# И Н С Т И Т У Т
## ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР


препринт 298

С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский

# ВРАЩЕНИЕ КАК ВНУТРЕННЕЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДРА

НОВОСИБИРСК

1969

С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский

# ВРАЩЕНИЕ КАК ВНУТРЕННЕЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДРА

## АННОТАЦИЯ

Построена микроскопическая теория вращательных возбуждений атомных ядер. Вращение рассматривается как равноправная ветвь спектра коллективных возбуждений, без привлечения идей принудительного вращения. Метод состоит в последовательном решении операторных уравнений движения и позволяет найти все матричные элементы операторов внутри вращательной полосы и момент инерции, который в адиабатическом приближении совпадает с результатом cranking -модели. Обычные понятия деформированного самосогласованного поля, собственной системы координат ядра и т.д. заранее не предполагаются и естественно возникают в ходе решения. Предлагаемый метод сравнивается с другими подходами.

## 1. Введение

В настоящее время ощущается большая необходимость в единой теоретической модели, одинаково хорошо описывающей как "колебательные", так и "вращательные" состояния ядер, ибо экспериментальные данные все более убеждают нас в условности такого разделения. Теоретическое же описание (здесь мы имеем в виду микроскопические теории) колебаний и вращений основывается на принципиально разных подходах. Структура колебательного кванта (фонона) - когерентная суперпозиция двухквазичастичных возбуждений. Квазибозонный характер фононов определяет почти эквидистантный спектр. Очевидно, что подобное описание вращательных состояний невозможно, и мы вынуждены использовать в той или иной мере искусственные приёмы "принудительного вращения" ( cranking - модель).

Клейном, Керманом и др. /2/ был сформулирован способ микроскопического описания вращательных состояний путем некоторого обобщения приближения хаотических фаз (обычно используемого при рассмотрении колебаний). Однако этот способ, кроме ряда конкретных возражений, вызывает также чувство принципиальной неудовлетворенности из-за существенного использования идеологии cranking - модели.

Пример последовательного микроскопического описания вращательных возбуждений представляет модель Эллиотта /1/, где вращательные состояния возникают как следствие взаимодействия частиц в сферической потенциальной яме. Однако сугубо специальный выбор потенциальной ямы и взаимодействия (который допускает точное решение задачи методами теории групп) исключают прямое обобщение на реальные модели.

В настоящей работе предлагается микроскопический способ описания вращений, который, с одной стороны, имеет идейную общность с подходом Эллиотта (от частиц, взаимодействующих в сферической потенциальной яме, - к вращательным возбуждениям), а с другой стороны, является непосредственным обобщением стандартных методов описания колебаний /3/. Мы рассматриваем нелинейные уравнения движения для парных операторов, которые замыкаются в пространстве состояний одной вращательной полосы. В отличие от работы /2/, всё рассмотрение проводится для четно-четного ядра без использования каких-либо предположений о со -

седних нечетных ядрах. Метод даёт возможность получить матричные элементы любых операторов между вращательными состояниями, а также величину момента инерции.

Чтобы не усложнять изложения и продемонстрировать физические идеи метода наиболее наглядным образом, мы используем простую (но достаточно популярную вследствие своей эффективности) модель "спаривание плюс квадрупольное взаимодействие". Как будет очевидно из результатов, обобщение для реалистического эффективного взаимодействия не представляет трудностей. С той же целью наглядности и простоты мы начнем со случая одного изолированного $j$ - уровня (разделы 3–5). Обобщение на реальную схему одночастичных уровней (в исходном сферическом самосогласованном поле) проводится в разделе 6.

## 2. Постановка задачи. Основные уравнения

Мы будем рассматривать систему нуклонов в некоторой сферически симметричной потенциальной яме. Пусть одночастичные собственные функции $|1 m_1\rangle \equiv |n_1 \ell_1 j_1 m_1\rangle$, а $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon(n_1, \ell_1, j_1)$ - соответствующие одночастичные энергии. Гамильтониан системы запишем в виде

$$H = \sum_1 \varepsilon_1 N_1 - \frac{1}{2} \varphi P^+ P - \frac{1}{2} \varkappa \sum_\mu Q^+_\mu Q_\mu , \qquad (2.1)$$

где введены оператор полного квадрупольного момента

$$Q_\mu = \sum_{12} q_{12} B_{2\mu}(12), \qquad q_{12} = (-1)^{j_1 - j_2} q_{21} \qquad (2.2)$$

и оператор спаривания

$$P = \sum_1 g_1 A_{00}(11), \qquad g_1 = \sqrt{2 j_1 + 1}, \qquad (2.3)$$

выраженные через парные операторы [1)]

---

1) Здесь и далее $\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}$ - $3j$ - символы Вигнера /4/, $a^+_m(1)$ и $a_m(1)$ - операторы рождения и уничтожения фермионов. Заметим, что определение операторов в работе /3/ отличается от (2.2) лишним множителем $\sqrt{2k+1}$.

$$\mathcal{A}_{k\mu}(12)=\sum_{m_1m_2}(-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2}\begin{pmatrix} j_1 & k & j_2\\ -m_1 & \mu & m_2\end{pmatrix} a_{-m_2}(2)\, a_{m_1}(1),$$

$$B_{k\mu}(12)=\sum_{m_1m_2}(-1)^{j_1-m_1}\begin{pmatrix} j_1 & k & j_2\\ -m_1 & \mu & m_2\end{pmatrix} a^{+}_{m_2}(2)\, a_{m_1}(1), \tag{2.4}$$

$$N_1=\sum_m a^{+}_m(1)\, a_m(1)=g_1\, B_{00}(11).$$

В дальнейшем удобнее пользоваться линейными комбинациями

$$\mathcal{A}^{(\pm)}_{k\mu}(12)=\frac{1}{2}\left\{\mathcal{A}_{k\mu}(12)\pm(-1)^{k-\mu}\mathcal{A}^{+}_{k-\mu}(12)\right\}, \tag{2.5}$$

$$B^{(\pm)}_{k\mu}(12)=\frac{1}{2}\left\{B_{k\mu}(12)\pm(-1)^{k-\mu}B^{+}_{k-\mu}(12)\right\},$$

которые обладают следующими свойствами симметрии

$$\mathcal{A}^{(\pm)}_{k\mu}(12)=(-1)^{j_1-j_2+k}\mathcal{A}^{(\pm)}_{k\mu}(21)=\pm(-1)^{k-\mu}\left(\mathcal{A}^{(\pm)}_{k-\mu}(12)\right)^{+},$$

$$B^{(\pm)}_{k\mu}(12)=\pm(-1)^{j_1-j_2+k}B^{(\pm)}_{k\mu}(21)=\pm(-1)^{k-\mu}\left(B^{(\pm)}_{k-\mu}(12)\right)^{+}. \tag{2.6}$$

Отметим, что оператор полного момента системы выражается через $B^{(-)}_1$ :

$$J_\lambda=\sum_1\sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1+1)}\; B^{+}_{1\lambda}(11). \tag{2.7}$$

Используя коммутационные соотношения для операторов (2.4) (см./3/), получим уравнения движения

$$\left[\mathcal{A}^{(\pm)}_{k\mu}(12),H\right]_-=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\mathcal{A}^{(\mp)}_{k\mu}(12)-\varphi g_1\delta_{k0}\delta_{\mu0}\delta_{12}P^{(\mp)}$$

$$+\varphi\left\{\left[B^{(+)}_{k\mu}(12),P^{(+)}\right]_{\mp}+\left[B^{(+)}_{k\mu}(12),P^{(-)}\right]_{\pm}\right\}$$

$$+\varkappa\frac{(-1)^{j_1-j_2+k}+\hat{P}_{12}}{2}\sum_{\ell 3\lambda\mu'}(-1)^{\ell+\mu}\begin{pmatrix} k & \ell & 2\\ -\mu & \lambda & \mu'\end{pmatrix}(2\ell+1)\begin{Bmatrix} k & 2 & \ell\\ j_3 & j_2 & j_1\end{Bmatrix} q_{32}\left[\mathcal{A}^{(\mp)}_{\ell\lambda}(13),Q_{\mu'}\right]_+; \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
\left[B^{(\pm)}_{k\mu}(12), H\right]_- &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B^{(\mp)}_{k\mu}(12) \\
&\mp \frac{1 \pm 1}{2} \left\{ \left[\mathcal{A}^{(+)}_{k\mu}(12), P^{(-)}\right]_+ - \left[\mathcal{A}^{(-)}_{k\mu}(12), P^{(+)}\right]_+ \right\} \\
- \varkappa \frac{(-1)^{j_1 - j_2 + k} \pm \hat{\mathcal{P}}_{12}}{2} & \sum_{\ell 3 \lambda \mu'} (-1)^{\ell + \mu} \begin{pmatrix} k & \ell & 2 \\ -\mu & \lambda & \mu' \end{pmatrix} (2\ell + 1) \begin{Bmatrix} k & 2 & \ell \\ j_3 & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} q_{32} \left[B^{(\mp)}_{\ell\lambda}(13), Q_{\mu'}\right]_+ .
\end{aligned}
$$

Здесь $\hat{\mathcal{P}}_{12}$ – оператор перестановки индексов $1 \leftrightarrow 2$, $[\ ,\ ]_{\mp}$ означает коммутатор или антикоммутатор.

Отметим, что имеющиеся в первой паре уравнений (2.8) коммутаторы $\left[B^{(+)}_{k\mu}, P^{(\pm)}\right]_-$ могут быть вычислены явно и дают лишь малую $\left(\sim (2j+1)^{-1}\right)$ поправку к оболочечным энергиям $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, не приводя ни к каким новым эффектам. В дальнейшем мы опустим эти несущественные члены, оставляя лишь антикоммутаторы $\left[B^{(+)}_{k\mu}, P^{(\pm)}\right]_+$.

Мы будем искать решение уравнений (2.8) при следующих предположениях:

( $i$ ) среди стационарных состояний системы можно выделить одну или несколько последовательностей ("полос"), которые связываются между собой аномально большими матричными элементами квадрупольного момента $Q_\mu$, причем все состояния $|JM\rangle$ внутри полосы однозначно характеризуются моментом $J$ и его проекцией $M$ ;

( $ii$ ) энергетические интервалы между состояниями полосы меньше характерных энергий одночастичных возбуждений. Мы предполагаем также, что диагональные матричные элементы от оператора спаривания $P$ много больше недиагональных, что, по существу, и является характерной особенностью эффекта спаривания[2].

