К.84

14

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 197

Е.М.Крушкаль

О точных решениях класса нелинейных волновых уравнений

Новосибирск
1968

Е.М.Крушкаль

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

А Н Н О Т А Ц И Я

Указывается простой метод решения уравнений типа $F_1(y_t)\,y_{tt} = F_2(y_x)\,y_{xx}$, часто встречающихся в нелинейной механике.

БИБЛИОТЕКА
Института ядерной
физики СО АН СССР
инв. №

Рассмотрим нелинейное уравнение 2-го порядка

$$F_1(y_t)\, y_{tt} = F_2(y_x)\, y_{xx} \qquad (1)$$

Забузским /1/ было дано точное решение уравнения (1) с помощью преобразования годографа при

$$F_1 = 1; \qquad F_2 = (1+\varepsilon y_x)^m \qquad (2)$$

В работе /2/ предлагается приближенный метод решения (1) по степеням малого параметра ε для более широкого класса уравнений при

$$F_1 = 1 + \varepsilon \mathcal{F}(y_x); \qquad F_2 = 1 + \varepsilon G(y_t) \qquad (3)$$

Поскольку уравнения типа (1) встречаются во многих областях физики (упомянем, например, известную проблему Ферми, Паста, Улама /3/), то нам хотелось бы отметить простой метод точного решения нелинейных уравнений такого вида без ограничений на малость какого-либо параметра, который может оказаться полезным в ряде случаев.

Используем преобразование Лежандра (см., напр./4/).

Введем переменные ξ, η, R, согласно

$$\xi = y_x; \quad \eta = y_t; \quad R = \xi x + \eta t - y; \qquad (4)$$

тогда

$$x = R_\xi; \quad t = R_\eta; \quad y = \xi x + \eta t - R \qquad (5)$$

$$y_{xx} = d R_{\eta\eta} \; ; \quad y_{tt} = d R_{\xi\xi} \; ; \tag{6}$$

где

$$d = y_{xx} y_{tt} - y_{xt}^2 \tag{7}$$

После подстановки (4) и (6) в (1), получим уравнение

$$F_1(\eta) R_{\xi\xi} = F_2(\xi) R_{\eta\eta} , \tag{8}$$

в котором переменные легко разделяются.

Положим $R = T(\eta) X(\xi)$, тогда из (8) следует

$$T_{\eta\eta} + \lambda F_1(\eta) T = 0 \; ; \quad X_{\xi\xi} + \lambda F_2(\xi) X = 0 \tag{9}$$

где λ - константа разделения.

В частности, для случая (2) имеем

$$y_{tt} = (1+\varepsilon y_x)^m y_{xx} \; ; \tag{10}$$

$$R_{\xi\xi} = (1+\varepsilon\xi)^m R_{\eta\eta} \; ; \tag{11}$$

$$T_{\eta\eta} + \lambda T = 0 \; ; \quad X_{\xi\xi} + \lambda (1+\varepsilon\xi)^m X = 0 \tag{12}$$

Обозначим $z = 1+\varepsilon\xi$; $\gamma = \frac{m}{2}+1$; $\tau = \frac{z^{\gamma}\sqrt{\lambda}}{\gamma\varepsilon}$.

Тогда решение имеет вид:

$$R = \sqrt{z}\,(A\cos\sqrt{\lambda}\,\eta + B\sin\sqrt{\lambda}\,\eta)\left[C J_{\frac{1}{2\gamma}}(\tau) + D Y_{\frac{1}{2\gamma}}(\tau)\right], \tag{13}$$

где A, B, C, D - постоянные, определяемые начальными и граничными условиями;

$J_{\frac{1}{2\gamma}}(\tau)$ и $Y_{\frac{1}{2\gamma}}(\tau)$ - функции Бесселя 1-го и 2-го рода.

Далее простым дифференцированием определятся x, t и, затем y из (5).

Интересно рассмотреть особое решение, когда

$$d = y_{xx} y_{tt} - y_{xt}^2 = 0 \tag{7а}$$

Умножая (10) на y_{xx} и используя (7а), получим

$$y_{xt} \pm y_{xx} (1+\varepsilon y_x)^{m/2} = 0 \tag{14}$$

или, обозначив $u = y_x$,

$$u_t \pm u_x (1+\varepsilon u)^{m/2} = 0 \tag{15}$$

Решение (15) имеет вид

$$u = f\left[(1+\varepsilon u)^{m/2} t \mp x\right] \tag{16}$$

где f - произвольная функция, определяемая начальными условиями. Из (16) легко определить время t_0, которое было найдено в /1/, /2/ в первом приближении по ε, когда

$u_x = y_{xx} = \infty$ и происходит опрокидывание.

При $y|_{t=0} = a\sin\pi x$

имеем из (16):

$$u = a\pi\cos\left\{\pi\left[(1+\varepsilon u)^{m/2} t \mp x\right]\right\}$$

и

$$t_0 = \frac{2}{m\varepsilon\pi^2 a (1+\varepsilon a\pi l)^{m/2-1}} \; ; \quad -1 \le l \le 1$$

Литература

1. N.J. Zabusky, J. Math. Phys., 3, 1028, 1962.
2. M.D. Kruskal, N.J. Zabusky, J. Math. Phys., 5, 231, 1964.
3. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of Nonlinear Problems I, Los Alamos Scientific Report LA-1940, 1955.
4. Р.Курант. Уравнения с частными производными. Изд."Мир", 1964.

Ответственный за выпуск Г.Б.Глаголев

Подписано к печати 9.1У-1968 г.

Усл. 0,5 печ.л., тираж 170 экз.

Заказ № 197. Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР.