уравнений (2.1) кратко изложены в сообщении /12/. Ниже этот вопрос будет рассмотрен более подробно. Мы приведем также результаты численного интегрирования, позволяющие представить общую картину при достаточно больших τ .

Будем исходить из системы (2.1), считая, что $\alpha > 0$. Решение этих уравнений, отвечающее плоской волне

$$\phi = a_0 \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)], \quad \text{имеет вид } a = a_0, \quad \varphi = 0.$$

Рассмотрим теперь решение системы (2.1) при начальном условии вида

$$\varphi(\xi, 0) = 0, \quad a(\xi, 0) = a_0 [1 + f(\xi)], \quad (2.5)$$

где $f(\xi)$ — функция, исчезающая при $|\xi| \rightarrow \infty$. Предположим, что $f(\xi)$ достаточно мала, так что начальную эволюцию возмущения можно проследить, исходя из линеаризованных уравнений (2.1). Решение последних при начальном условии (2.5) имеет вид

$$a(\xi, \tau) = a_0 + 1/\pi \int_0^\infty dx A(x) \cos[x\xi - \Omega(x)\tau], \quad (2.6)$$

где $\Omega(x)$ определено в (2.2) и

$$A(x) = a_0 \int_0^\infty f(\xi) \cos(x\xi) d\xi \quad (2.7)$$

(при этом функция $f(\xi)$ в (2.5) для простоты считается четной). Рассмотрим асимптотическое поведение интеграла (2.6) при больших ξ, τ . Мы не будем здесь выписывать громоздкое общее выражение, а ограничимся двумя предельными случаями малых и больших ξ ($\xi \ll x_0\tau$ и $\xi \gg x_0\tau$, где x_0 определено в (2.4)). В первом случае, применяя метод перевала, получим

$$a(\xi, \tau) \approx a_0 + \text{const} \exp(\pm \tau/4) \cos(\sqrt{2x} \xi + \delta), \quad \xi \ll x_0\tau \quad (2.8)$$

где величины const и δ определяются начальными условиями.

х) Область применимости выражения (2.8) ограничивается величиной τ , однако всегда можно выбрать настолько малое возмущение $f(\xi)$, определяющее величину const в (2.8), чтобы второй член оставался достаточно малым даже при $\pm \tau \sim 1$, так что в области ξ , где применимо выражение (2.8), будет укладываться несколько осцилляций с длинами волн порядка $2\pi/x_0$.

При больших $\xi/x_0\tau$ асимптотику выражения (2.6) нетрудно получить, применяя метод стационарной фазы. Основной вклад в интеграл в этом случае вносят области, лежащие в окрестности значений x , удовлетворяющих условию

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{2x^2 - x_0^2}{2\sqrt{x^2 - x_0^2}} = \left| \frac{\xi}{\tau} \right| \quad (2.9)$$

Решения уравнения (2.9) имеют вид

$$x = \left| \xi/\tau \right|, \quad x \approx x_0 \left(1 + x_0^2 \tau^2 / 4\xi^2 \right) \quad (2.10)$$

В результате получаем следующее асимптотическое выражение

$$a(\xi, \tau) \approx a_0 + \text{Re} \left\{ \left(\frac{1}{\pi\tau} \right)^{1/2} A(\xi/\tau) \exp \left[i \left(\xi^2/2\tau - \pi/4 \right) \right] + \left(x_0^3 \tau^2 / 2\pi |\xi|^3 \right)^{1/2} A(x_0) \exp \left[i \left(x_0 \xi + x_0^3 \tau^2 / 4|\xi| + \pi/4 \right) \right] \right\} \quad (2.11)$$

$$(|\xi| \gg x_0\tau)$$

Добавка к a_0 описывает модуляционные волны, распространяющиеся от центра с групповой скоростью, равной, согласно (2.9), ξ/τ .

Итак, общая картина развития модуляции (2.5) в начальной стадии процесса выглядит следующим образом /12/. В центральной области ($|\xi| \ll x_0\tau$) образуются длинноволновые осцилляции амплитуды с волновыми числами $x \sim x_0$. С увеличением τ линейное приближение теряет силу и экспоненциально

менциальный рост амплитуд прекращается. Однако, глубина модуляций в этой области с течением времени увеличивается и она распадается на волновые пакеты. Кроме того, от границ глубоко промодулированной области распространяются модуляционные волны. При достаточно больших ξ , где справедлива асимптотика (2.11), их волновые числа (2.10) становятся больше критического значения. Поэтому они лежат в устойчивой области (см. (2.4)). Модуляционные волны в промежуточной области имеют составляющие с $\chi < \chi_0$ и поэтому неустойчивы: они дают начало новым волновым сгусткам. Таким образом, ширина области, распавшейся на пакеты, увеличивается с ростом τ .

Общий вид профиля при не очень больших τ , когда ширина глубоко промодулированной области еще невелика, выглядит примерно так, как это изображено на рисунке работы [12].

При больших τ процесс самомодуляции исследовался с помощью численного интегрирования исходных уравнений (краткое описание см. в Приложении). Для начального возмущения $f(\xi)$ в (2.5) было принято выражение

$$f(\xi) = \gamma \exp(-\xi^2/l^2) \quad (2.13)$$

Профиль решения, изображенного на приводимом здесь рисунке, соответствует следующим значениям параметров $a_0 = 1$, $\gamma = 1$,

$$\chi_0 l = 2 \alpha^{1/2} l = 2, \quad \alpha = 36, \quad \tau = 0,4^x.$$

При увеличении τ

х) Все решения с одинаковыми значениями параметров $\chi_0 l$ и γ являются подобными (при одном и том же виде $f(\xi)$).

ширина промодулированной области растёт.

Амплитуды пакетов стремятся к стационарным значениям (кроме центрального, имеющего вершину при $\xi = 0$, который заметно пульсирует). Минимумы с течением времени уменьшаются. Расстояния между пакетами очень медленно (по сравнению со скоростью расширения области модуляции) увеличиваются. Наиболее интересным фактом является то, что профили пакетов с достаточно установившимися амплитудами A довольно хорошо описываются выражением

$$a = A \operatorname{sech} \left[\frac{A \sqrt{\alpha}}{a_0} (\xi - \xi_0) \right] \quad (2.14)$$

В качестве иллюстрации мы приводим таблицу, где сопоставлены данные, полученные в результате численного интегрирования и вычисленные по формуле (2.14) для третьего и четвертого пакетов (пакет, имеющий вершину при $\xi = 0$, считается первым).

Как известно [13,6,7], формула (2.14) вместе с выражением для фазы

$$\varphi = \alpha (2A/a_0^2 - 1) \tau + \text{const} \quad (2.15)$$

представляет собой точное решение уравнений (2.1), описывающее стационарный волновой пакет, неподвижный в рассматриваемой системе отсчета (т.е. движущийся с групповой скоростью

U_0 относительно среды). По аналогии с уединенными волнами, которые могут распространяться в нелинейных диспергирующих средах [9,10], эти пакеты можно называть солитонами (огигаю-

ших). Таким образом, обсуждаемое численное решение показывает, что в том случае, когда исходная плоская волна неустойчива ($\alpha > 0$), малые возмущения приводят к её распаду на солитоны (2.14), (2.15). Хотя расстояния между отдельными пакетами, изображенными на рисунке, увеличиваются весьма медленно, "солитоноподобная" форма отдельных пакетов устанавливается достаточно быстро (разумеется, в окрестности минимумов отклонения от формулы (2.14) становятся значительными).

Далее, интересно отметить довольно четкое разделение "солитонов" на большие и меньшие, что хорошо видно на рисунке. Амплитуды "больших" солитонов у нас имеют величину $A \approx 2,1$, у меньших $A \approx 1,7$. Численное интегрирование проводилось до $\tau = 1$. При этом амплитуды сформировавшихся солитонов остаются с большой точностью постоянными во времени, а число их быстро возрастает за счёт расширения возмущенной области (см. рисунок, где представлено решение при $\tau = 0,4$, и таблицу 2а, содержащую значения максимумов и минимумов $a(\xi, \tau)$ в достаточно промодулированной области при $\tau = 0,9$).

Фаза (2.15) в пределах протяженности отдельных солитонов оказывается примерно постоянной (при данном τ). Однако, на границе между двумя солитонами фаза довольно резко изменяется. Таким образом, при фиксированном τ фазу в общем можно представить как ступеньчатую функцию ξ .

Примечательно, что при начальном возмущении вида

$$f(\xi) = \alpha \operatorname{sech}(\xi/l) \quad (2.16)$$

амплитуды солитонов получаются примерно такими же, что и для случая (2.13) (см. табл. 2б). Таким образом, структура квазистационарной области, где солитоны уже в основном сформировались, по-видимому, не зависит от детального вида начального возмущения.