Предположение ( $i$ ) позволяет свести уравнения (2.8) к замкнутой системе для матричных элементов парных операторов

---

2) При этом, как обычно, мы не будем следить за точным сохранением числа частиц ; среднее число частиц регулируется химическим потенциалом, который мы считаем включенным в $\varepsilon_1$ .

между состояними одной полосы. Действительно, это предположение оправдывает приближенное расщепление произведения двух операторов, одним из которых является $Q_\mu$ :

$$\langle a|[A_{\iota\lambda}, Q_\mu]_+|b\rangle \equiv \langle J_a M_a|[A_{\iota\lambda}, Q_\mu]_+|J_b M_b\rangle$$

$$\approx \sum_{(c)}\left\{\langle J_a M_a|A_{\iota\lambda}|J_c M_c\rangle\langle J_c M_c|Q_\mu|J_b M_b\rangle + \langle J_a M_a|Q_\mu|J_c M_c\rangle\langle J_c M_c|A_{\iota\lambda}|J_b M_b\rangle\right\} \tag{2.9}$$

( состояния $|c\rangle \equiv |J_c M_c\rangle$ принадлежат той же полосе ). Для произведения двух компонент квадрупольного момента $Q_\mu Q_{\mu'}$ из условия их коммутативности имеем

$$\sum_{(c)}\left\{\langle J_a M_a|Q_{\mu'}|J_c M_c\rangle\langle J_c M_c|Q_{\mu'}|J_b M_b\rangle - \langle J_a M_a|Q_{\mu'}|J_c M_c\rangle\langle J_c M_c|Q_\mu|J_b M_b\rangle\right\} = 0 \tag{2.10}$$

Это равенство оказывается достаточным для определения зависимости матричных элементов $\langle a|Q_\mu|b\rangle$ от квантовых чисел $J_{a,b}$ и $M_{a,b}$. Зависимость от магнитных квантовых чисел $M_a, M_b$ матричных элементов любого тензорного оператора $T_{k\mu}$ даётся, естественно, теоремой Вигнера - Эккарта /4/:

$$\langle a|T_{k\mu}|b\rangle = (-1)^{J_a - M_a - \mu}\begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ -M_a - \mu & \mu & M_b \end{pmatrix}(a\|T_k\|b). \tag{2.11}$$

Отделяя в (2.10) зависимость от проекций момента, получим систему уравнений для приведенных матричных элементов $(a\|Q\|b)$

$$[1-(-1)^L]\sum_{J_c}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & L \\ J_a & J_b & J_c \end{Bmatrix}(a\|Q\|c)(c\|Q\|b) = 0 \tag{2.10'}$$

Легко видеть, что система (2.10') удовлетворяется матричными элементами вида

$$(a\|Q\|b) = Q\sqrt{(2J_a+1)(2J_b+1)}\,(-1)^{J_a - K}\begin{pmatrix} J_a & 2 & J_b \\ -K & 0 & K \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где $Q$ - не зависящая от $J_a$, $J_b$ нормировочная константа, а $K$ - произвольное целое или полуцелое число.

На самом деле выражение (2.12) даёт общее решение уравнений (2.10'). В этом можно убедиться, выбирая в (2.10') последовательно допустимые значения разности $J_a - J_b$ и решая получившуюся систему рекуррентных соотношений для матричных элементов $(J\|Q\|J)$, $(J\|Q\|J\pm1)$, $(J\|Q\|J\pm2)$. Несложная, хотя и громоздкая алгебра приводит тогда к результату (2.12), причем квантовое число $K$ возникает в решении в качестве минимального момента полосы. Таким образом, предложение ($i$) приводит к тому, что внутри вращательной полосы оператор квадрупольного момента имеет матричные элементы (2.12), что в точности совпадает с зависимостью матричных элементов аксиально симметричного ротатора[3].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением основной вращательной полосы четно-четного ядра ( $K=0$ , $J$ - четно).

Рассмотрим теперь, к чему приводит предположение ( $ii$ ). Уравнения движения (2.8) для матричных элементов содержат в левой части малый множитель

$$\omega_{ba} = \langle b|H|b\rangle - \langle a|H|a\rangle \equiv E(J_b) - E(J_a). \tag{2.13}$$

Поэтому в принципе возможны два случая: либо в правых частях (2.8) большие по сравнению с левой частью величины уничтожаются между собой, либо слева и справа стоят величины одного порядка малости.

Очевидно, что согласованными оказываются предположения о том, что $A^{(+)}_{k\mu}$ и $B^{(+)}_{k\mu}$ велики, а $A^{(-)}_{k\mu}$ и $B^{(-)}_{k\mu}$ малы ( $\sim\omega$ )[4].

---

3) Несмотря на формальное тождество, подчеркнем, что в нашем рассмотрении введение какой-либо внутренней системы со своими собственными осями координат совершенно излишне. Это следует иметь в виду и в дальнейшем при сопоставлении наших формул с формулами обобщенной модели.

