

21

68
621

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт

В.И.Карпман, В. П. Соколов

О солитонах и собственных значениях
уравнения Шредингера

Новосибирск
1968

11 АПР 1968

1096

В.И.Карпман, В.П.Соколов

О СОЛИТОНАХ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ
ШРЕДИНГЕРА

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются некоторые закономерности образования стационарных уединенных волн (солитонов) в нелинейных диспергирующих средах, где волновые процессы описываются уравнением Кортевега-де Вриза (1.1).

Развитый в работе способ определения амплитуд солитонов можно использовать также в качестве довольно эффективного приближенного метода вычисления уровней энергии в одномерной потенциальной яме с потенциалом (4.1), удовлетворяющим условиям (4.2). В предельном случае большого числа уровней этот метод приводит к результатам квазиклассической теории.

Рассмотрено также асимптотическое решение уравнения Кортевега-де Вриза при малых значениях параметра β (или больших числах подобия \mathcal{B} (1.4)),

Δ 68
621

279 ¹/₆₈
КНИЖКА СВЯТОГО СВЯТЫХ
Гос. Публ. Науч.-техн.
Библиотека

Сверено
1989 г.

СВЕРЕНО

Сверено
2000 г.

Введение

В работах /1,2/ были исследованы некоторые общие закономерности эволюции нелинейных волн в диспергирующих средах, описываемых уравнением Кортевега-де Вриза.

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

(там же приведена библиография, включающая работы, где это уравнение получено для ряда диспергирующих сред).

Из результатов работ /1,2/ вытекает, что в общем случае начальное возмущение, которое мы будем записывать в виде

$$u(x, 0) = u_0 \varphi\left(\frac{x}{l}\right), \quad (1.2)$$

(где $\varphi(\xi)$ - безразмерная функция, а u_0 и l - характерные амплитуда и ширина возмущения), распадается при достаточно больших значениях t на совокупность стационарных уединенных волн (солитонов) и "несолитонный хвост", имеющий вид волнового пакета, расплывающегося с течением времени (см. рисунки к работе /2/). Уравнение солитона имеет вид

$$u_s(x, t) = u_s(x - vt), \quad \text{где}$$
$$u_s(x) = a \operatorname{sech}^2\left[\left(\frac{a}{12\beta}\right)^{1/2}(x - x_0)\right], \quad v = \frac{a}{3}. \quad (1.3)$$

(не нарушая общности, мы можем всюду в дальнейшем предполагать, что $\beta > 0$ /2/). Таким образом, солитоны движутся в положительном направлении со скоростями, пропорциональными амплитудам, "хвосты" же, наоборот, смещаются в обратную сто-

рону (подробнее об этом см. в /2/). Существенно также, что все решения уравнения Кортевега-де Вриза с одинаковыми начальными профилями $\Psi(\xi)$ (см. (1.2)) и одним и тем же значением безразмерного параметра подобия β

$$\beta = \ell \left(\frac{u_0}{\beta} \right)^{1/2} \quad (1.4)$$

являются подобными /2/. Таким образом, число солитонов, образующихся из начального возмущения, их скорости и т.д., однозначно определяются при одной и той же функции $\Psi(\xi)$ величиной β . Анализ численных экспериментов, проведенных в /2/, позволил высказать гипотезу о том, если профиль $\Psi(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$\Psi(\xi) > 0, \quad \Psi(\xi) \rightarrow 0 \quad (|\xi| \rightarrow \infty) \quad (1.5)$$

(вопроса о скорости убывания $\Psi(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ мы коснемся в п.3) и значение параметра подобия β больше некоторого критического значения β_c , определенного в /2/, то начальное возмущение (1.2) практически полностью распадается на солитоны, амплитуды которых можно определить из законов сохранения, отвечающих уравнению (1.1).

Кроме "обычных" законов сохранения импульса $S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx$ и энергии $S_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x,t) dx$ из уравнения Кортевега-де Вриза вытекает существование целого ряда других законов сохранения (в работе /3/, например, было приведено восемь сохраняющихся величин), что приводит к весьма естественному предположению о том, что число не-

тривиальных законов сохранения, вытекающих из уравнения (1.1) вообще неограниченно. (Это допущение существенно использовалось в /2/. Его строгое доказательство дано недавно в работе /4/. Там же приведена таблица первых десяти сохраняющихся величин, имеющих, вообще говоря, весьма громоздкий вид). Как и в работе /2/, мы будем обозначать сохраняющиеся величины ("интегралы движения") через S_m . Тогда

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial P_m}{\partial x} = 0, \quad S_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m[u(x,t)] dx \quad (1.6)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

В настоящей работе, как и в /2/, мы будем использовать лишь самые общие свойства плотностей сохраняющихся величин $Q_m[u]$. В общем случае $Q_m[u]$ имеет вид полинома от u , β и производных u_x , u_{xx} , ... (производные u_t можно исключить с помощью (1.1)). Если расположить члены $Q_m[u]$ в порядке возрастания степеней β , то член, не содержащий β пропорционален u^m (пользуясь тем, что $Q_m[u]$ в (1.6) определяется с точностью до постоянного множителя, удобно писать этот член в виде $\frac{u^m}{m}$; далее величина $Q_m[u]$ содержит члены с β^k ($k \leq m-2$) (в частности, упоминавшиеся выше первые две сохраняющиеся величины - импульс и энергия вообще не содержат β). Коэффициенты при β^k в общем случае имеют вид весьма громоздких полиномов от u , u_x , u_{xx} , ..., "грубую" структуру

которых можно установить из соображений размерности. Мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе. Отметим лишь, что, как нетрудно убедиться, коэффициент при β должен состоять только из одного члена $u_x^2 u^{m-3}$. Можно показать также, что численный коэффициент при этом члене имеет вид $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, так что в том случае, когда величина β в уравнении (1.1) является малым параметром, можно написать

$$Q_m[u] = \frac{u^m}{m} - \beta \frac{(m-1)(m-2)}{2} u_x^2 u^{m-3} + O(\beta^2) \quad (1.7)$$

(в дальнейшем эта формула нам будет полезна и при не очень малых β). Что касается "поточков" P_m в (1.6), то они нам не понадобятся, и на них мы останавливаться не будем.

Предположим теперь, что начальное возмущение (1.2), удовлетворяющее условиям (1.5), практически полностью распадается на N солитонов¹⁾. Тогда из законов сохранения для первых N инвариантов вытекает следующая система уравнений для амплитуд солитонов a_r : ($r = 1, 2, \dots, N$) /2/

$$\sum_{r=1}^N \left(\frac{a_r}{u_0} \right)^{(2m-1)/2} = \frac{\sigma}{\sqrt{12}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\xi, 0) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} q_m(\xi) d\xi} \quad (1.8)$$

1) Более точно это означает, что вкладом "хвостов" по крайней мере в первые N инвариантов S_m можно пренебречь.

$$m = 1, 2, \dots, N; \quad N \geq 2$$

Здесь u_0 - амплитуда первоначального возмущения (1.2), σ - параметр подобия (1.4), а $Q_m(\xi, 0)$, $q_m(\xi)$ - плотности сохраняющихся величин для начального возмущения (1.2) и солитона (1.3), где все величины подставлены в безразмерном виде:

$$Q(\xi, 0) = Q_m[u] \Big|_{u=\psi(\xi)}, \quad \beta = \sigma^{-2} \quad (1.9)$$

$$q_m(\xi) = Q_m[u] \Big|_{u=\text{sech}^2(\xi)}, \quad \beta = \sigma_s^{-2} = \frac{1}{12} \quad (1.10)$$

($\sigma_s = \sqrt{12}$ - значение параметра подобия, отвечающее солитону; оно одинаково для всех солитонов /2/).

В частности, из формул (1.7), (1.9) вытекает соотношение

$$Q_m(\xi, 0) = \frac{\psi^m(\xi)}{m} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{(m-1)(m-2)}{2} \psi_\xi^2 \psi^{m-3} + O(\sigma^{-4}) \quad (1.11)$$

которое может рассматриваться как асимптотическое выражение для $Q_m(\xi, 0)$ при больших σ (но не обязательно малых β)²⁾.

Как уже отмечалось, численные решения уравнения Кортевега-де Вриза (1.1) при ряде конкретных начальных возмущений, удовлетворяющих условиям (1.5), распались на солитоны ("хвосты" были на уровне фона), причем амплитуды этих солитонов

2) При $m \leq 3$ формула (1.11) является точной.

удовлетворяли соотношениям (1.8). К сожалению, анализ численных решений, проведенный в /2/, весьма ограничивался трудностями решения системы (1.8).

В этом сообщении мы приводим общий эффективный метод решения системы (1.8), который позволил существенно упростить и расширить анализ численных экспериментов и подтвердить упомянутую выше гипотезу, высказанную в /2/ (п.2).

Во-вторых, мы рассматриваем асимптотическое решение системы (1.8) при больших σ , которое, как показано в п.3, можно представить в замкнутой аналитической форме и которое, как будет видно из дальнейшего, полностью определяет асимптотическое решение уравнения Кортевега-де Вриза при больших σ .

Эти вопросы приобрели особый интерес в связи с недавно вышедшей работой /5/, в которой показано, что амплитуды солитонов, образующихся из начального возмущения, определяются дискретными "уровнями энергии" в некоторой потенциальной яме, определяемой начальным условием (1.2). В наших обозначениях соответствующее "уравнение Шредингера" для этих уровней имеет вид

$$\Psi''(\xi) + \frac{\sigma^2}{6} [\Psi(\xi) + E] \Psi(\xi) = 0 \quad (1.12)$$

где $\Psi(\xi)$ - вспомогательная волновая функция, $\Psi(\xi)$ - безразмерный профиль начального возмущения (1.2), а E - "уровень энергии" в потенциальной яме $V(\xi) = -\Psi(\xi)$ (роль величины $\frac{\hbar^2 m}{k^2}$ играет при этом параметр $\frac{\sigma^2}{6}$).

Сопоставляя результаты работ /5,6/, нетрудно убедиться, что амплитуды солитонов a_n связаны с уровнями энергии дискретного спектра соотношением

$$\frac{a_n}{u_0} = -2E_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.13)$$

где u_0 - амплитуда начального возмущения (1.2)³⁾. Таким образом, встает вопрос о связи между решениями системы уравнений (1.8) и уровнями энергии в потенциальной яме $V = -\Psi(\xi)$. Из результатов, полученных в п.п.2,3, вытекает довольно простой и несколько неожиданный приближенный способ вычисления уровней энергии в одномерной потенциальной яме $V = -\Psi(\xi)$ при условиях (1.5). Этот метод суммирован в п.4.

2. Определение амплитуд солитонов из системы (1.8) и анализ численных экспериментов

Введем обозначения

$$\left(\frac{a_n}{u_0}\right)^{1/2} = y_n, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{12}} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\xi, 0) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} q_m(\xi) d\xi} = S_{2m-1} \quad (2.1)$$

3) Удобно определить u_0 таким образом, чтобы наибольший из максимумов $\Psi(\xi)$ равнялся единице.

Тогда система уравнений (1.8) принимает вид

$$\sum_{r=1}^N y_r^{2m-1} = S_{2m-1} \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

$$m = 1, 2, \dots, N \quad (N \geq 2)$$

(О случае, когда образуется один солитон см. в конце этого п.).

Введем обозначения

$$G_1 = y_1 + \dots + y_N, \quad G_2 = y_1 y_2 + \dots + y_{N-1} y_N, \dots \quad (2.3)$$

$$G_{N-1} = y_1 y_2 \dots y_{N-1} + \dots + y_2 y_3 \dots y_N, \quad G_N = y_1 y_2 \dots y_N$$

Очевидно искомые величины y_1, \dots, y_N являются корнями одного алгебраического уравнения

$$y^N - G_1 y^{N-1} + G_2 y^{N-2} + \dots + (-1)^N G_N = 0 \quad (2.4)$$

Оказывается, что коэффициенты G_i этого уравнения можно выразить через правые части S_{2i-1} уравнений (2.2), решив некоторую систему линейных уравнений. Алгоритм построения этой линейной системы изложен в Приложении. (См. формулы (п.3) - (п.5)). В простейшем случае $N=2$ система (2.2) имеет элементарное аналитическое решение (анализ этого случая был проведен в /2/), а при $N > 2$ оно без труда решается стандартными численными методами.

Решив уравнение (2.4), мы найдем его корни как функции параметра G (при фиксированном профиле начального возмущения $\Psi(\xi)$, определяющего $\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\xi, 0) d\xi$ в (2.1)). Вообще говоря, при произвольном G часть этих корней может оказаться комплексными или отрицательными, что недопустимо (поскольку при выводе системы (1.8) все квадратные корни подразумевались в арифметическом смысле /2/).

Для того, чтобы начальное возмущение распалось на N солитонов при данном G , необходимо⁴⁾ чтобы все корни уравнения (2.4) при этом G были положительными.

В качестве примера мы рассмотрим вещественные неотрицательные корни уравнений (2.4) при $2 \leq N \leq 6$ в случае, когда начальный профиль определяется функцией

$$\Psi(\xi) = e^{-\xi^2} \quad (2.5)$$

Правые части системы (2.2) мы вычисляли исходя из (1.9), (1.10), используя явные выражения для первых шести интегралов движения, приведенные в /3/. Следует, однако, отметить, что, как показывают простые оценки, точность вычислений практически не ухудшится, если вычислять величины $Q_m(\xi, 0)$ в (2.1) исходя из асимптотических формул (1.11) (существенно более простых, чем точные выражения); точность вычислений при этом

4) Но вообще говоря недостаточно (подробнее об этом см. ниже).

увеличивается с увеличением N 5). Что касается знаменателей в правых частях системы (2.2), то их следует вычислять исходя из точных выражений для $Q_m[u]$, подставленных в (1.10), поскольку при условиях, указанных в (1.10), вклад всех членов в $Q_m[u]$ одного порядка). При этом замечательно, что из общих свойств сохраняющихся величин вытекает следующая простая формула (впервые полученная в [7]).

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_m(\xi) d\xi = \frac{2^m [(m-1)!]^2}{(2m-1)!} \quad (2.6)$$

где $q_m(\xi)$ определяется согласно (1.10). Результаты расчетов приведены на рис.1. Соответствующие корни системы (1.8) $\eta_i = \frac{a_i}{u_0}$ при данном σ определяются точками пересечения вертикальной прямой, имеющей абсциссу, равную σ , с кривыми этого рисунка, полученными методом, изложенным выше.

Обозначим через Δ_n тот интервал значений σ , где все корни системы (2.2) при $N = n$ вещественны и неотрицательны. Нетрудно видеть, что интервал Δ_n начинается внутри интервала Δ_{n-1} . Действительно, обозначив начало интервала Δ_n через

5) Это связано с тем обстоятельством, что чем больше N , тем большее σ нужно взять, чтобы система (2.2) имела неотрицательное решение (см., напр., рис.1, а также формулу (3.10)). С другой стороны, при $N = 2, 3$ в систему (2.2) входят $Q_m(\xi, 0)$ с $m \leq 3$, для которых выражение (1.11) является точным.

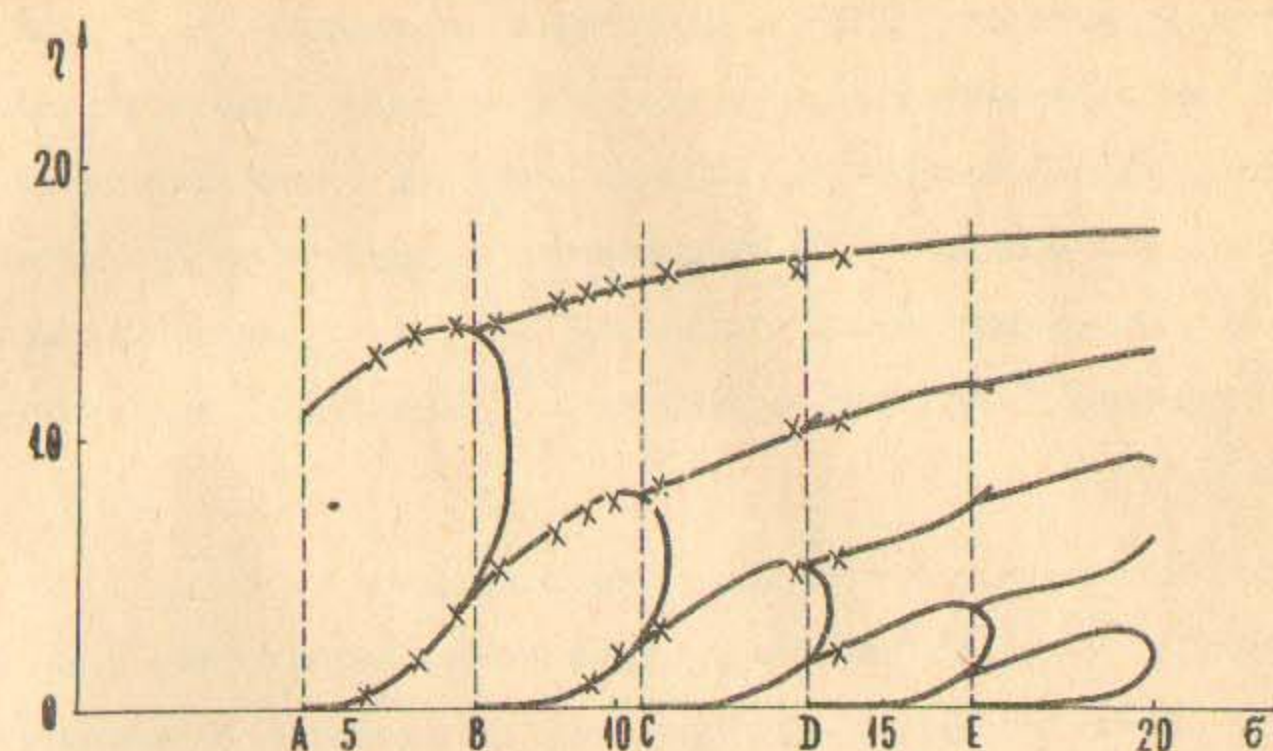


Рис.1

σ_n , получим $y_1(\sigma_n) = 0$, $y_i(\sigma_n) > 0$ ($i > 1$). Но тогда, $y_2(\sigma_n), \dots, y_n(\sigma_n)$ являются положительными корнями системы (2.2) при $N = n - 1$ и, следовательно, σ_n лежит в интервале Δ_{n-1} . Численный эксперимент показывает, что границы, определяющие области значений σ с числом солитонов, отличающимся на единицу, должны лежать в точках σ_n , т.е. у оснований пунктирных прямых на рис.1. Для иллюстрации на рис.1 нанесены крестиками безразмерные амплитуды солитонов $\eta = \frac{a}{u_0}$, получающихся из начального возмущения. Эти амплитуды найдены путем численного решения уравнения Кортевега-де Вриза при на-

чальном условии (2.5) и различных значениях σ . Мы видим, что "экспериментальные точки" (крестики) вполне удовлетворительно укладываются на кривые рисунка 1, что свидетельствует о том, что при распаде начального возмущения (удовлетворяющего указанным выше условиям) на N солитонов, вкладом не-солитонных "хвостов" в первые N инвариантов можно пренебречь⁶⁾.

Этот результат справедлив для всех $\sigma \geq \sigma_c$, где σ_c - абсцисса точки на рис.1 (аналитическое выражение для σ_c см. в [2], ф-ла (3.9)) и, как мы увидим ниже, его точность возрастает с увеличением σ .

На рис.2 сплошной линией изображены корни системы (1.8) как функции σ при $N = 2$ и начальном профиле

$$\psi(\xi) = ch^{-2} \xi \quad (2.7)$$

Пунктирные кривые изображают точные значения амплитуд солитонов, вычисленные по формуле (1.13) (при условии (2.7) уравнение Шредингера (1.12), как известно [8], решается аналитически). Этот рисунок иллюстрирует переход от $N = 2$ к $N = 3$. В окрестности точки $\sigma = 6$ (справа от нее) система (1.8) имеет неотрицательные вещественные корни как при $N = 2$, так и при $N = 3$; однако, только при $N = 3$, корни системы близки к

6) Однако, как показывает непосредственная проверка, $N + 1$ -й закон сохранения в пренебрежении "хвостом", удовлетворяется значительно хуже. Это объясняется тем, что он содержит более высокие производные, которые могут дать существенный вклад благодаря быстроосциллирующему характеру "хвоста".

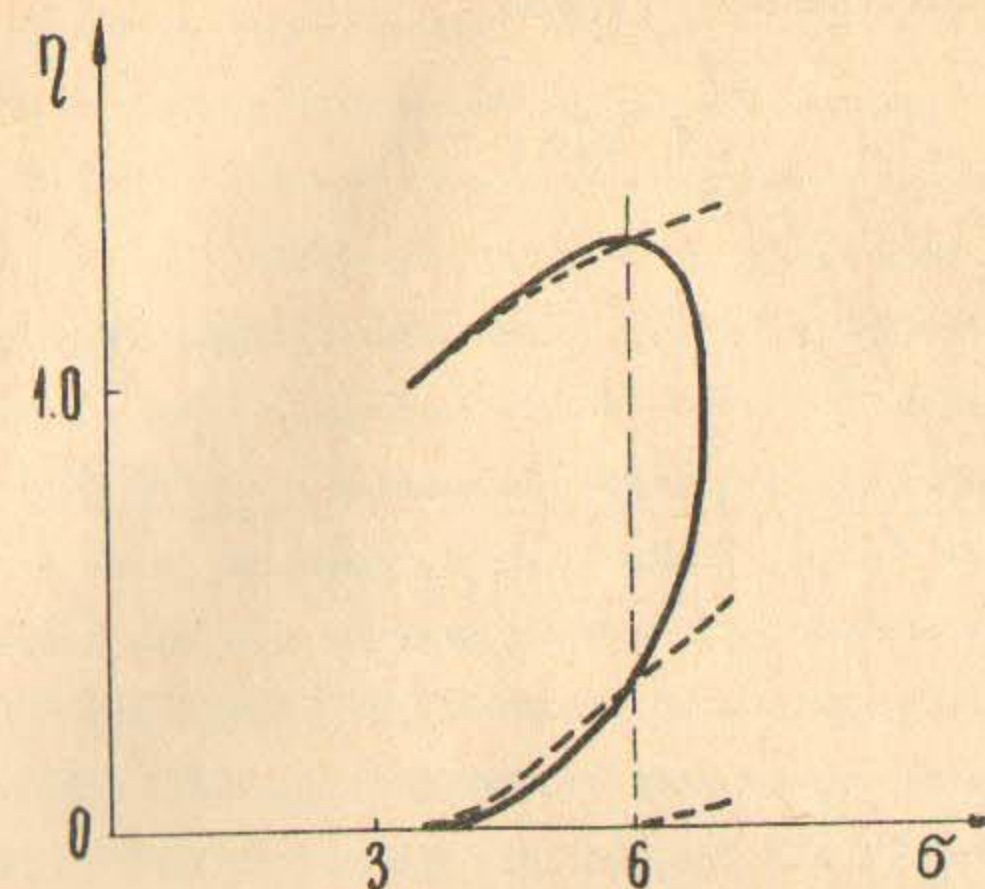


Рис.2

пунктирным кривым, изображающим точные амплитуды (при $N = 3, 4$ соответствующие данные приведены в таблице к п.4).

При $\sigma < \sigma_c$ из начального возмущения может образоваться не более одного солитона [2]. В этом случае хвостом уже, очевидно, нельзя пренебрегать. Что касается вопроса о солитоне, то численные результаты в [2] не дали однозначного ответа на этот вопрос. Однако в работе [9] (в связи с задачей об обтекании тела в диспергирующей среде) были приведены качественные соображения, говорящие о том, что если начальное возму-

шение удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi > 0 \quad (2.8)$$

(положительность $\psi(\xi)$ при всех ξ при этом не требуется, то при любых ϵ (даже очень малых) должен возникнуть по крайней мере один солитон (в случае $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi = 0$ этого может и не быть). Используя результаты работы /5/, мы можем определить амплитуду этого солитона при достаточно малых ϵ . Эта задача сводится к определению уровня энергии в одномерной потенциальной яме малой глубины. Применяя теорию возмущений к уравнению (1.12) так, как это делается в /8/, (см. задачу 1 к § 45) и учитывая (1.13), получаем для амплитуды (единственного) солитона следующее выражение

$$a \approx \frac{\epsilon^2 u_0}{12} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi) d\xi \right)^2 \quad (2.9)$$

Условие применимости теории возмущений (см. /8/, формулу (45.4)) в нашем случае принимает вид

$$\epsilon^2 \ll 12 = \epsilon_s^2 \quad (2.10)$$

Мы видим, что при малых ϵ амплитуда солитона есть величина второго порядка малости. В этом случае основная доля энергии остается в "хвосте", что касается импульса солитона, то как нетрудно проверить, сравнивая (2.9) с первым уравнением системы (1.8), солитон уносит с собой импульс вдвое больший, чем

импульс начального возмущения, так что импульс "хвоста" (или площадь его контура) отрицательна. Замечательно, что и в этом случае правильный порядок амплитуды солитона получается из системы (1.8), если исходить из первого уравнения этой системы, взяв в его левой части только один член.

3. Асимптотическое решение уравнения Кортевега-де Вриза при больших ϵ и t ⁷⁾

Из результатов предыдущего п. следует, что если начальное возмущение имеет форму положительного импульса, достаточно быстро спадающего при $x \rightarrow \infty$, то число образующихся солитонов N растет с ростом ϵ , "хвостами" же при этом можно пренебречь (в том смысле, что они вносят малый вклад по сравнению с солитонами в первые N сохраняющихся величин). Благодаря этому асимптотический вид решения при больших t полностью определяется амплитудами образующихся солитонов. Для характеристики последних при достаточно больших N можно ввести функцию распределения амплитуд.

Введем безразмерную амплитуду солитона

$$h = \frac{a}{u_0} \quad (3.1)$$

где u_0 - амплитуда начального возмущения (1.2) (для определенности удобно считать, что u_0 - наибольший из максимумов $u(x, 0)$, так что максимальное значение $\psi(\xi)$ равно единице). Пусть $f(h)dh$ обозначает число солитонов, имеющих

7) Основные результаты этого п. кратко изложены в /7/.

279 + 68

УДК 62-50
Гос. публ. науч.-техн.
библиотека

безразмерную амплитуду в интервале $(\eta, \eta + d\eta)$. В случае больших N левые части системы (1.8) принимают вид

$$\int_0^{\infty} \eta^{(2m-1)/2} f(\eta) d\eta . \text{ В правых же частях, считая } G \text{ до-}$$

статочно большим, мы можем в числителе подставить главные члены асимптотических выражений (1.11), т.е. $\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^m(\xi) d\xi$ а в знаменателе - формулу (2.6). Тогда система (1.8) примет вид

$$\int_0^{\infty} \eta^{(2m-1)/2} f(\eta) d\eta = \frac{G}{\sqrt{12}} \frac{(2m-1)!}{2^m m! (m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^m(\xi) d\xi \quad (3.2)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Уравнения (3.2), определяющие последовательность моментов функции $f(\eta)$, позволяют восстановить вид этой функции. Полагая в левой части (3.2) $\eta = z^2$ и вводя фурье-образ функции $f(z^2)$

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z^2) e^{-ipz} dz , \quad (3.3)$$

получим

$$\int_0^{\infty} \eta^{(2m-1)/2} f(\eta) d\eta = (-1)^m \Phi^{(2m)}(0) \quad (3.4)$$

Определяя $\Phi^{(2m)}(0)$ с помощью (3.4) и (3.2) и подставляя это в разложение

$$\Phi(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi^{(2m)}(0) \frac{p^{2m}}{(2m)!} , \quad (3.5)$$

получаем следующее выражение для функции $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \frac{G}{\sqrt{48}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi J_0(\sqrt{2\psi(\xi)} p) \quad (3.6)$$

где $J_0(z)$ - функция Бесселя.

Из (3.6), в частности, следует важность неотрицательности начального возмущения. Это говорит о том, что в случае, когда $\psi(\xi)$ принимает в некоторых областях отрицательные значения, использование законов сохранения для вычисления амплитуд солитонов становится неоправданным, что вызвано существенным вкладом "хвостов". Подставляя теперь (3.6) в (3.3) и совершая обратное преобразование Фурье, мы можем восстановить вид функции распределения $f(\eta)$. Возвращаясь к амплитудам

$a = u_0 \eta$, получим для функции распределения амплитуд солитонов $F(a) = \frac{1}{u_0} f\left(\frac{a}{u_0}\right)$ следующее окончательное выражение

$$F(a) = \frac{G}{4\pi u_0 \sqrt{6}} \int_M \frac{d\xi}{\sqrt{\psi(\xi) - \frac{a}{2u_0}}} , \quad (3.7)$$

где область интегрирования M определяется соотношением⁸⁾

8) Если в интеграле (3.7) перейти к новой переменной $z = \psi(\xi)$ то получится формула (8) работы [7].

$$0 < a < 2u_0 \psi(\xi) \quad (3.8)$$

Из (3.8) и (3.7), в частности, следует, что функция распределения амплитуд солитонов равна нулю, если амплитуда a превышает удвоенный наибольший максимум начального возмущения (1.2)

$$F(a) = 0 \quad (a > 2u_0) \quad (3.9)$$

Полное число солитонов получается интегрированием (3.7) по a ;

$$N \approx \int_0^{2u_0} F(a) da \sim \frac{\sigma}{\pi\sqrt{6}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \psi^{1/2}(\xi) \quad (3.10)$$

т.е. полное число солитонов в асимптотическом пределе пропорционально σ . Это число будет конечным, если интеграл в (3.10) сходится, что определяет скорость убывания $\psi(\xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ необходимую для справедливости изложенных в п.2 результатов.