Рассмотрим, наконец, устойчивость изложенной здесь картины по отношению к возмущениям, перпендикулярным направлению распространения волны. В этом случае из уравнений (1.16), (1.7) вытекает следующий критерий устойчивости: $(\partial\omega/\partial a^2) > 0$ (в противном случае поперечные возмущения приведут к эффектам самофокусировки [6,7,13]). Сопоставляя это с выражением для (1.10), получаем, что для того, чтобы волна распадалась на солитоны (2.14) и в то же время была устойчивой по отношению к самофокусировке, необходимо выполнение условий

$$u'_0 = (\partial^2\omega/\partial k^2)_{a=0} < 0, \quad (\partial\omega/\partial a^2)_{a=0} > 0 \quad (2.17)$$

Если $(\partial\omega/\partial a^2)_0 < 0$, то неустойчивость по отношению к поперечным возмущениям приводит к распаду волны на "нити". Однако размеры этих нитей, а также динамика процесса распада не могут быть изучены на основе приближенного уравнения (1.17) из-за эффекта "схлопывания", который подробно рассмотрен в указанных выше обзорах по самофокусировке в нелинейной оптике [6,7] (см. также [14]). Если, однако, исходить из более точного уравнения, чем (1.17), а именно, учесть следующие члены разложения нелинейного дисперсионного уравнения (1.1) по степеням a^2 , то размеры нитей оказываются

конечными и схлопывания не получается. Если при этом выполняется условие $u'_0 > 0$, то, как следует из результатов настоящей работы, нити должны распадаться на волновые сгустки, качественно подобные рассмотренным выше.

В заключение пользуемся возможностью поблагодарить В.И.Таланова за полезное обсуждение.

Приложение

При численном счёте удобно исходить из уравнения для комплексной амплитуды

$$i\psi_\tau + 1/2 \psi_{\xi\xi} + \alpha (|\psi|^2/|\psi_0|^2 - 1)\psi = 0, \quad (\text{П.1})$$

эквивалентного системе (2.1). Это уравнение решалось по явной разностной схеме (см., напр., /15/). В качестве граничного условия было принято $\psi(\xi) = \psi(\xi + 2L)$, $-L \leq \xi \leq L$, где $2L$ размер области интегрирования. Чтобы граничные условия не влияли на характер решения, величина L должна быть значительно больше размера возмущенной области. Расчёты проводились при $L = 20$ и $L = 40$. Полное совпадение решений для обоих случаев свидетельствовало о том, что влияние границ отсутствует.

Ход счёта контролировался сохранением энергии

$$E = \int_{-L}^L |\psi|^2 d\xi$$

; малость ошибок округления проверялась по сохранению симметрии решения относительно точки $\xi = 0$ в интервале $-L \leq \xi \leq L$. Результаты, изображенные на ри -

сунке, были получены при следующих значениях шагов

$\Delta\tau = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $\Delta\xi = 0,01$. Уменьшение шага по времени $\Delta\tau$ в два раза не изменяло характера решения.

Таблица 1

Сравнение численных значений $a(\xi, \tau)$ с вычисленными ($a_{\text{выч}}$) по ф-ле (2.14).

$A = 1.73, \xi_0 = 1.59$			$A = 2.07, \xi_0 = 2.26$		
ξ	$a_{\text{числ.}}$	$a_{\text{выч.}}$	ξ	$a_{\text{числ.}}$	$a_{\text{выч.}}$
0.06	1.46	1.44	0.05	1.72	1.72
0.1	1.15	1.1	0.1	1.07	1.10
0.12	1.0	0.92	0.12	0.84	0.89
0.15	0.8	0.7	0.15	0.58	0.62

Таблица II.

Значения максимумов и минимумов в квазистационарной области

а) $f(\xi) = \exp(-\xi^2/\ell^2)$; $\tau = 0,9$.

ξ	0	0.61	0.86	1.12	1.78	2.32	2.6	2.88	3.34	3.75	4.05	4.35	4.71	5.05	5.36	5.66	5.95	6.26
a_{max}	1.97		2.11	1.71		2.04		0.10	1.77		1.98		1.82	1.89			1.88	
a_{min}		0.07	0.02		0.16					0.21		0.11		0.26		0.08		0.23

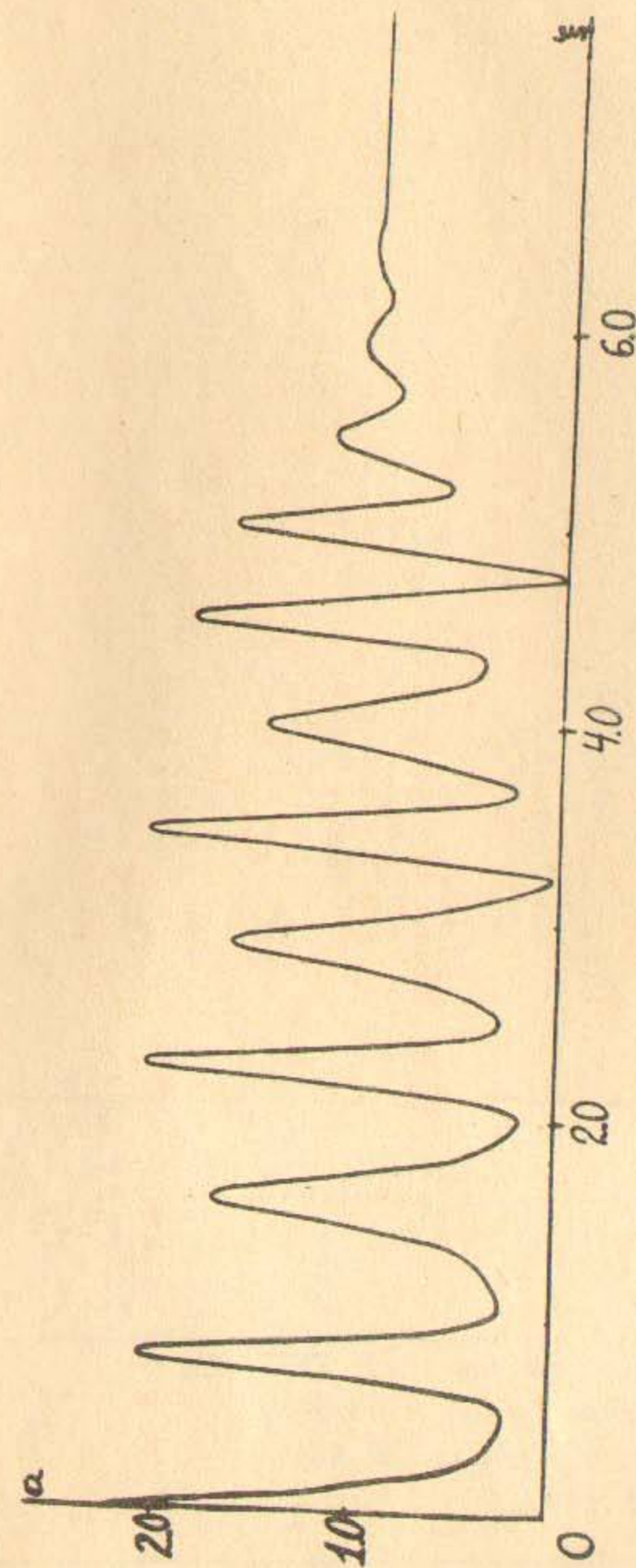
б) $f(\xi) = \operatorname{sech}(\xi/\ell)$; $\tau = 0,5$.

ξ	0	0.68	1.03	1.27	1.63	1.87	2.10	2.58	2.97	3.2	3.43	3.81	4.16	4.37	4.57	4.9	5.23
a_{max}		1.73		2.29		2.21	1.65			2.14		1.58		2.17		1.43	
a_{min}	0.26		0.31		0.03		0.09		0.09		0.24		0.08		0.21		0.44

Л и т е р а т у р а

1. G.B. Whitham, Proc. Roy. Soc. A, 283, 238, 1965.
2. G.B. Whitham, J. Fluid Mech., 22, 273, 1965.
3. M. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl., 1, 269, 1965; Proc. Roy. Soc. A, 299, 28, 1967.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля, Наука, 1967.
5. Л.А. Островский, ЖЭТФ, 51, 1189, 1966.
6. В.И. Беспалов, А.Г. Литвак, В.И. Таланов, Самовоздействие электромагнитных волн в кубичных изотопных средах. Труды Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике, Новосибирск, 1966.
7. С.А. Ахманов, А.П. Сухоруков, Р.В. Хохлов, УФН, 93, 19, 1967.
8. D. J. Kortweg, G. de Vries, Phil. Mag. (5), 39, 422, 1895.
9. C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095, 1967.
- 10а. V. I. Karpman, Physics Lett, 25A, 708, 1967
- 10б. В.И. Карпман, В.П. Соколов, ЖЭТФ (в печати); Ю.А. Березин, В.И. Карпман, ЖЭТФ, 51, 1557, 1966.
11. В.И. Беспалов, В.И. Таланов, Письма в ЖЭТФ 3, 471, 1966.
12. В.И. Карпман, Письма ЖЭТФ 6, 829, 1967.

13. R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes,
Phys. Rev. Lett, 13, 479, 1964.
14. В.И.Захаров, ЖЭТФ 53, 1935, 1967.
15. С.К.Годунов, В.С.Рябенский, Введение в теорию разност-
ных схем, Москва, 1962.



Ответственный за выпуск Е.М. КРУШКАЛЬ
Подписано к печати 18.I. 1968 года
Условн. I печ. л., тираж 150 экз.
Заказ № 178. Бесплатно

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР