27

АКАДЕМИЯ НАУК СССР СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 221

В.Н.Байер, В.М.Катков

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Новосибирск
1968

В.Н.Байер, В.М.Катков

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассмотрена задача излучения фотона релятивистской частицей во внешнем поле для полей, в которых вклад в излучение в данном направлении даёт вся траектория частицы. Использовано обобщение операторного квазиклассического метода, предложенного ранее авторами. Детально исследовано излучение частиц со спином 0,1/2 в кулоновском поле, где получены замкнутые выражения, пригодные для любых $Z\alpha$. Получены также общие формулы для сечений излучения фотона: а) для полей убывающих не медленнее чем кулоновское, б) для полей, в которых вклад в излучение в данном направлении даёт небольшой участок траектории.

QUASICLASSICAL THEORY OF RELATIVISTIC PARTICLES BREMSSTRHLUNG

V.N.BAIER, V.M.KATKOV

A b s t r a c t

Radiation of relativistic particle has been considered in fields, for which all trajectory of particle contributes in radiation to given direction. The generalization of operator method proposed recently by authers has been used. Radiation of particles with spins 0,1/2 in Coulomb field has been investigated in detail, here closed expressions valid for arbitrary $Z\alpha$ have been obtained. General formulae for photon radiation cross-section has been obtained in cases: a) fields decreasing not slower than Coulomb field; b) fields for which only small part of trajectory contributes in radiation to given direction.

1. Релятивистские частицы излучают в угол $\sim \frac{1}{\gamma}$ ($\gamma = \frac{E}{m}$). По этой причине для задачи излучения релятивистской частицы во внешнем поле оказывается существенным взаимоотношение между полным углом отклонения частицы во внешнем поле и углом $\frac{1}{\gamma}$. Имеются два характерных случая.

I. Полный угол отклонения велик по сравнению с $1/\gamma$. Тогда в данном направлении частица излучает с небольшого участка траектории, на котором направление скорости частицы изменяется на угол $1/\gamma$. Такое положение имеет место в магнито-тормозном излучении.

II. Полный угол отклонения частицы в поле $\lesssim 1/\gamma$. Тогда все излучение частицы происходит в узкий конус с углом и определяется всей траекторией частицы. Указанная ситуация имеет место в случае тормозного излучения частицы в кулоновском поле.

Такое положение сохраняется и в квантовой электродинамике. Это связано с тем, что при излучении релятивистских частиц во внешних полях основной вклад дают состояния с большими орбитальными моментами, для которых движение носит квазиклассический характер и вполне адэкватно описывается в терминах траектории.

В работах авторов [1,2] предложен операторный квазиклассический метод рассмотрения процесса излучения во внешнем поле.

В основе метода лежит тот факт, что имеется два типа квантовых эффектов при движении релятивистской частицы во внешнем поле. Первый из них связан с квантовым характером самого движения частицы. Связанная с ним некоммутативность динамических переменных имеет порядок $1/\ell$ (где $\hbar\ell$ - орбитальный момент количества движения) и падает с ростом энергии частицы. Второй тип квантовых эффектов связан с отдачей частицы при излучении и имеет порядок $\hbar\omega/E$, где ω - частота излученного фотона. Поскольку при больших энергиях эффекты первого типа весьма малы по сравнению с эффектами второго типа, можно пренебречь некоммутативностью динамических переменных частицы и, следовательно, рассматривать движение частицы по траектории. На этом основании в методе учитываются только коммутаторы динамических переменных частицы с полем излученного фотона ($\sim \hbar\omega/E$), что соответствует учёту отдачи при излучении.

В работах [1,2] были рассмотрены квантовые явления при движении заряженных частиц в магнитном поле (магнито-тормозное излучение, рождение пары частиц фотоном в магнитном поле и т.д.), т.е. был рассмотрен случай 1.

В данной работе предложенный метод распространен на случай тормозного излучения частицы в кулоновском поле (случай 11). Оказывается, что в своей существенной части метод может быть непосредственно использован и в этом случае. Однако здесь имеется весьма важная специфика, состоящая в том, что при вычислении матричного элемента при минимальных передачах импульса $q \sim q_{min}$, где существенно явление квантовомеханической дифракции, необходимо провести суммирование по классическим траекториям.

Поскольку существенны большие орбитальные моменты, то вкладами членов типа взаимодействия спин-поле можно пренебречь (с точностью до членов $\sim 1/\ell$). По этой причине рассмотрение проводится единым образом для частиц с любым спином, а вычисление всех спиновых эффектов, которые определяются структурой тока по форме совпадает с расчётом для свободных частиц.

2. Матричный элемент излучения фотона заряженной частицей во внешнем поле имеет стандартный вид:

$$U_{fi} = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \int dt \int d^3r \times$$

$$\times F^+_{fs'}(\vec{r})\, e^{iE_f t} (\varepsilon j)\, e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}\, e^{-iE_i t} F_{is}(\vec{r}) \quad (1)$$

где F_{is} - решение волнового уравнения в данном поле с энергией E_i и спиновым состоянием s, ε_μ - вектор поляризации фотона, j_μ - оператор тока. В статье используется метрика $(ab) = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$, система единиц $\hbar = c = 1$.

Для интересующих нас состояний с большими орбитальными моментами ℓ, можно приближенно представить

$$e^{iE_i t} F_{is}(\vec{r}) = \Psi_s(\vec{P})\, e^{i\mathcal{H}t} |i\rangle \quad (2)$$

где $\Psi_s(\vec{P})$ операторная форма волновой функции частицы в спиновом состоянии s в данном поле. Эта форма получается из свободных волновых функций заменой переменных на операторы $\vec{p} \to \vec{P}$, $E \to \mathcal{H} = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2}$. В представлении (2) мы пренебрегли членами взаимодействия спин-поле (например, для частиц со спином 1/2 отброшены члены вида $\vec{\sigma}\vec{H}$ и $\vec{\alpha}\vec{E}$).

Переходя к гейзенберговским операторам запишем матричный элемент U_{fi} в виде [1]:

$$U_{fi} = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \langle f| \int dt\, e^{i\omega t} M(t) |i\rangle \quad (3)$$

где

$$eM(t) = \Psi^+_{s'}(\vec{P}) \{ (\varepsilon j), e^{-i\vec{k}\vec{r}} \} \Psi_s(\vec{P}) \quad (4)$$

здесь $j_\mu(t)$, $\vec{r}(t)$ - соответственно операторы тока и координаты частицы, скобки $\{\ \}$ означают симметризованное произведение операторов. Порядок записи операторов, входящих в $\Psi_s(\vec{P})$ несуществен (с точностью до членов $\sim \frac{1}{\ell}$). Например для частицы со спином 0 (s)

$$M_s = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} (\varepsilon \vec{P})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \quad (5)$$

и для частицы со спином 1/2

$$M_e = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} u^+_{s'}(\vec{P})\, (\vec{\alpha}\vec{\varepsilon})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} u_s(\vec{P}) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}} \quad (6)$$

где

$$u = \sqrt{\frac{\mathcal{H}+m}{2}} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{\xi}(t)) \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{\mathcal{P}}}{\mathcal{H}+m} \varphi(\vec{\xi}(t)) \end{pmatrix} \quad (7)$$

здесь $\varphi(\vec{\xi}(t))$ – двухкомпонентный спинор, описывающий спиновое состояние электрона в момент времени t.

Вероятность процесса излучения, просуммированная по всем конечным состояниям частицы, имеет вид [1]:

$$dW = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \frac{d^3k}{\omega} \times$$

$$\times \langle i | \int dt_1 \int dt_2\, e^{i\omega(t_1-t_2)} M^*(t_2) M(t_1) | i \rangle \quad (8)$$

где $\frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}$

Это выражение очень удобно для рассмотрения процесса излучения релятивистской частицы в любом внешнем поле.

Дальнейшее вычисление начинается с проведения ряда операций с операторами, входящими в (8). Вынесем оператор $e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ в $M(t_1)$ налево, а оператор $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)}$ в $M^*(t_2)$ – направо, для чего воспользуемся соотношением

$$f(\vec{\mathcal{P}})\, e^{-i\vec{k}\vec{r}} = e^{-i\vec{k}\vec{r}} f(\vec{\mathcal{P}} - \vec{k}) \quad (9)$$

которое есть следствие того, что $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ есть оператор сдвига в импульсном пространстве. Изменение функции $f(\vec{\mathcal{P}})$ в (9) при коммутации с $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ соответствует учёту отдачи при излучении. После выноса оператора $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ из M в матричном элементе остаются только коммутирующие (с точностью до членов $\sim 1/\varepsilon$) операторы и дальнейшая задача сводится к рассмотрению возникающей комбинации $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)} e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$. Некоммутативность входящих сюда операторов является существенной, так что, вообще говоря, нельзя ограничиться разложением этой комбинации по низшим коммутаторам. Одним из центральных пунктов данного подхода является распутывание этой комбинации.

Распутывание произведения операторов $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)} e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ для случая I (магнито-тормозное излучение) проведено в работах [1,2]. Оно основывалось на том, что в излучение в данном направлении даёт вклад небольшой участок траектории, так что $|\dot{\vec{v}}|(t_2-t_1) \sim 1/\gamma$, с учётом этого проводилось разложение по степеням $|\dot{\vec{v}}|(t_2-t_1)$. В данном случае II в излучение даёт вклад вся траектория и такой подход неприменим. Однако можно воспользоваться тем, что вдали от источника поля траектория частицы близка к прямолинейной и динамические переменные частицы почти не меняются (см.приложение А). Заметим также, что как и в [1], рассмотрение проводится для полей, для которых показатель неоднородности

$$n = \left| \frac{\partial \ln V}{\partial \ln r} \right| \quad (10)$$

удовлетворяет неравенству

$$n \ll \gamma \quad (11)$$

(для кулоновского поля $n = 1$).

В результате распутывания (см.приложение Б) получаем

$$e^{-ikx(t_2)} e^{ikx(t_1)} = e^{-i\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}-\omega}[kx(t_2) - kx(t_1)]} \quad (12)$$

Это выражение точно совпадает с результатом распутывания для случая магнито-тормозного излучения [1,2] и является универсальным для задачи излучения в любом внешнем поле, поскольку оно, по-существу, учитывает только отдачу при излучении, а отсюда, естественно, не зависит от поля.

Комбинация $e^{i\vec{k}\vec{r}(t_2)} e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ с точностью до членов $\sim 1/\gamma$ коммутирует с $\mathcal{H}$ и $\vec{\mathcal{P}}$. Это следует непосредственно из представления $kx(t)$ в виде (А7) и того, что в этом представлении с $\mathcal{H}$ и $\vec{\mathcal{P}}$ не коммутирует только kx_0.

Итак все операторы в выражении (8) с нашей точностью оказываются коммутирующими и поэтому после проведения операции распутывания все они, стоящие в обкладках начального состояния, могут быть заменены на классические значения (с-числа).

Теперь мы можем записать квадрат матричного элемента в виде [1]:

$$\langle i | M^*(t_2) M(t_1) | i \rangle = \\ = \exp\left\{ i\omega(t_2 - t_1) + \frac{E}{E-\omega} i [kx(t_1) - kx(t_2)] \right\} R^*(t_2) R(t_1) \tag{13}$$

где

$$eR(t) = \Psi_s(\vec{p}\,') \frac{(\varepsilon[j(\vec{p}) + j(\vec{p}\,')])}{2} \Psi_s(\vec{p}) \tag{14}$$

здесь $\vec{p}\,' = \vec{p} - \vec{k}$, $E' = E(\vec{p}\,') = \sqrt{(\vec{p} - \vec{k})^2 + m^2}$ уже не операторы, а с-числа.

При операции распутывания совершенно не затрагиваются содержащиеся в функции $R(t)$ спиновые характеристики частиц, что связано с тем, что в нашем приближении пренебрегается взаимодействием спина с внешним полем (члены $\sim 1/\ell$). Описывающая же их функция $R(t)$ имеет форму матричного элемента перехода для свободных частиц с учётом законов сохранения. Это позволяет единым образом рассматривать задачи для любого спина.

3. Для определенности мы проведем дальнейший расчёт для случая движения частицы со спином 0 (S) в кулоновском поле, затем мы рассмотрим электрон в кулоновском поле и приведём ряд формул для излучения в произвольном внешнем поле.

После проведения распутывания, мы должны выполнить интегрирование по времени в формуле (8), подставив в неё выражение (13). В случае I было удобно интегрировать по времени квадрат матричного элемента переходя к относительному времени $t_2 - t_1$ [1]. В случае II оказывается удобным интегрировать по времени непосредственно матричный элемент, поскольку вклад в излучение даёт вся траектория. Последняя с нужной точностью рассмотрена в приложении А.

Матричный элемент для скалярной частицы (5), (13), (14)

$$\mathcal{M}_s = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega}} \frac{1}{\sqrt{EE'}} \int e^{i\frac{E}{E-\omega} kx(t)} (\vec{\varepsilon}\vec{p})\, dt \tag{15}$$

В кулоновском поле функция $\vec{p}(t)$ (А1) с учётом условий при

$t = \pm\infty$ имеет вид

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_1 - \frac{1}{2}\vec{q}\left(1 + \frac{vt}{\sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}}\right) \tag{16}$$

Учитывая отдачу при излучении (14) имеем

$$\vec{p}\,'(+\infty) = \vec{p}_f' = \vec{p}_f - \vec{k} \equiv \vec{p}_2 \tag{17}$$

с другой стороны на основании (16), (А6)

$$\vec{p}(+\infty) = \vec{p}_f = \vec{p}_1 - \vec{q} \tag{18}$$

сводя эти результаты, имеем:

$$E_2 = E_1 - \omega\ , \quad \vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{k} - \vec{q} \tag{19}$$

Подставляя (16) и $kx(t)$ в форме (А7), (А10) в формулу (15) получаем

$$\mathcal{M}_s(\vec{\rho}) = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2} E_1}\sqrt{\frac{E_2}{2E_1\omega}}\left(\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_1}{kv_1} - \frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_f}{kv_f}\right) \zeta K_1(\zeta) \tag{20}$$

где $v = 1$,

$$\zeta = \rho \frac{E_1}{E_2}\sqrt{(kv_1)(kv_f)} > 0 \tag{21}$$

$K_1(\zeta)$ – функция Макдональда. Используя (17) можно вычислить (kv_f), с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$

$$(kv_f) = \frac{E_2}{E_1^2}(kp_2) \tag{22}$$

Дальнейшее рассмотрение существенно зависит от величины переданного импульса q. Можно выделить две характерные области значений q в зависимости от соотношения величин q и q_{min}, где

$$q_{min} = |\vec{p}_1| - |\vec{p}_2| - |\vec{k}| \simeq \frac{\omega m^2}{2E_1 E_2} \tag{23}$$

в первой области $q \gg q_{min}$, во второй – $q \sim q_{min}$. Такое разбиение связано с явлением квантовомеханической дифракции в процессе излучения. Угол дифракции в этом случае определяется неопределенностью импульса на участке траектории, который даёт основной вклад в излучение фотона. Поскольку скорость электрона $v \simeq 1$, то длина этого участка $vT \simeq T$, T – интервал времени, существенный в интеграле (15), основной вклад в который даёт область $\frac{E_1}{E_2} kx(T) \sim 1$. Отсюда получаем

$$\Delta p \simeq T^{-1} \simeq \frac{\omega m^2}{2E_1E_2} = q_{min} \tag{24}$$

Таким образом явление квантовомеханической дифракции становится существенным при $q \sim q_{min}$. Заметим, что по определению $\vec{q}_{min}$ является продольным и всегда $q_{\parallel} \sim q_{min}$, так что при $\vec{q}^{\,2} = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 \gg q_{min}^2$ передача является в основном поперечной.

Оказывается удобным пользоваться переменной

$$y = \frac{(kp_1)(kp_2)}{E_1 E_2\, q^2} \tag{25}$$

причём величина ζ (21), (22) выражается через y следующим образом:

$$\zeta = \rho q \sqrt{y} \tag{26}$$

В области $q \gg q_{min}$, $y \ll 1$ и тогда $\zeta \ll 1$. В этом случае $\zeta K_1(\zeta) = 1 + O(\zeta)$ и с этой точностью

$$M_s \to M_s^0 = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{E_2}{2E_1\omega}} \left[\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_1}{kp_1} - \frac{E_1}{E_2} \frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_2}{kp_2} \right] \tag{27}$$

Учитывая, что при $q \gg q_{min}$ величина передаваемого импульса определяется углом рассеяния во внешнем поле, сечение излучения фотона можно представить в виде

$$d\sigma_\gamma = d\sigma(\vec{q}_\perp)\, dW_\gamma(\vec{q}_\perp, \vec{k}) \tag{28}$$

где

$$dW_\gamma = |M_s^0|^2 d^3k \tag{29}$$

Действительно, когда $q \simeq q_\perp$ величина $q_\perp$ определяется только действием внешнего поля (A1) и не связана с процессом излучения. По этой причине процесс рассеяния не зависит от процесса излучения. Отметим, что выражение (27) получается при интегрировании по времени в (15), если траекторию представить в виде "угла" (импульс $\vec{p}_1$ в интервале $-\infty < t < 0$ и импульс p_f в интервале $0 < t < \infty$). Используя явный вид $d\sigma(\vec{q}_\perp)$ в кулоновском поле

$$d\sigma(\vec{q}_\perp) = \frac{4Z^2\alpha^2}{q_\perp^4} d^2q_\perp \tag{30}$$

получаем, что в области "классических" передач импульса $q \gg q_{min}$ сечение излучения фотона (28) совпадает с сечением, вычисленным в борновском приближении [3].

Перейдем к области $q \sim q_{min}$. Из-за явления дифракции в этом случае величина переданного импульса уже не определяется углом рассеяния частицы. Поэтому для получения матричного элемента излучения с заданным переданным импульсом необходимо провести суммирование по траекториям (парциальным амплитудам $M(\vec{\rho})$). Для этого мы воспользуемся методом прицельного параметра (см., например [4]). Тогда выражение для сечения процесса излучения в случае кулоновского потенциала можно записать в виде

$$d\sigma_\gamma = |M(\vec{q}_\perp)|^2 d^2q_\perp\, d^3k \tag{31}$$

где

$$M(\vec{q}_\perp) = \frac{1}{2\pi i} \int d^2\rho\, e^{i\vec{q}_\perp\vec{\rho}} e^{i\chi(\vec{\rho})} M(\vec{\rho}) \tag{32}$$

здесь $\chi = 2\xi \ln \rho/a$, $\xi = Z\alpha$, a – параметр регуляризации при вычислении фазы рассеяния в кулоновском потенциале, сечение (31) не зависит от величины a, которую мы будем считать много больше всех характерных размеров; для скалярных частиц $M_s(\vec{\rho})$ даётся выражением (20).

При вычислении интеграла (32) следует учесть, что при $q \sim q_{min}$ все частицы летят почти по одной прямой, так что $kv_1 \simeq kv_f$.

Тогда видно, что матричный элемент $M_s(\vec{\rho})$ (20) пропорционален $\vec{\varepsilon}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)=\vec{\varepsilon}\vec{q}_\perp$ и воспользовавшись связью $\vec{q}_\perp$ с $\vec{\rho}$ (A1) в кулоновском поле получаем

$$M_s(\vec{\rho}) = \vec{\mathcal{D}}_s\vec{\rho}\,\frac{1}{\rho^2}\,z K_1(z) \tag{33}$$

где

$$\vec{\mathcal{D}}_s = \frac{2ie\xi}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{m^2\omega}\sqrt{\frac{2E_1E_2}{\omega}}\,\vec{\varepsilon} \tag{34}$$

Подставляя выражение (33) в (32) и выполнив интегрирование по углу получаем

$$M(\vec{q}_\perp) = \frac{\vec{\mathcal{D}}_s\vec{q}_\perp q\sqrt{y}}{q_\perp}\int\rho\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i\xi}K_1(q\rho\sqrt{y})J_1(q_\perp\rho)\,d\rho \tag{35}$$

Учтем, что в области $q \sim q_{min}$ имеет место (ср. (25))

$y = q^2_{min}/q^2$, $q_{min} = q_\parallel$ так что

$$q_\perp = q\sqrt{1-y} \tag{36}$$

Вычисляя этот интеграл (см. [5]) получаем

$$M_s(\vec{q}_\perp) = \frac{\vec{\mathcal{D}}_s\vec{q}_\perp}{q^2}\left(\frac{2}{aq}\right)^{2i\xi}(1+i\xi)\Gamma^2(1+i\xi)F(-i\xi,1+i\xi;2,1-y) \tag{37}$$

где F – гипергеометрическая функция. При выводе (37) мы воспользовались стандартным преобразованием гипергеометрической функции от аргумента $1-1/y$ к аргументу $1-y$. Подставляя этот результат в выражение для сечения (31) получаем

$$d\sigma_{s\gamma} = d\sigma^B_{s\gamma}\,\Phi(y);\quad \Phi(y) = \frac{V^2(y)+\xi^2y^2W^2(y)}{V^2(0)} \tag{38}$$

где $d\sigma^B_{s\gamma}$ – сечение излучения в борновском приближении,

$$V(y) = F(i\xi,-i\xi;1,1-y),\quad W(y) = \frac{1}{\xi^2}\frac{dV}{dy} \tag{39}$$