Применяя (3.10) к начальному распределению (2.5), получим

$$N = (3\pi)^{-1/2} \sigma + O(\sigma^{-2}) \quad (3.11)$$

Эта формула, будучи асимптотически точной при $N \rightarrow \infty$, имеет вполне удовлетворительную точность уже при $N \sim 4$. Действительно, в этом случае из (3.11) получаем $\sigma \sim 12.4$, что хорошо согласуется с результатами, изображенными на рис.1. Согласно с этими результатами и значение приращения ΔN при $\Delta N = 1$. Действительно, отмеченные на рис.1 расстояния $AB \approx BC \approx CD \approx DE \approx 3.1 \approx (3\pi)^{1/2}$. Отметим, наконец, что формулы (3.7) и (3.10) совпадают с выражениями для плот-

ности и полного числа уровней в одномерной потенциальной яме с потенциалом $V(\xi) = -\psi(\xi)$ (если заменить $\frac{\sigma^2}{6}$ на $\frac{2m}{\hbar^2}$ и положить $E = -a/2u_0$, что соответствует уравнению Шредингера (1.12); (ср., например, с формулами § 48 из книги /8/).

Это согласуется с результатами работы /5/, где установлена связь между амплитудами солитонов и уровнями энергии в соответствующей потенциальной яме. Поскольку, однако, наши результаты были получены из системы (1.8), основанной на законах сохранения и пренебрежении вкладом "хвостов", то тем самым мы получаем доказательство асимптотического исчезновения вклада "хвостов" в интегралы движения при $N \rightarrow \infty$. Если $\psi(\xi)$ в некоторой области принимает отрицательные значения (а потенциал $V = -\psi(\xi)$ — положительные), то при подсчете числа уровней, а, следовательно, и солитонов, интеграл в (3.10) нужно распространить по той области пространства, где $\psi(\xi) > 0$ (см. /8/, § 48). В этом случае вклад "хвостов" существенен⁹⁾ (см. также текст после формулы (3.6)).

Наконец, остановимся еще на одном аспекте полученных в этом п. результатов. Поскольку из принципа подобия /2/ вытекает, что предельный случай $\sigma \rightarrow \infty$ может реализоваться и при

9) В этом случае, по-видимому, справедливо (по крайней мере при больших N) предположение о том, что "хвосты" образуются в основном из тех областей начального возмущения, где $\psi(\xi) < 0$. Напомним в связи со сказанным, что в терминах работы /5/ "хвосты" определяются "коэффициентами отражения" $\delta(k)$.

конечных ℓ , u_0 , но $\beta \rightarrow 0$ (см. (1.4)), то полученные выше результаты определяют асимптотическое уравнение (1.1) при $\beta \rightarrow 0$. Сравним его с решением уравнения для простой волны в газодинамике

$$u_t + uu_x = 0 \quad (3.12)$$

(написанным в системе отсчета, движущейся с невозмущенной скоростью звука c_0 относительно среды), а также с асимптотическим решением уравнения Бюргера

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0 \quad (\mu > 0) \quad (3.13)$$

при $\mu \rightarrow 0$. (Уравнение Бюргера может быть получено из уравнений Навье-Стокса для волн достаточно малой (но конечной амплитуды) таким же образом, как уравнение Кортевега-де Вриза получается из уравнений "гидродинамики с дисперсией", т.е. в пренебрежении нелинейными членами третьего порядка). Последний член в уравнении (3.13) описывает влияние диссипативных процессов на свойства простой волны (с точностью до третьего порядка малости)¹⁰⁾. Как известно, профиль решения, удовлетворяющего уравнению (3.12), с течением времени становится многозначным и теряет физический смысл (рис.3а кривая АВДЕС). Профиль возмущения, описываемого уравнением (3.13), при больших t и $\mu \rightarrow 0$ принимает "треугольную форму" (см./11/, где

10) Параметр μ просто выражается через коэффициент поглощения звука γ : (10/, § 77)

$$\mu = \gamma \frac{c_0^3}{\omega^2} = \frac{1}{2\rho_0} \left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]$$

где η , ζ и κ - коэффициенты первой и второй вязкости и теплопроводности, соответственно.

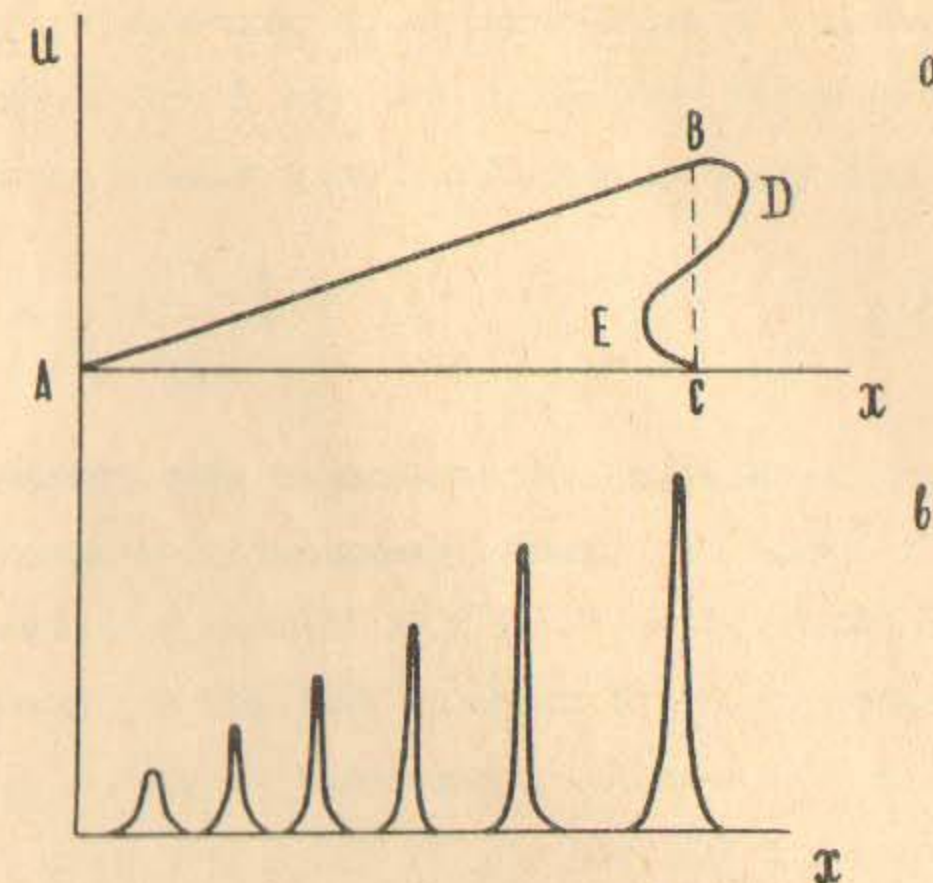


Рис.3.