4) Формально допустимо и противоположное предположение. Однако малость всех $B^{(+)}$ несовместима с большим значением $Q_\mu$. Дискриминация между $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ по существу произвольна и определяется выбором фазы среднего значения оператора спаривания $P$ (наш выбор отвечает действительному значению этой величины, тогда $\langle A^{(-)}_{00}\rangle = 0$, $\langle P^{(-)}\rangle = 0$).

Тогда, пренебрегая слева в (2.8) величинами второго порядка малости $\omega A^{(-)}$ и $\omega B^{(-)}$, мы получаем замкнутые уравнения для больших величин $A^{(+)}$ и $B^{(+)}$. Эти уравнения не содержат $\omega$ и являются по существу статическими. В оставшихся двух уравнениях малость левой части компенсируется линейными по $A^{(-)}$ и $B^{(-)}$ членами в правой части. Таким образом, решение задачи разбивается на два последовательных этапа: для больших и малых величин. Явное решение уравнений, поясняющее и подтверждающее этот анализ, полезно начать со случая одного $j$-уровня. При этом для увеличения фазового объёма (что является необходимым условием существования коллективных эффектов) мы будем считать $j \gg 1$.

### 3. Один $j$-уровень ($j \gg 1$). Статические уравнения

На одном $j$-уровне в силу (2.6) отличны от нуля операторы $A^{(\pm)}_{k\mu}$, $B^{(+)}_{k\mu}$ только для четных $k$, $B^{(-)}_{k\mu}$ – только для нечетных $k$; оператор $Q_\mu$ просто пропорционален $B^{(+)}_{2\mu}$, а $P^{(+)} = g_j A^{(+)}_{00}$. Отделяя зависимость от проекций моментов согласно (2.11), выпишем статические уравнения для приведенных матричных элементов больших величин:

$$(2\varepsilon - f_0\delta_{k0})(a\|A^{(+)}_k\|b) + \frac{f_0}{g}\left(\langle A^{(+)}_{00}\rangle_a + \langle A^{(+)}_{00}\rangle_b\right)(a\|B^{(+)}_k\|b)$$

$$+ F_2\frac{1+(-1)^k}{2}(1+\hat{P}_{ab})\sum_{lJ_c}(2l+1)\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ j & j & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ J_a & J_c & J_b\end{Bmatrix}(a\|A^{(+)}_l\|c)(c\|B^{(+)}_2\|b) = 0;$$

$$\frac{1-(-1)^k}{2}(1-\hat{P}_{ab})\sum_{lJ_c}(2l+1)\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ j & j & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ J_a & J_c & J_b\end{Bmatrix}(a\|B^{(+)}_l\|c)(c\|B^{(+)}_2\|b) = 0 \qquad (3.1)$$

где через $\hat{P}_{ab}$ обозначен оператор замены $a \leftrightarrow b$ и введены константы $f_0 = \varphi g_j^2$, $F_2 = \varkappa q_{jj}^2$. Используя для $(a\|B^{(+)}_2\|b)$ выражение (2.12) (с $\mathcal{K} = 0$), легко убедиться, что зависимость от моментов и для остальных матричных элементов имеет аналогичный вид

$$(a\|A_k^{(+)}\|b) = g\,\alpha_k^{(+)}\sqrt{(2J_a+1)(2J_b+1)}\begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$(a\|B_k^{(+)}\|b) = g\,\beta_k^{(+)}\sqrt{(2J_a+1)(2J_b+1)}\begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

(для удобства выделен множитель $g=\sqrt{2j+1}$, чтобы амплитуды $\alpha_k^{j(+)}$, $\beta_k^{(+)}$ были порядка единицы). При этом второе из уравнений (3.1) удовлетворяется тождественно, а первое после отделения зависимости от $J_a$, $J_b$ сводится к системе уравнений для амплитуд $\alpha_k^{(+)}$, $\beta_k^{(+)}$

$$(2\varepsilon - f_0\delta_{k0})\alpha_k^{(+)} + 2f_0\,\alpha_0^{(+)}\beta_k^{(+)} + 2F_2 g\beta_2^{(+)}\sum_l (2l+1)\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ j & j & j\end{Bmatrix}\begin{pmatrix} 2 & k & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\alpha_l^{(+)} = 0 \qquad (3.3)$$

Поскольку при $j \gg 1$ $6j$-символ $\begin{Bmatrix} 2 & k & l \\ j & j & j\end{Bmatrix} \approx -\frac{1}{g}\begin{pmatrix} 2 & k & l \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, все члены в (3.3) имеют одинаковый порядок величины.