здесь мы воспользовались соотношением

$$(1+i\xi)F(-i\xi,1+i\xi;2,1-y) = V(y)+i\xi y W(y) \tag{40}$$

Формула (38) справедлива в области передач импульса $q^2_{min} \le q^2 \ll m^2$. Когда $y \ll 1$, поправочный множитель к борновскому сечению $\Phi(y) \to 1$. Учитывая, что формула (28) при $q \gg q_{min}$ является сечением излучения в борновском приближении, получаем, что формула (38) применима при всех интересующих нас передачах импульса:

$$d\sigma_{s\gamma} = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\frac{1}{q^4}\frac{E_2}{E_1}\left|E_2\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_1}{kp_1} - E_1\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_2}{kp_2}\right|\Phi(y)\frac{d^3k}{\omega}\,d\Omega \tag{41}$$

Для вычисления спектра излученных фотонов удобно воспользоваться переменными

$$\xi = \frac{2E_1}{\omega}\frac{(kp_1)}{m^2},\quad z = \frac{2E_2}{\omega}\frac{(kp_2)}{m^2},\quad y = \frac{(kp_1)(kp_2)}{q^2E_1E_2} \tag{42}$$

Просуммировав по поляризациям фотонов и проводя замену переменных в выражении (41), получаем

$$d\sigma_{s\gamma} = \frac{4Z^2\alpha^3}{\pi m^2}\frac{E_2}{E_1}\frac{d\omega}{\omega}\int\frac{dy\,d\xi\,dz}{\xi z\, s\sin\varphi}\left[\frac{1}{y}-1-\frac{(\xi-z)^2}{\xi^2z^2\delta^2}\right]\Phi(y) \tag{43}$$

где

$$s\sin\varphi = \left[2\lambda\xi z(\xi+z-2) - (\lambda\xi z)^2 - (\xi-z)^2\right]^{1/2} \tag{44}$$

$$\lambda = \delta^2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\xi z}\right),\quad \delta = \frac{q_{min}}{m} = \frac{\omega m}{2E_1E_2}$$

С принятой степенью точности можно воспользоваться приближенным выражением

$$\lambda = \frac{\delta^2(1-y)}{y} \tag{45}$$

Интеграл (43) по одной из переменных (ξ, ζ) берется между нулями функции $S\,\xi\sin\varphi$, второй интеграл вычисляется элементарно. Проведя интегрирование получаем:

$$d\sigma_{s\gamma} = \frac{8Z^2\alpha^3}{3m^2}\frac{E_2}{E_1}\frac{d\omega}{\omega}\int_{\delta^2}^{1}\frac{1-y}{y}\Phi(y)\,dy \tag{46}$$

Воспользовавшись гипергеометрическим уравнением нетрудно показать, что

$$\int_{\delta^2}^{1}\frac{1-y}{y}\Phi(y)\,dy = \frac{(1-y)}{V^2(0)}\left[VW + V^2 - y(1-y)\xi^2 W^2\right]_{\delta^2}^{1} \tag{47}$$

Взяв известные асимптотики гипергеометрических функций и оставляя главные члены разложения по δ^2 получаем

$$d\sigma_{s\gamma} = \frac{16Z^2\alpha^3}{3m^2}\frac{E_2}{E_1}\frac{d\omega}{\omega}\left[\ln\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} - f(\xi)\right] \tag{48}$$

где

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(2n+1)\xi^{2n} = \xi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+\xi^2)} \tag{49}$$

При $\xi \to 0$, $f(\xi) \to 0$ и мы получаем спектр излучаемых фотонов в борновском приближении. При $\xi \gg 1$, $f(\xi) \to \ln\xi + C$ (C - постоянная Эйлера). В этом случае

$$d\sigma_{s\gamma} = \frac{16Z^2\alpha^3}{3m^2}\frac{E_2}{E_1}\frac{d\omega}{\omega}\left[\ln\frac{1}{\delta\xi} - \frac{1}{2} - C\right] \tag{50}$$

Этот результат может быть получен на основании чисто классических представлений о процессе соударения. Действительно в классической теории имеется жесткая связь между прицельным параметром ρ и передачей импульса $q_\perp = 2\xi/\rho$ (это видно, например, из выражения (32), где при $\xi \gg 1$ в подинтегральном выражении содержится быстро осциллирующий множитель). Тогда $\Phi(y) \to 4\xi^2 y K_1^2(2\xi\sqrt{y})$ и в интеграл в выражении (46) основной вклад даёт область $y \sim 1/4\xi^2 \ll 1$, так что происходит экспоненциальное обрезание области с минимальной передачей импульса, где существенны квантовые эффекты. Подставляя это выражение для $\Phi(y)$ в (46) получаем (50).

Заметим, что при $\xi \gg 1$ формула (28) имеет "классический" вид

$$d\sigma_\gamma = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dW_\gamma(\vec{\rho}, \vec{k}) \tag{51}$$

4. Рассмотрим теперь задачу излучения для электрона в кулоновском поле. Интегрирование матричного элемента по времени проводится так же, как для скалярных частиц (20), в итоге получаем

$$\mathcal{M}_e(\vec{\rho}) = \mathcal{M}_e^{0}(\vec{\rho})\,\zeta K_1(\zeta) \tag{52}$$

где $\mathcal{M}_e^{0}$ получается интегрированием по траектории в виде "угла" (ср.(27)).

$$\mathcal{M}_e^{0}(\vec{\rho}) = \frac{ie}{(2\pi)^{3/2}E_1}\sqrt{\frac{E_2}{2E_1\omega}}\left(\frac{R_1}{kv_1} - \frac{R_f}{kv_f}\right) \tag{53}$$