изучено точное решение уравнения Бюргера), с ударной волной на фронте (профиль ABC на рис.3а). При одинаковых начальных условиях площади АВДЕС и ABC равны, поскольку из уравнений (3.12), (3.13) вытекает сохранение импульса, т.е. величины

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) dx$$

Решение уравнения Кортевега-де Вриза (1.1) при $\beta \rightarrow 0$ состоит из ряда солитонов, число которых растет как $\beta^{-1/2}$ (см. (3.10), а ширина убывает как $\beta^{1/2}$ (см.(1.3)) (амплитуды солитонов при этом не могут превышать удвоенного макс-

сумма начального возмущения). Это решение изображено на рис.3в. Замечательно при этом, что при $\beta \rightarrow 0$ интегралы движения уравнения Кортевега-де Вриза принимают согласно (1.7) вид

$$S_m(\beta \rightarrow 0) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} u^m(x, t) dx \quad m=1, 2, \dots \quad (3.14)$$

т.е. совпадают с интегралами движения для уравнения (3.12) (в последнем легко убедиться, умножая обе части (3.12) на u^{m-1} и интегрируя по всем x). Иными словами, при одинаковых начальных условиях профиль АВДЕС и профиль на рис.3в имеют при $\beta \rightarrow 0$ не только одинаковые площади, но и все другие интегралы вида (3.14).

Очевидно, что решение уравнения Кортевега-де Вриза при $\beta \rightarrow 0$ является обобщенным решением уравнения (3.12) в смысле, определенном в /11/, но кроме того, обладает еще рядом других особенностей, напр. теми же интегралами движения. (Решение уравнения Бюргерса при $\mu \rightarrow 0$ также является обобщенным решением уравнения (3.12), но имеет только один интеграл движения - площадь профиля).

4. О вычислении уровней энергии в одномерной потенциальной яме

Суммируя результаты п.п.2, 3, можно сформулировать следующий простой метод приближенного вычисления уровней энергии в одномерной яме с потенциалом вида:

$$U(x) = -u_0 \psi\left(\frac{x}{l}\right) \quad (4.1)$$

$$\psi(\xi) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^{1/2}(\xi) d\xi < \infty \quad (4.2)$$

При условиях (4.2) собственные значения уравнения Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + [U(x) - E] \psi = 0 \quad (4.3)$$

могут быть определены с удовлетворительной точностью (см. таблицу) из следующей системы уравнений

$$\sum_{\tau=1}^N k_{\tau}^{2n-1} = S_{2n-1} \equiv \sqrt{\frac{2\mu u_0 l^2}{\hbar^2}} \frac{(2n-1)!}{2^{2n} [(n-1)!]^2} \int_{-\infty}^{\infty} Q_n(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

$$n = 1, 2, \dots, N, \quad N \geq 2$$

где N - полное число уровней, τ - номер собственного значения (в порядке возрастания модулей) и $E_{\tau} = -u_0 k_{\tau}^2$

$$Q_n(\xi) = \frac{\psi^n(\xi)}{n} - \frac{\hbar^2}{2\mu u_0 l^2} \frac{(n-1)(n-2)}{12} \psi_{\xi}^2 \psi^{n-3} \quad (4.5)$$

Величины уровней и их число, как видно из формул (4.4), (4.5), определяются значениями безразмерного параметра

$$L^2 = \frac{2\mu u_0 l^2}{\hbar^2} \quad (4.6)$$

Хотя, как указано в (4.4) излагаемый метод оправдан лишь при $N \geq 2$, он даёт правильный порядок величины уровня и при $N=1$. При $N=2$ система (4.4) сводится к квадратному уравнению,

имеющему корни

$$k_{1,2} = \frac{1}{8} \left(d\gamma_1 \pm \sqrt{32 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \frac{d^2 \gamma_1^2}{3}} \right), \quad \gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) d\xi, \quad \gamma_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(\xi) d\xi \quad (4.7)$$

Из условия вещественности и положительности корней k_r следует, что для того, чтобы "яма" имела более чем один уровень энергии, параметр d должен превышать значение

$$d > d_c = \left(\frac{24\gamma_2}{\gamma_1^3} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

Аналогично, при больших N , решения системы (4.4) являются корнями одного алгебраического уравнения N -й степени, имеющего вид (2.4). Коэффициенты G этого уравнения можно выразить через правые части системы (4.4) S_{2n-1} , решив некоторую систему линейных уравнений (см. Приложение). Каждому числу уровней N соответствует определенная область значений параметра d , начало которой определяется (с той же точностью, что и уровни) тем значением параметра d , при котором первый корень системы N уравнений (4.4) обращается в нуль: $k_1^{(N)} = 0$ эта область заканчивается при таком d , когда $k_1^{(N+1)} = 0$ (рис.1). Далее, поскольку асимптотический закон распределения уровней, получающийся из системы (4.4), оказывается в пределе больших N таким же, как и в квазиклассическом случае, то точность вычислений собственных значений уравнения Шредингера с помощью системы (4.4) увеличивается с ростом N . Отметим также, что изменение величины d , отвечающее приращению числа уровней N на единицу, очень слабо зависит от N и поэтому может определяться своим асимптотическим выраже-

нием

$$\Delta d \approx \pi / \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Psi^{1/2}(\xi) \quad (4.9)$$

(вытекающим из (3.10) после замены $\frac{G^2}{6}$ на d^2). Эта формула выполняется с хорошей точностью уже при $N = 2,3$ (по крайней мере для потенциалов с одним минимумом).

Представление о степени точности описанного метода даёт таблица, где сопоставляются уровни энергии в потенциальной яме, имеющей профиль (2.7)¹¹⁾ с теми значениями E , которые получены из системы (4.4) при $N = 3,4$. При $N = 2$ результаты сопоставлены на рис.2. При $N > 4$ степень точности увеличивается. Аналогичные результаты (в смысле точности) получаются и для других потенциалов с одним минимумом.

В заключение выражаем благодарность Р.З.Сагдееву за интерес к работе и В.В.Соболеву за помощь при численном решении уравнения Кортвега-де Вриза.