Система зацепляющихся уравнений (3.3) диагонализуется при переходе к новым амплитудам

$$\begin{pmatrix}\alpha^{(+)}(m) \\ \beta^{(+)}(m)\end{pmatrix} = \sum_l (2l+1)(-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j & l & j \\ -m & 0 & m\end{pmatrix} g \begin{pmatrix}\alpha_l^{(+)} \\ \beta_l^{(+)}\end{pmatrix}, \qquad (3.4)$$

$$g\begin{pmatrix}\alpha_l^{(+)} \\ \beta_l^{(+)}\end{pmatrix} = \sum_m (-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j & l & j \\ -m & 0 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{(+)}(m) \\ \beta^{(+)}(m)\end{pmatrix} \qquad (3.4')$$

Подставляя (3.4') в (3.3) и суммируя по $l$, найдем соотношение между амплитудами (3.4)

$$2\varepsilon_m\,\alpha^{(+)}(m) = \Delta\left(1 - 2\beta^{(+)}(m)\right), \qquad (3.5)$$

где

$$\Delta = f_0\,\alpha_0^{(+)}, \qquad \varepsilon_m = \varepsilon - F_2\,\beta_2^{(+)}\,g(-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m\end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

Амплитуды (3.4) допускают наглядную физическую интерпретацию. Прежде всего заметим, что большие матричные элементы, согласно (2.11) и (3.2), можно тождественно переписать в виде

$$\langle a|B^{(+)}_{k\mu}|b\rangle = g\beta_k^{(+)}\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\int d\vec{n}\, Y^*_{J_aM_a}(\vec{n})\, Y_{k\mu}(\vec{n})\, Y_{J_bM_b}(\vec{n}). \tag{3.7}$$

Если от состояний $|JM\rangle$ перейти к эквивалентному представлению ( $J$ – четно ! )

$$|\vec{n}\rangle = \sum_{JM}\frac{1}{2}\left\{Y^*_{JM}(\vec{n}) + Y^*_{JM}(-\vec{n})\right\}|JM\rangle, \tag{3.8}$$

то из (3.7) получим

$$\langle\vec{n}|B^{(+)}_{k\mu}|\vec{n}'\rangle = \delta(\vec{n}-\vec{n}')\, g\beta_k^{(+)}\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, Y^*_{k\mu}(\vec{n}), \tag{3.9}$$

откуда после очевидных преобразований с учётом определения (2.4) найдем

$$\langle\vec{n}|a^+_m a_{m'}|\vec{n}'\rangle = \delta(\vec{n}-\vec{n}')\sum_{k\mu}\sqrt{4\pi(2k+1)}\, Y^*_{k\mu}(\vec{n})(-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j & k & j \\ -m & \mu & m' \end{pmatrix} g\beta_k^{(+)} \tag{3.10}$$

Величина (3.10) (пропорциональная $\delta(\vec{n}-\vec{n}')$ ) имеет смысл матрицы плотности системы в состоянии $|\vec{n}\rangle$ .

Физический смысл состояния $|\vec{n}\rangle$ очевиден. Оно представляет такую суперпозицию состояний с различными моментами, которая описывает деформированное ядро с определенной ориентацией в пространстве. В формуле (3.10) направление квантования одночастичных моментов в операторах $a_m$ и ось деформации системы $\vec{n}$ никак не коррелированы между собой. Будем теперь считать, что оба направления совпадают. Тогда $Y^*_{k\mu}(\vec{n}) \to Y^*_{k\mu}(0) = \delta_{\mu 0}\sqrt{(2k+1)/4\pi}$ , матрица плотности (3.10) диагонализуется и, согласно (3.4), записывается в виде

$$\langle\vec{n}|a^+_m a_{m'}|\vec{n}'\rangle = \delta(\vec{n}-\vec{n}')\,\delta_{mm'}\,\beta^{(+)}_{(m)}, \tag{3.11}$$

откуда следует, что индекс $m$ , формально введенный в (3.4), можно интерпретировать как квантовое число представления одночастичных состояний, в котором диагонализуется матрица плотности. Роль одночастичного гамильтониана в этом представлении играет величина $\mathcal{E}_m$ (3.6), которая, действительно, имеет вид энергии частицы в деформированной яме, причем величина деформации определяется амплитудой $\beta_2^{(+)}$.

Величины $\beta_m^{(+)}$, как видно из (3.11), играют роль чисел заполнения для частиц в деформированной яме. Проделывая для величины $\alpha_m^{(+)}$ выкладки, аналогичные (3.9), (3.10), мы получим вместо (3.11) соотношение

$$\langle\vec{n}|a_m a_{m'}|\vec{n}'\rangle = (-1)^{j-m}\,\delta_{m,-m'}\,\delta(\vec{n}-\vec{n}')\,\alpha^{(+)}(m). \qquad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что величины $\beta^{(+)}(m)$ и $\alpha^{(+)}(m)$ определяют обобщенную матрицу плотности при наличии куперовского спаривания, условие нормировки которой имеет вид /5/[5)]

$$\left[\alpha^{(+)}(m)\right]^2 + \left[\beta^{(+)}(m)\right]^2 = \beta^{(+)}(m). \qquad (3.13)$$

Из соотношений (3.5) и (3.13) следуют известные результаты

$$\beta^{(+)}(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mathcal{E}_m}{E_m}\right), \qquad \alpha^{(+)}(m) = \frac{\Delta}{2E_m}, \qquad (3.14)$$

где $E_m = \sqrt{\mathcal{E}_m^2 + \Delta^2}$ и, следовательно, введенная ранее величина $\Delta$ (3.6) играет роль энергетической щели в одночастичном спектре.

