АКАДЕМИЯ НАУК СССР. СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ

препринт 269

В.Н.Байер, В.М.Катков

# К ТЕОРИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ



Новосибирск
1969

В.Н.Байер, В.М.Катков

# К ТЕОРИИ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ В УСКОРИТЕЛЯХ

## А Н Н О Т А Ц И Я

Проведен анализ квантового процесса излучения фотона электроном большой энергии в магнитном поле. Сформулирована квазиклассическая теория воздействия излучения на движение частиц. В рамках этого подхода получены уравнения, описывающие эволюцию системы во времени в неоднородном магнитном поле, где единым образом учтены как классические, так и квантовые члены реакции излучения.

ON THE THEORY OF ACTION OF RADIATION ON ELECTRON MOTION IN ACCELERATOR

V.N.BAIER, V.M.KATKOV

A b s t r a c t

The analysis has been made of quantum process of photon radiation by high energy electron in a magnetic field. Quasiclassical theory of action of the radiation on particle motion has been formulated. Within this approach the equations describing time evolution of a system in an inhomogeneous magnetic field have been obtained in which on a equal basis the quantum and classical terms of radiation reaction have taken into account.

1. Вопрос о воздействии излучения на движение электронов в ускорителях и, в частности, вопрос о взаимоотношении классического и квантового подходов к решению этой задачи широко обсуждался в литературе и вызвал длительную полемику (обзор литературы см. в [1, 2]).

Недавно авторы предложили метод квантового рассмотрения процесса излучения частиц большой энергии в произвольном магнитном поле [3]. В рамках этого метода можно просто и единым образом рассмотреть задачи о воздействии излучения на движение частиц в магнитном поле в целом.

Следует иметь в виду, что квантовые эффекты в магнито-тормозном излучении бывают двух типов: квантование самого движения электрона в магнитном поле (учёт его приводит к поправкам[x)] $\sim \frac{\hbar\omega_0}{E} = \frac{\hbar}{Rm\gamma}$ $\left(\gamma = \frac{E}{m}\right)$ при $E = 1\ Gev$ и $R = 200 cm$ $\hbar/Rm\gamma \sim 10^{-16}$ ) и квантовая отдача при испускании фотона (величина соответствующих эффектов $\sim \frac{\hbar\omega_0}{E}\gamma^3$ ). Поэтому для частиц большой энергии ($\gamma \gg 1$ ), квантованием орбит в ускорителе можно пренебречь (т.е. движение электронов является квазиклассическим) и учитывать только отдачу при излучении фотона. По-существу, задача об излучении в магнитном поле решена только в этом приближении. Свойства излучения существенно зависят от параметра $\chi = \hbar\omega_0\gamma^3/E$, область $\chi \ll 1$ является почти классической (только её мы будем рассматривать в дальнейшем), а область $\chi \gtrsim 1$ - существенно квантовой.

Вероятность излучения фотона в единицу времени в момент времени $t$ даётся выражением [3][xx)]

$$dW = \alpha \frac{d^3k}{(2\pi)^2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

$$\varphi(\tau) = \left[\frac{1+u}{\gamma^2} + \frac{1}{2}\left(1+u+\frac{u^2}{2}\right)\dot{\vec{v}}^2\tau^2\right] \exp\left[\frac{-iu\tau E}{\hbar}\left(1-\vec{n}\vec{v}+\frac{\dot{\vec{v}}^2\tau^2}{24}\right)\right]$$

x) Используется система единиц $c=1$.

xx) Здесь и в дальнейшем мы будем сохранять только старшие члены разложения по $1/\gamma$ .

где $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar} = \frac{1}{137}$, $u = \frac{\hbar\omega}{E-\hbar\omega}$, $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\omega}$ – направление вылета фотона, $\omega$ – частота фотона, $\vec{v}$, $\dot{\vec{v}}$ – скорость и ускорение электрона. Это выражение справедливо при любых $\chi$, при переходе к классическому пределу $u \sim \frac{\hbar\omega}{E} \ll 1$. В формуле (1) содержится временное описание процесса излучения, причём подынтегральная функция $\varphi(\tau)$ даёт зависимость от времени $\tau$ плотности вероятности излучения фотона. Эта функция является быстроосциллирующей, так что в интеграл (1) дают вклад $\tau \lesssim \frac{1}{|\dot{\vec{v}}|\gamma} \sim \frac{1}{\omega_0\gamma}$, что и определяет время формирования фотона. Тогда в лабораторной системе характерные частоты излучаемых фотонов вследствие эффекта Допплера оказываются $\omega \sim \frac{1}{\tau}\gamma^2 \sim \omega_0\gamma^3$. Здесь предполагалось, что изменением магнитного поля на длине формирования фотона можно пренебречь. При интегрировании $\varphi(\tau)$ совместно с произвольной плавной функцией $q(\tau)$ имеем:

$$\int q(\tau)\varphi(\tau)d\tau \simeq q(0)\left(1+\mathrm{const}\,\frac{q}{\gamma}\right)\int\varphi(\tau)d\tau$$

где $\Omega_q = \omega_0 q = \left|\frac{q'(0)}{q(0)}\right|$ – характерная частота изменения функции $q(\tau)$. Отсюда видно, что с точностью до членов $\sim \frac{q}{\gamma}$ плотность вероятности излучения обладает свойствами $\delta$ – функции.

Среднее число фотонов, излученных в единицу времени определяется $W = \int dW$, так что среднее время между излучениями фотона есть $1/W \sim 1/\alpha\gamma\omega_0$. Таким образом картина излучения во времени представляет всплески длительностью $\sim 1/\omega_0\gamma$, разделенные средним интервалом $\sim 1/\alpha\gamma\omega_0$, а возможность представления её в виде последовательности отдельных всплесков связана с малостью константы взаимодействия $\alpha$. Мы рассматривали выше излучение фотона заданным ("классическим) током. Как известно (см., напр., [4]) вероятность излучения фотонов заданным током в квантовой электродинамике описывается распределением Пуассона, а процесс последовательного излучения фотонов (т.е.распределение во времени указанных выше всплесков) является статистически независимым.



2. Найдем в рамках метода [3] изменение среднего от функции оператора импульса $F(\hat{p}_\mu(t))$ для состояний до и после излучения $|t_0\rangle$ и $|t\rangle = \mathcal{U}(t,t_0)|t_0\rangle$, причём $\mathcal{U}(t,t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_{int}(t_1)\ldots$, $H_{int}(t_1)$ гамильтониан взаимодействия частицы в магнитном поле с полем излучения [3]

$$\langle t|F(\hat{p}_\mu(t))|t\rangle - \langle t_0|F(\hat{p}_\mu(t_0))|t_0\rangle = \langle t_0|\mathcal{U}^+F(\hat{p}_\mu(t))\mathcal{U} - F(\hat{p}_\mu(t_0))|t_0\rangle = \langle t_0|\mathcal{U}^+[F(\hat{p}_\mu(t)),\mathcal{U}] + F(\hat{p}_\mu(t)) - F(\hat{p}_\mu(t_0))|t_0\rangle \tag{2}$$

Для вычисления входящего в (2) коммутатора учём, что: 1) с оператором $F(\hat{p}_\mu(t))$ не коммутируют только член $e^{-i\vec{k}\vec{r}(t_1)}$ в $H_{int}(t_1)$; 2) процесс излучения происходит за очень короткое время, так что интервал $t - t_0$ можно выбрать малым и в коммутаторе можно провести разложение по разности времен и оставить только старший член разложения; 3) $\langle t_0|[F(\hat{p}_\mu),\mathcal{U}]|t_0\rangle \simeq 0$

Тогда получаем

$$\langle t_0|\mathcal{U}^+[F(\hat{p}_\mu),\mathcal{U}]|t_0\rangle = = \langle t_0|\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t}dt_2\, H^+_{int}(t_2)H_{int}(t_1)[F(\hat{p}_\mu - \hbar k_\mu) - F(\hat{p}_\mu)]|t_0\rangle \tag{3}$$

Проводя дальнейшие вычисления как в [3] и заменяя операторы в обкладках на их классические значения, получаем

$$\frac{dF(p_\mu)}{dt} = \int dW\left[F(p_\mu(t) - \hbar k_\mu) - F(p_\mu(t))\right] + \left(\frac{dF}{dt}\right)_i \tag{4}$$

где последний член описывает изменение функции $F$, не связанное с излучением. Уравнение (4) есть квазиклассическое обобщение реакции излучения. Область применимости формулы (4) такая же, как формулы (1). С помощью уравнения (4) может быть решена любая задача о воздействии излучения на движение частиц большой энергии ($\gamma \gg 1$) в магнитном поле.

3. Мы применим (1), (4) к динамике электронов в ускорителях, причём нас будут интересовать средние по колебаниям характеристики, в случае, когда они медленно меняются со временем.

Излучение оказывает двоякое воздействие на движение электронов в ускорителе. С одной стороны, для электрона, совершающего малые поперечные колебания, излучение, направленное в основном в угол $\sim 1/\gamma$ вокруг направления скорости, уносит полный импульс, а поскольку возобновляется только продольный импульс, поперечные колебания затухают. При этом радиальная ( $\rho$ ) и фазовая ( $X$ ) потенциальные ямы, в которых движутся частицы в ускорителе зависят от энергии, так что изменение энергии также может приводить к затуханию или раскачке $\rho$ и $X$ - колебаний[x]. С другой стороны, вследствие дискретного характера процесса излучения, энергия (и, следовательно, равновесный радиус $R$ ) меняется скачком, совокупность таких толчков приводит к статистической раскачке $\rho$ и $X$ - колебаний (т.н. квантовая раскачка). Раскачка вертикальных $z$ -колебаний происходит за счёт малой поперечной отдачи электрона при излучении, для $\rho$ и $X$ - колебаний эффектом отдачи можно пренебречь. На явление квантовой раскачки впервые указали Соколов и Тернов (см. [2]).

Перейдем к конкретному рассмотрению воздействия излучения на колебания. Для простоты предположим, что колебания в отсутствие излучения независимы и что полная энергия электрона в среднем не меняется. В данной задаче удобно воспользоваться гамильтоновым формализмом. Подставляя энергию колебательного движения

$$\mathcal{H}_j = \frac{p_j^2}{2E} + U_j(q_j) = T_j + U_j \qquad (5)$$

в (4), получаем

$$\frac{d\mathcal{H}_j}{dt} = \frac{1}{2E}\int(-2p_j\hbar k_j + \hbar^2 k_j^2)\,dW + \int[U_j(q_j(E-\hbar\omega)) - U_j(q_j(E))] + \frac{dU_j}{dq_j}\frac{dq_j}{dE}\left(\frac{dE}{dt}\right)_i \qquad (6)$$

---

x) Мы будем опять пренебрегать квантованием колебаний, поскольку учёт его даёт пренебрежимо малые поправки $\sim \hbar\omega_j/E_j$, где $\omega_j$ и $E_j$ - частота и энергия соответствующего колебательного движения.



Сохраняя старшие члены разложения до второго порядка по ( $\hbar\omega/E$ ) и учитывая, что $\dot E = -I + \left(\frac{dE}{dt}\right)_i$ где $I = \int\hbar\omega\,dW$ - интенсивность излучения, и что $\int\hbar k_j\,dW \simeq (v_j + \mathrm{const}\,\frac{1}{\gamma^2})\,I$, получаем

$$\frac{d\mathcal{H}_j}{dt} = -2T_j\frac{I}{E} + \frac{1}{2E}\int\hbar^2 k_j^2\,dW + \frac{dU_j}{dq_j}\frac{dq_j}{dE}\dot E + \frac{1}{2}\frac{d^2U_j}{dq_j^2}\left(\frac{dq_j}{dE}\right)^2\int\hbar^2\omega^2\,dW \qquad (7)$$

Принимая во внимание, что $\dot E \simeq \frac{d\dot E}{dq_j}q_j$ ($\dot E_{q=0} = 0$) проводя усреднение по времени в предположении, что $I/E \ll \omega_j$ и воспользовавшись теоремой вириала $\overline{\frac{dU_j}{dq_j}q_j} = 2\overline{T_j}$, получаем

$$\frac{d\mathcal{H}_j}{dt} = \left(\frac{dq_j}{dE}\frac{d\dot E}{dq_j} - \frac{I}{E}\right)2\overline{T_j}(\mathcal{H}_j) + \frac{\hbar^2}{2E}\overline{\int k_j^2\,dW} + \overline{\frac{1}{2}\frac{d^2U_j}{dq_j^2}\left(\frac{dq_j}{dE}\right)^2\int\hbar^2\omega^2\,dW} \qquad (8)$$

Полученная формула применима для любого потенциала. Для осцилляторных потенциалов $2\overline{T_j} = E_j$ имеем

$$\frac{dE_\rho}{dt} = \left(-\frac{dR}{dE}\frac{d\dot E}{dr} - \frac{I}{E}\right)E_\rho + \frac{55\alpha}{48\sqrt3}\hbar\omega_\rho\left(\frac{\omega_\rho}{\omega_0}\right)\left(\frac{d\ln R}{d\ln E}\right)^2\frac{\omega_0^2}{m}\gamma^6 \qquad (9)$$

$$\frac{dE_X}{dt} = \frac{dR}{dE}\left(\frac{d\dot E}{dr} + \frac{d\dot E}{dE}\frac{dE}{dR}\right)E_X + \frac{55\alpha}{48\sqrt3}\hbar\omega_X\left(\frac{\omega_X}{\omega_0}\right)\left(\frac{d\ln R}{d\ln E}\right)^2\frac{\omega_0^2}{m}\gamma^6 \qquad (10)$$

$$\frac{dE_z}{dt} = -\frac{I}{E}E_z + \frac{13\alpha}{48\sqrt3}\hbar\omega_0\frac{\omega_0^2}{m}\gamma^4 \qquad (11)$$