Здесь $R_{1,f}$ определяется выражением (14)

$$R_{1,f} = u_{s'}^{+}(\vec{p}_{1,f})\,\vec{\varepsilon}\vec{\alpha}\,u_s(\vec{p}_{1,f}) = \varphi_{s'}^{+}\left[A_{1,f} + i\vec{\sigma}\vec{B}_{1,f}\right]\varphi_s \tag{54}$$

где

$$A = \vec{\varepsilon}\vec{p}\left(\sqrt{\frac{E'+m}{E+m}} + \sqrt{\frac{E+m}{E'+m}}\right)$$
$$\vec{B} = \sqrt{\frac{E'+m}{E+m}}\,[\vec{\varepsilon}\vec{p}\,] - \sqrt{\frac{E+m}{E'+m}}\,[\vec{\varepsilon}\vec{p}\,'] \tag{55}$$

В формуле (54) учтено, что с нашей точностью ($\sim 1/\gamma$) при малых углах отклонения во внешнем поле можно пренебречь зависимостью спиновых состояний $\varphi(\vec{\xi}(t))$ (7) от времени.

Как и при рассмотрении излучения скалярной частицы, нужно отдельно рассматривать области $q \gg q_{min}$, $q \sim q_{min}$.

Вообще все рассуждения, относящиеся к разбиению на области и поведению сечения в них, не зависят от спина частицы.

В области $q \gg q_{min}$ справедлива формула (28), причём как и в случае скалярной частицы, она даёт сечение излучения, совпадающее с вычисленным в борновском приближении. Воспользовавшись формулами (28) и (52) - (54) легко написать общее выражение для сечения излучения поляризованных частиц

$$d\sigma_\gamma = d\sigma(\vec{q}_\perp)\,\frac{e^2 E_2\, d^3k}{(2\pi)^3 2\omega E_1^3}\,\frac{1}{4}\,Sp\left[(1+\vec{\xi}_i\vec{\sigma})O^+(1+\vec{\xi}_f\vec{\sigma})O\right] \qquad (56)$$

где

$$O = \frac{A_1}{kv_1} - \frac{A_f}{kv_f} + i\vec{\sigma}\left(\frac{\vec{B}_1}{kv_1} - \frac{\vec{B}_f}{kv_f}\right) \qquad (57)$$

Это сечение, просуммированное по спину конечной частицы и усредненное по спину начальной, с нашей точностью можно представить в виде:

$$d\sigma^B_{e\gamma} = \frac{Z^2\alpha^3}{\pi^2}\,\frac{1}{q^4}\,\frac{E_2}{E_1}\times$$
$$\times\left\{\left|E_2\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_1}{kp_1} - E_1\frac{\vec{\varepsilon}\vec{p}_2}{kp_2}\right|^2 + \frac{\varepsilon^*\varepsilon}{4(kp_1)(kp_2)}\left[\vec{k}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\right]^2\right\}\frac{d^3k}{\omega}\,d\Omega \qquad (58)$$

В этой формуле первый член в фигурных скобках совпадает с соответствующим членом в сечении излучения скалярной частицы, второй является спиновой добавкой.

В случае $q\sim q_{min}$ необходимо воспользоваться формулами (31), (32) куда подставляется теперь $\mathcal{M}(\vec{\rho})$ в виде (52). При этом сохраняется утверждение, что в этой области матричный элемент пропорционален $\vec{q}_\perp$ (это видно, в частности, из формул (54), (55)), так что

$$\mathcal{M}_e(\vec{\rho}) = \vec{\mathcal{D}}_e\vec{\rho}\,\frac{1}{\rho^2}\,\zeta K_1(\zeta) \qquad (59)$$

Дальнейшие вычисления совпадают с вычислениями, проведенными в случае скалярной частицы (35) - (38). В итоге получаем $d\sigma_{e\gamma} = d\sigma^B_{e\gamma}\,\Phi(\nu)$. Таким образом, от спина включая рассмотрение всех спиновых и поляризационных эффектов зависит только сечение в борновском приближении, входящее в формулы для сечений (38), (60), а учёт высших порядков взаимодействия с внешним полем (функция $\Phi(\nu)$) вообще не зависит от спина.

Вычисление спектра излученных фотонов проводится как и в случае скалярной частицы (42) - (46). В итоге получаем

$$d\sigma_{e\gamma} = \frac{4Z^2\alpha^3}{m^2}\,\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{E_1}{E_2} + \frac{E_2}{E_1} - \frac{2}{3}\right)\left[\ln\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} - f(\xi)\right]\frac{d\omega}{\omega} \qquad (61)$$

Выражение (60) для неполяризованных электронов было получено впервые в известной работе Бете и Максимона [6], в которой вычисления проводились с использованием приближенных ($\ell \gg 1$) волновых функций электрона в кулоновском поле. Формула (61) была найдена затем в работе [7]. Формулы (60), (61) для электронов были получены также в статьях [8,9], в которых вычисления проводились с использованием квазиклассических волновых функций. Возникающее в таком подходе суммирование по прицельным параметрам проводится способом, аналогичным применяемому выше. Все результаты для скалярных частиц получены впервые.

5. Предложенный подход может быть применен к рассмотрению процесса излучения в любом внешнем поле. Мы рассмотрим ниже поля, убывающие с расстоянием не медленнее чем кулоновское (случай II).

При $q \gg q_{min}$ остается в силе формула (28), причем $dW_\gamma(\vec{k})$ получается интегрированием по траектории в виде "угла" и не зависит от вида поля (от поля зависит сечение $d\sigma(\vec{q}_\perp)$ в (28)). Поэтому для $dW_\gamma(\vec{k})$ можно использовать выражения, полученные в кулоновском поле.

В области $q\sim q_{min}$ сохраняют силу формулы (31), (32), куда следует подставить фазу рассеяния в данном поле:

$$\chi = -\int_{-\infty}^{\infty} V(\rho, z)\,dz \qquad (62)$$

Вычислим теперь матричный элемент $\mathcal{M}(\vec{\rho})$ в центрально симметричном поле $V(r)$. Учитывая, что в этой области $R(t)$ может быть представлена в виде (ср. (33), (59))

$$R(t) = \vec{\mathcal{D}}\,\vec{\rho}(t) \qquad (63)$$

где $\vec{\mathcal{D}}$ не зависит от времени. Подставляя в выражение для матричного элемента

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{E_1}{E_2}kx(t)} R(t)\,dt \tag{64}$$

и используя явный вид $\vec{p}(t)$ (А1) и $kx(t)$ (А7) получаем с нашей точностью

$$\mathcal{M}(\vec{\rho}) = \frac{i}{q_{min}} \frac{\vec{\mathcal{D}}\vec{\rho}}{\rho} \frac{d}{d\rho} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{iq_{min}t} V\left(\sqrt{\rho^2+t^2}\right) \tag{65}$$

Подставляя это выражение и фазу (62) в формулу (32) получаем

$$\mathcal{M}(\vec{q_\perp}) = \mathcal{M}^B A(q,y) \tag{66}$$

где
$$\mathcal{M}^B = \frac{i}{q_{min}} \vec{\mathcal{D}}\vec{q_\perp}$$

$$A(q,y) = \frac{1}{q_\perp} \int \rho\, d\rho\, J_1(q\rho\sqrt{1-y})\, e^{i\chi(\rho)} \frac{d}{d\rho} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iq_{min}t} V\left(\sqrt{\rho^2+t^2}\right) dt \tag{67}$$

так что сечение излучения

$$d\sigma_\gamma = |\mathcal{M}^B|^2 d^3k\, |A(q,y)|^2 d^2q \tag{68}$$

В области $y \ll 1$

$$|A(q,y)|^2 d^2q \longrightarrow d\sigma(\vec{q_\perp}) \tag{69}$$

что следует прямо из представления (67).

Поскольку в области $q^2 \gg q^2_{min}$ справедлива формула

$$d\sigma_\gamma = dW_\gamma\, d\sigma(\vec{q_\perp}) \tag{70}$$

а dW_γ при $q \sim q_{min}$

$$dW_\gamma \to |\mathcal{M}^B|^2 d^3k \tag{71}$$

то общее выражение для сечения излучения фотона релятивистской частицей во внешнем поле $V(r)$ в случае II можно представить в виде

$$d\sigma_\gamma = dW_\gamma(\vec{k})\, |A(q,y)|^2 d^2q \tag{72}$$

где dW_γ получается интегрированием по траектории в виде "угла" и совпадает с вероятностью излучения с данным переданным импульсом, вычисленным в борновском приближении. В кулоновском поле из этой формулы следуют все полученные выше результаты.

Можно выписать также общие формулы, типа (72), и для случая I. Поскольку в этом случае вклад даёт только небольшой участок траектории, то расчёт удаётся провести в общем виде до явного выражения для спектра излученных фотонов (см. [1]):

$$\frac{dE}{d\alpha} = -\frac{e^2m^2}{4\sqrt{3}\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^3} \left[\int_{2\alpha/3\chi}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx + \delta_{e,s} \frac{\alpha^2}{1+\alpha} K_{2/3}\left(\frac{2\alpha}{3\chi}\right)\right] dt \tag{73}$$

где $\alpha = \frac{\omega}{E-\omega}$, $\chi = \frac{1}{m}|\dot{\vec{v}}|\gamma^2$, $\delta_s = 0$ для частиц со спином 0 и $\delta_e = 1$ для частиц со спином 1/2. В классическом пределе эта формула переходит в известное выражение, приведенное, например, в [10].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Траектория частицы во внешнем поле в приближении малых углов

Рассмотрим траекторию частицы в приближении малых углов, которое существенно для данной работы. В случае классической траектории зависимость импульса от времени во внешнем поле $V(r)$ в первом приближении по переданному импульсу определяется выражением:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_1 - \vec{q}(t) = \vec{p}_1 + \int_{-\infty}^{t} e\frac{\partial V}{\partial \rho^2} 2\vec{\rho}\, dt \qquad (A1)$$

где ρ прицельный параметр, .

С этой же точностью отклонение траектории частицы от прямолинейной в поле $V(r)$ есть:

$$\vec{x}_q(t) = -\int_0^t \frac{1}{E}\vec{q}\, dt = \int_0^t \frac{1}{E} dt' \int_0^{t'} e\frac{\partial V}{\partial \rho^2} 2\vec{\rho}\, dt' + const\cdot t \qquad (A2)$$

Заменой порядка интегрирования это выражение можно привести к виду:

$$x_q(t) = \int_0^t dy\,(t-y)\, e\,\frac{\partial V(\sqrt{\rho^2+v^2y^2})}{\partial \rho^2} 2\vec{\rho} = \frac{2e\vec{\rho}}{E}\left[t\int_0^t \frac{\partial V}{\partial \rho^2} dy - \frac{1}{2}V(r)\right] + const\cdot t \qquad (A3)$$

В дальнейшем нас будет интересовать величина $kx(t)$, которую с учётом сказанного выше можно представить в виде:

$$kx(t) = c_1 t + c_2 \frac{E}{2\rho^2}(\vec{\rho}\,\vec{x}_q(t)) + kx_0 \qquad (A4)$$