До сих пор величины $\beta_2^{(+)}$ и $\alpha_0^{(+)}$ рассматривались как свободные параметры. На самом деле они определяются из условий согласования, т.е. численно должны быть равны найденным значениям $\alpha_k^{(+)}$ и $\beta_k^{(+)}$ при $k=0$ и $k=2$ соответственно. Используя (3.4) и (3.14), получим обычные условия

---

5) Из определений (3.11), (3.12) следует связь величин $\alpha^{(+)}(m)$ и $\beta^{(+)}(m)$ с $u,v$ - коэффициентами преобразования Боголюбова: $\alpha^{(+)}(m) = u_m v_m$, $\beta^{(+)}(m) = v_m^2$, тогда условие нормировки (3.13) эквивалентно $u_m^2 + v_m^2 = 1$.

$$\beta_2^{(+)} = \frac{1}{g}\sum_m (-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j & 2 & j \\ -m & 0 & m\end{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_m}{E_m}\right), \qquad (3.15)$$

$$\Delta = \frac{f_0}{2j+1}\sum_m \frac{\Delta}{2E_m}. \qquad (3.16)$$

Амплитуды $\beta_k^{(+)}$ высших мультиполей даются выражениями, аналогичными (3.15), но со своим $3j$-символом ($2 \to k$). Для $j \gg 1$ эти $3j$-символы пропорциональны полиномам Лежандра $P_k(m/j)$. Поэтому $\beta_k^{(+)}$ являются последовательными коэффициентами разложения фактора заполнения $\frac{1}{2}(1 - \varepsilon_m/E_m)$. Последний резко меняется вблизи Ферми-поверхности, так что $\beta_k^{(+)}$ не сильно убывают с ростом $k$. Таким образом, матричные элементы переходов $\langle JM|B_{k\mu}^{(+)}|J'M'\rangle$ с $k>2$ имеют тот же порядок величины, что и квадрупольные переходы. Аналогичное заключение справедливо и для $A_{k\mu}^{(+)}$ 6).

Как следует из результатов, полученных в этом разделе, статические уравнения, по существу, описывают "внутреннее" состояние системы (по терминологии обобщенной модели). Однако, в отличие от последней, нам не требовалось никаких априорных соображений о форме ядра, представление о которой естественно возникло в ходе решения.

Чтобы завершить рассмотрение статической задачи, следует обсудить одну формальную непоследовательность, допущенную выше. При ограничении одним $j$-уровнем компоненты квадрупольного момента не коммутируют между собой и, строго говоря, соотношения (2.10) теряют силу. Действительно, точные соотношения коммутации для квадрупольных операторов на одном $j$-уровне имеют вид

$$[B_{2\mu}^{(+)}, B_{2\mu'}^{(+)}]_- = -2\sum_{\ell\lambda}(-1)^{\lambda}\begin{pmatrix} 2 & 2 & \ell \\ \mu & \mu' & -\lambda\end{pmatrix}(2\ell+1)\begin{Bmatrix} 2 & 2 & \ell \\ j & j & j\end{Bmatrix} B_{\ell\lambda}^{(-)} \qquad (3.17)$$

---

6) Это опровергает широко распространенное заблуждение, что учёт $Q_2 \cdot Q_2$ взаимодействия приводит к усилению лишь квадрупольных переходов. Отметим и обратное: наличие, например, больших $E4$-переходов не означает существования $2^4$-польной статической деформации. Последняя, действительно, являлась бы следствием $Q_4 \cdot Q_4$ взаимодействия.

Однако правая часть (3.17) является малой величиной $\left(\sim B^{(-)} g_j^{-3}\right)$ и поэтому в рассматриваемом (статическом) приближении ею следует пренебречь. Структура формулы (3.17) остается той же и для квадрупольных операторов любой природы и в любой схеме одночастичных уровней. Аналогичные соображения справедливы для коммутаторов любых больших величин (все они в правой части содержат малые величины). Поэтому универсальная в данном приближении зависимость (3.2) больших величин от моментов является вполне естественной.

Найденные в этом разделе матричные элементы $A^{(+)}$ и $B^{(+)}$ позволяют вычислить энергию системы путем усреднения гамильтониана (2.1). Очевидно, однако, что в данном приближении все состояния вращательной полосы оказываются вырожденными. Для нахождения расщепления требуется рассмотреть уравнения следующего порядка.

## 4. Один $j$-уровень. Вращательный спектр и момент инерции

Уравнения (2.8) для малых величин $A^{(-)}$, $B^{(-)}$ после перехода к приведенным матричным элементам принимают вид

$$\omega_{ba}\left(a\|A_k^{(+)}\|b\right) = 2\varepsilon\left(a\|A_k^{(-)}\|b\right)$$
$$+\frac{1+(-1)^k}{2}\left(1-\hat{P}_{ab}\right)F_2\sum_{l J_c}(2l+1)\begin{Bmatrix}2 & k & l\\ j & j & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2 & k & l\\ J_a & J_c & J_b\end{Bmatrix}\left(a\|A_2^{(-)}\|c\right)\left(c\|B_2^{(+)}\|b\right); \qquad (4.1)$$

$$\omega_{ba}\left(a\|B_k^{(+)}\|b\right) = \frac{f_0}{g}\left(\langle A_{00}^{(+)}\rangle_a + \langle A_{00}^{(+)}\rangle_b\right)\left(a\|A_k^{(-)}\|b\right)$$
$$+\frac{1+(-1)^k}{2}\left(1-\hat{P}_{ab}\right)F_2\sum_{l J_c}(2l+1)\begin{Bmatrix}2 & k & l\\ j & j & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2 & k & l\\ J_a & J_c & J_b\end{Bmatrix}\left(a\|B_2^{(-)}\|c\right)\left(c\|B_2^{(+)}\|b\right),$$