Здесь использовано, что: $\rho = r - R$, $x = R - R_0$ ($R_0$ - радиус равновесной орбиты), $\dot{E} = \dot{E}(r, E(R))$, для $z$ - колебаний потенциальная яма не зависит от энергии. Последний член в каждом из уравнений (8)-(11) даёт квантовую раскачку, осталь - ные члены являются классическими.

Учитывая, что $\frac{d\dot{E}}{dE} = -\frac{dI}{dE}$, имеем для суммы декре - ментов

$$\Gamma_\rho + \Gamma_x = \frac{I}{E}\left(1 + \frac{d\ln I}{d\ln E}\right) \tag{12}$$

- это есть известное утверждение о независимости суммы декрементов от конкретных свойств системы. Предположение о независимости колебаний, сделанное выше, не является принципиальным (хотя оно упрощает расчёт), так что нетрудно получить аналог формулы (8) в общем случае.

4. Взаимоотношение квантовых и классических членов в правой части формул (8)-(11), вследствие их разнородной структуры, вызвало в свое время длительную полемику. С одной стороны, пред - принимались попытки получить члены с классическим затуханием из квантового расчёта с использованием приближенных волновых функций в слабонеоднородном поле (Гутброд; Соколов, Тернов [2]). Следует отметить, что примененный в этих работах метод является по существу квазиклассическим и не может претендовать на большую строгость, чем использованный в этой статье. Такая же работа с использованием теории возмущений и для нерелятивистских частиц была сделана Орловым и Хейфецом [6]. С другой стороны члены, дающие квантовую раскачку, были получены Коломенским и Лебедевым в предположении о $\delta$ -функционных случайных силах (естественно, только для низшего порядка по $\hbar$). Как мы видели, задача является квазиклассической, так что такой подход является адекватным, а сделанные предположения следуют из квантовой электродинамики, после чего проблема квантомеханического обоснования естественно снимается.

Неоднократно высказывались предложения изменить характер магнитотормозного излучения в ускорителях за счёт квантовых эффектов (квантование орбит, запреты на переходы в соответствующих потенциальных ямах и т.п.). Мы хотим здесь отметить, что изучение частиц высокой энергии в магнитном поле при произвольных $\vec{r}$ носит квазиклассический характер и определяется только величиной ускорения $|\ddot{\vec{r}}|$ (в случае, когда поле не меняется на длине формирования фотона), в то время как эффекты квантования движения оказывают ничтожно малое влияние на излучение ($\sim \hbar\omega_i / E$), так что попытки квантового подавления магнитотормозного излучения не могут рассчитывать на успех.

Размеры пучков электронов в ускорителе определяются из решения уравнений (8)-(11) или их обобщений для связанных колебаний. В [2] было получено ограничение на величину амплитуды $z$ - колебаний исходя из соотношения $\Delta k = -k\frac{\Delta\ell}{\ell}$ с критерием $\Delta k = -1$. Однако, это соотношение есть следствие сохранения $z$ - компоненты импульса и выполняется с точностью до членов $\sim 1/\gamma$ (за счёт отклонения направления импульса фотона от направ - ления скорости электрона) причём, эти поправки $\sim 1/\gamma$ вступают в игру много раньше области $\Delta k \sim -1$, так что использование критерия $k\Delta\ell/\ell = 1$ неправомочно (заметим, что получающийся "квантовый" критерий не содержит постоянной Планка $\hbar$), а со - отношение $\Delta k = -k\Delta\ell/\ell$ по существу выполняется только в среднем. К тому же ширина уровней $\Gamma \sim \alpha\gamma\hbar\omega_0$ в интересной области высоких энергий $\alpha\gamma > 1$, вообще, больше расстояния между уровнями $\hbar\omega_0$.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю.Ф.Орлову, А.Н.Скринскому за многочисленные дискуссии и ценные замечания.

Литература


1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей, ФМ., 1962.
2. "Синхротронное излучение", ред. А.А.Соколов, И.М.Тернов, Наука, 1966.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, ЖЭТФ, 53, 1478, 1967.
4. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, ФМ, 1959.
5. Ю.Ф.Орлов, С.А.Хейфец. ЖЭТФ, 45, 1225, 1963.