11) Точное решение уравнения Шредингера для этого случая см., напр., в /8/ (задача 4 к § 23).

Мы будем исходить из соотношений:

$$A_{2k-1} \equiv \frac{S_{2k-1} - S_{2k-1}}{2k-1} = \sum_{\mu} \frac{(M_2 + \dots + M_{n+1} - 1)!}{M_2! M_3! \dots M_{n+1}!} \rho_2^{M_2} \dots \rho_{n+1}^{M_{n+1}} \quad (\text{П.1})$$

$$S_{2k-1} = \sum_{i=1}^n y_i^{2k-1} \quad (\text{П.1})$$

где

$$\rho_i = S_1 \sigma_{i-1} - \sigma_i \quad (2 \leq i \leq n), \quad \rho_{n+1} = S_1 \sigma_n, \quad \sigma_1 = S_1 \quad (\text{П.2})$$

Суммирование в (П.1) распространяется по всем наборам неотрицательных целых чисел M_i , удовлетворяющих условию $2M_2 + \dots + (n+1)M_{n+1} = 2K - 1$. Соотношение (П.1) проще всего получить из первой формулы Варинга (см., напр., /12/) для $n+1$ переменных, подставив туда вспомогательные величины $y_i = y_i \quad (i \leq n), \quad y_{n+1} = - \sum_{i=1}^n y_i$. Полагая в (П.1) $K=2,3,\dots$ можно выразить ρ_i через A_{2k-1} ; при этом для ρ_i , а, следовательно, и $\sigma_i \quad (i = 2, \dots, n)$ получается система линейных уравнений.

Рассмотрим, например, случай $n = 6$. При этом для получения необходимых уравнений для σ_i достаточно положить в (П.1) $K = 2, \dots, 6$. После простых преобразований они примут

вид

$$\begin{aligned} \rho_3 &= A_3, \quad \rho_2 A_3 + \rho_5 = A_5, \quad \rho_2 A_5 + \rho_4 A_3 + \rho_7 = A_7 \\ \rho_2 A_7 + \rho_4 A_5 + \rho_6 A_3 &= A_9 - \frac{1}{3} A_3^3 \\ \rho_2 (A_9 - \frac{1}{3} A_3^3) + \rho_4 A_7 + \rho_6 A_5 &= A_{11} - A_3^2 A_5 \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Подставив (П.2) в (П.3), получим искомую систему линейных уравнений для $\sigma_2, \dots, \sigma_6$. Замечательно, что в случае $n < 6$, нет необходимости производить вычисления заново; надо просто взять первые $n - 1$ уравнения из (П.3), подставив туда (П.2) и вычеркнуть все члены, пропорциональные σ_i с $i > n$.

При произвольном K общий вид уравнений, определяющих ρ_k , можно представить в виде

$$\begin{aligned} (A_{2k-3} - R_{2k-3})\rho_2 + (A_{2k-5} - R_{2k-5})\rho_4 + (A_3 - R_3)\rho_{2k-4} + \rho_{2k-1} &= \\ = A_{2k-1} - R_{2k-1} \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где величины R_i определяются рекуррентной формулой

$$R_{2i+1} = \sum_{\mu} \frac{(M_3 + M_5 + \dots + M_{2i-5} - 1)!}{M_3! M_5! \dots M_{2i-5}!} (A_3 - R_3)^{M_3} \dots (A_{2i-5} - R_{2i-5})^{M_{2i-5}} \quad (\text{П.5})$$

причем $R_{2i+1} = 0$ при $i \leq 3$ и суммирование производится по всем наборам неотрицательных целых чисел M_i , удовлетворяющих условию

$$3M_3 + 5M_5 + \dots + (2i-5)M_{2i-5} = 2i+1$$

При подстановке (П.2) в (П.4) надо вычеркнуть все G_i с $i > n$.

ТАБЛИЦА

уровней энергии в потенциальной яме $U(x) = -U_0 \text{ch}^{-2} x/c$

G_i^2	Решения системы (4.4)				Точные значения			
	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_3 $	$ E_4 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_3 $	$ E_4 $
39	0.676	0.184	0.002	-	0.676	0.184	0.0004	-
44	0.692	0.214	0.008	-	0.692	0.216	0.003	-
71	0.748	0.330	0.080	-	0.748	0.332	0.078	-
78	0.758	0.352	0.100	-	0.763	0.330	0.126	-
77	0.757	0.348	0.097	0.001	0.757	0.348	0.097	0.0003
84	0.766	0.370	0.116	0.006	0.766	0.369	0.118	0.002
116	0.797	0.442	0.182	0.044	0.797	0.440	0.196	0.040
120	0.800	0.450	0.200	0.050	0.800	0.450	0.200	0.051

Л и т е р а т у р а

1. N. J. Zabusky, M. D. Kruskal *Phys. Rev. Lett* 15, 240, 1965
2. Ю.А.Березин, В.И.Карпман, *ЖЭТФ*, 51, 1557, 1966.
3. N. J. Zabusky. "A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction." *Proc. of the Symp. on Nonlinear Partial Differential Equation*, Academic Press, N.Y. 1967
4. R. Miura, C. Gardner, M. Kruskal. "The Korteweg-de Vries Equation a Generalization Preprint, 1967, *Comm. on Pure Appl. Math.* (to be publ.)
5. C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura *Phys. Rev. Lett* 19, 1095, 1965
6. I. Kay, H.E. Moses. *J. Appl. Phys.* 27, 1503, 1956
7. V. I. Karpman *Physics Lett* 25A, N:10, 1967
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Квантовая механика*, Физматгиз, 1963.
9. В.И.Карпман. *ЖЭТФ*, 52, 1657, 1967.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Механика сплошных сред*, ГИТТЛ, Москва, 1953.
11. E. Hopf. *Comm. Pure Appl. Math.* 3, 201, 1950
12. А.К.Сушкевич. *Основы высшей алгебры*, Гостехиздат, 1941.

Ответственный за выпуск В.П.Соколов
Подписано к печати 12.II-1968 г.
Усл. 1,3 печ.л., тираж 250 экз.
БЕСПЛАТНО
Заказ № 181

Отпечатано на ротапринтере в Институте ядерной физики СО АН СССР