где для больших величин следует использовать найденные выше статические выражения (3.2). Что касается малых величин, то очевидно, что статические средние от них равны нулю (для $B_k^{(-)}$

формально выписанное выражение (3.2) обращается в нуль в силу нечетности $k$, а матричные элементы $\langle a \| A_k^{(-)} \| b \rangle$, в противоположность (3.2), должны быть антисимметричны относительно замены $a \leftrightarrow b$). На языке обобщенной модели это означает их недиагональность в собственной системе координат. Так как по своему смыслу они являются генераторами вращений, то следует ожидать, что они меняют квантовое число $\mathcal{K}$ на $\pm 1$. Разумно искать поэтому решение уравнений (4.1) в виде

$$(a \| A_k^{(-)} \| b) = g \alpha_k^{(-)} \sqrt{k(k+1)(2J_a+1)(2J_b+1)} \left[ \sqrt{J_a(J_a+1)} \begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \sqrt{J_b(J_b+1)} \begin{pmatrix} J_b & k & J_a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (4.2)$$

$$(a \| B_k^{(-)} \| b) = g \beta_k^{(-)} \sqrt{k(k+1)(2J_a+1)(2J_b+1)} \left[ \sqrt{J_a(J_a+1)} \begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{J_b(J_b+1)} \begin{pmatrix} J_b & k & J_a \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.3)$$

где учтены необходимые требования симметрии.

При операциях с этими выражениями полезны рекуррентные соотношения для $3j$-символов /4/

$$\sqrt{z(z+1)} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{x(x+1)} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{y(y+1)} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Для нечетной суммы $x+y+z$ правая часть (4.4) равна нулю, откуда, в частности, следует, что два члена в выражении (4.3) равны между собой. Для четной суммы $x+y+z$ из трех циклических равенств типа (4.4) следует

$$2\sqrt{x(x+1)y(y+1)} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\left[ x(x+1) + y(y+1) - z(z+1) \right] \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Пользуясь (4.5), выражение (4.2) можно переписать в виде

$$(a \| A_k^{(-)} \| b) = g \alpha_k^{(-)} \left[ J_b(J_b+1) - J_a(J_a+1) \right] \begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

После подстановки (3.2), (4.2) и (4.3) в правые части уравнений (4.1) суммирование по промежуточному моменту $J_c$ легко провести в общем виде, пользуясь (4.4), чтобы убрать лишний множитель $\sqrt{J_c(J_c+1)}$. В результате убеждаемся (с помощью (4.5), (4.6)), что все члены в правых частях (4.1) имеют универсальную зависимость от моментов $J_a, J_b$

$$\begin{pmatrix} J_a & k & J_b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[ J_b(J_b+1) - J_a(J_a+1) \right]. \qquad (4.7)$$

Поэтому уравнения удовлетворяются при условии чисто вращательного спектра

$$\omega_{ba} = \frac{1}{2\mathcal{J}} \left[ J_b(J_b+1) - J_a(J_a+1) \right]. \qquad (4.8)$$

Не зависящие от моментов амплитуды $\alpha_k^{(-)}$, $\beta_k^{(-)}$ должны при этом удовлетворять уравнениям

$$\frac{1}{2\mathcal{J}} \sqrt{k(k+1)}\, \alpha_k^{(+)} = 2\varepsilon \sqrt{k(k+1)}\, \alpha_k^{(-)}$$
$$- \left[1+(-1)^k\right] F_2 \beta_2^{(+)} g \sum_l (2l+1) \begin{pmatrix} 2 & l & k \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & l & k \\ j & j & j \end{Bmatrix} \sqrt{l(l+1)}\, \alpha_l^{(-)};$$

$$\frac{1}{2\mathcal{J}} \sqrt{k(k+1)}\, \beta_k^{(+)} = 2\Delta \sqrt{k(k+1)}\, \alpha_k^{(-)}$$
$$+ \left[1+(-1)^k\right] F_2 \beta_2^{(+)} g \sum_l (2l+1) \begin{pmatrix} 2 & l & k \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & l & k \\ j & j & j \end{Bmatrix} \sqrt{l(l+1)}\, \beta_l^{(-)}. \qquad (4.9)$$

Цепочки связанных уравнений (4.9) диагонализуются с помощью преобразования к новым амплитудам (ср. с (3.4))