где kx_0 – константа, множитель $E/2\rho^2$ выделен для удобства. Коэффициенты C_1 и C_2 можно определить из условий при $t = \pm\infty$. При $t \to -\infty$, $kx \to (kv_1)t$,

откуда

$$(kv_1) = c_1 - c_2\int_0^\infty e\frac{\partial V}{\partial \rho^2} dy = c_1 - c_2 d \qquad (A5)$$

при $t \to +\infty$, $kx \to (kv_f)t$ ($v_f = v(t=+\infty)$),

тогда

$$(kv_f) = c_1 + c_2 d \qquad (A6)$$

В итоге получаем

$$kx = \frac{1}{2}(kv_1 + kv_f)t + \frac{1}{2}(kv_f - kv_1)g(t) + kx_0 \qquad (A7)$$

$$g(t) = \frac{E}{2\rho^2 d}(\vec{\rho}\,\vec{x}_q(t)) \qquad (A8)$$

Следует отметить, что величина

$$g(t) = \left(\int_0^\infty \frac{\partial V}{\partial \rho^2} dy\right)^{-1}\left[t\int_0^t \frac{\partial V}{\partial \rho^2} dy - \frac{1}{2}V(r)\right] \qquad (A9)$$

если положить $v^2 = 1$ (с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$) не зависит от динамических переменных частицы, а только от вида поля и прицельного параметра $\vec{\rho}$.

В случае кулоновского поля имеем

$$g(t) = \sqrt{\rho^2 + t^2} \qquad (A10)$$

Последний результат получается, естественно, из точного выражения для траектории в кулоновском поле в случае малых углов отклонения.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Распутывание комбинации $e^{-ikx(t_2)}e^{ikx(t_1)}$

Представим $e^{-ikx(t_2)}$ в виде

$$e^{-ikx(t_2)} = L\, e^{-ikx(t_1)} \qquad (Б1)$$

где L оператор, к определению которого сводится задача. Заменяя для краткости

$$a = -ikx(t_1)$$
$$b = i[kx(t_1) - kx(t_2)] \qquad \text{(Б2)}$$

имеем

$$e^{\xi(a+b)} = L(\xi)\, e^{\xi a} \qquad \text{(Б3)}$$

где ξ - параметр. Оператор $L(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dL}{d\xi} = L(\xi)\, e^{\xi a} b e^{-\xi a} \qquad \text{(Б4)}$$

Найдем теперь

$$e^{\xi a} b e^{-\xi a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} [a,[a\ldots[a,b]\ldots]] \qquad \text{(Б5)}$$

Коммутатор $[a,b]$ можно вычислить, если использовать явный kx вид (см.формулу (А7)). Операторы kv_1 и kv_f коммутируют друг с другом. Функция $g(t)$ (как отмечалось в приложении А) с точностью до членов $\sim 1/\gamma^2$ является с-числом. По этой причине вычисление коммутатора $[a,b]$ сводится к вычислению $[kx_0, kv_1]$, $[kx_0, kv_f]$. Используя соотношения

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}, \quad [x_{0i}, p_k] = i\delta_{ik} \qquad \text{(Б6)}$$

получаем

$$[kx_0, kv_1] = \frac{2i\omega}{\varkappa_1} kv_1$$
$$[kx_0, kv_f] = \frac{2i\omega}{\varkappa_f} kv_f \qquad \text{(Б7)}$$

Отсюда с точностью до членов $1/\gamma^2$ получаем

$$[a,b] = \frac{2\omega}{\varkappa} b \qquad \text{(Б8)}$$

Отметим, что входящие в (Б8) операторы $\varkappa$ и b коммутируют между собой. Учитывая, что

$$[a, \varkappa^{-1}] = \frac{\omega}{\varkappa^2} \qquad \text{(Б9)}$$

получаем

$$e^{\xi a} b e^{-\xi a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} (n+1)! \left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)^n b = \frac{b}{\left(1-\frac{\xi\omega}{\varkappa}\right)^2} \qquad \text{(Б10)}$$

Решение дифференциального уравнения (Б4) с граничным условием $L(0) = 1$ имеет вид:

$$L(\xi) = e^{\frac{\xi b \varkappa}{\varkappa - \omega\xi}} \qquad \text{(Б11)}$$

Тогда, учитывая (Б1), (Б2) получаем

$$e^{-ikx(t_2)} e^{ikx(t_1)} = L(1) = e^{-i\frac{\varkappa}{\varkappa-\omega}[kx(t_2)-kx(t_1)]} \qquad \text{(Б12)}$$

ЛИТУРАТУРА

1. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ, 53, 1478, 1967.
2. V.N.Baier,V.M.Katkov.Phys.Lett.25A,492,1967.
3. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. М.1959.
4. R.Glauber.Lectures in Theoretical Physics.V.1. Boulder,Univ.of Colorado.Ins.Pub.New York.1959.
5. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.
6. H.A.Bethe,L.C.Maximon.Phys.Rev.93,768,1954
7. H.Olsen.Phys.Rev.99,1335,1955.
8. H.Olsen,L.C.Maximon,H.Wergeland.Phys.Rev.106,27, 1957.
9. H.Olsen,L.C.Maximon.Phys.Rev.114,887,1959
10. Л.Д.Ландау. Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., 1967.

Ответственный за выпуск В.С.Фадин

Подписано к печати 14.У1-1968 г.

Усл.1,2 печ.л., тираж 250 экз. Бесплатно.

Заказ № 221

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. нв.