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^{(\pm)}(m) \\ \tilde{\beta}^{(\pm)}(m) \end{pmatrix} = \sum_l (2l+1) \sqrt{l(l+1)}\, (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & l & j \\ -m-1 & 1 & m \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} \alpha_l^{(\pm)} \\ \beta_l^{(\pm)} \end{pmatrix}, \qquad (4.10)$$

которые обладают свойствами симметрии

$$\tilde{\alpha}^{(\pm)}(-m-1) = -\tilde{\alpha}^{(\pm)}(m), \quad \tilde{\beta}^{(\pm)}(-m-1) = \mp \tilde{\beta}^{(\pm)}(m). \qquad (4.11)$$

Подстановка (4.10) в (4.9) приводит к

$$\frac{1}{2\mathcal{J}}\tilde{\alpha}^{(+)}(m) = (\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1})\tilde{\alpha}^{(-)}(m),$$
$$\frac{1}{2\mathcal{J}}\tilde{\beta}^{(+)}(m) = (\varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m)\tilde{\beta}^{(-)}(m) + 2\Delta\tilde{\alpha}^{(-)}(m), \tag{4.12}$$

где $\varepsilon_m$ – те же, что и в (3.6). Величины $\tilde{\alpha}^{(+)}(m)$, $\tilde{\beta}^{(+)}(m)$ в принципе известны. Их явные выражения легко получить из (4.10) и (3.4'), воспользовавшись для суммирования по $\ell$ в (4.10) рекуррентным соотношением

$$\sqrt{\ell(\ell+1)}\begin{pmatrix} j_1 & \ell & j_2 \\ -m-1 & 1 & m \end{pmatrix} = -\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\left[\begin{pmatrix} j & \ell & j \\ -m-1 & 0 & m+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & \ell & j \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}\right] \tag{4.13}$$

(в данном случае $j_1 = j_2 = j$ ). В результате получим

$$\tilde{\alpha}^{(+)}(m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\left[\alpha^{(+)}(m+1) - \alpha^{(+)}(m)\right],$$
$$\tilde{\beta}^{(+)}(m) = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\left[\beta^{(+)}(m+1) - \beta^{(+)}(m)\right]. \tag{4.14}$$

Собирая (4.12), (4.14) и (3.14), найдем

$$\tilde{\alpha}^{(-)}(m) = \frac{1}{2\mathcal{J}}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\frac{\Delta(E_m - E_{m+1})}{2E_m E_{m+1}(\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1})},$$
$$\tilde{\beta}^{(-)}(m) = -\frac{1}{2\mathcal{J}}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\frac{E_m E_{m+1} - \varepsilon_m\varepsilon_{m+1} - \Delta^2}{2E_m E_{m+1}(E_m + E_{m+1})}. \tag{4.15}$$

Нам остается определить величину момента инерции $\mathcal{J}$. Для этой цели используем условие согласования: оператор $B^{(-)}_{k\mu}$ при $k=1$ должен совпадать с оператором момента (2.7). Правильная операторная зависимость обеспечивается уже формулой (4.3), в силу которой

$$(a\|B_1^{(-)}\|b) = -2g\beta_1^{(-)}\delta_{ab}\sqrt{J_a(J_a+1)(2J_a+1)} = -2g\beta_1^{(-)}(a\|J\|b). \tag{4.16}$$

Из условия совпадения коэффициентов в формулах (4.16) и (2.7) имеем

$$-2g\beta_1^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)(2j+1)}} = -\sqrt{2}\sum_m (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & 1 & j \\ -m-1 & 1 & m \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{(-)}(m). \qquad (4.17)$$

Подставляя в (4.17) величины $\tilde{\beta}^{(-)}(m)$ из (4.15) и значение $3j$ -символа, находим момент инерции

$$\mathcal{J} = \sum_m \frac{(j-m)(j+m+1)}{2E_m E_{m+1}(E_m+E_{m+1})} \left(E_m E_{m+1} - \varepsilon_m \varepsilon_{m+1} - \Delta^2\right), \qquad (4.18)$$

который совпадает с известным результатом cranking - модели /6/.

## 5. Операторы внутри вращательной полосы

Все результаты, полученные выше, можно представить в несколько иной - операторной - форме. Совокупность матричных элементов $\langle JM| O_{k\mu} |J'M'\rangle$ между состояниями вращательной полосы определяет оператор, действующий в этом ограниченном пространстве. От матричного представления мы можем перейти к дифференциальным операторам $\hat{O}_{k\mu}$, действующим на волновые функции

$$\langle \vec{n}| JM\rangle = \frac{1+(-1)^J}{2} Y_{JM}(\vec{n}) \qquad (5.1)$$

Конкретный вид оператора $\hat{O}_{k\mu}$ определяется, как обычно, требованием тождественности матричных элементов в обоих представлениях

$$\langle JM| O_{k\mu} |J'M'\rangle \equiv \int d\vec{n}\, Y^*_{JM}(\vec{n})\, \hat{O}_{k\mu}\, Y_{J'M'}(\vec{n}). \qquad (5.2)$$

Так как левые части (5.2) были определены выше, то оператор в правой части находится элементарно.

Большим величинам, диагональным в $\vec{n}$ -представлении (3.9), отвечают операторы

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^{(+)}_{k\mu} \\ \hat{B}^{(+)}_{k\mu} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, g\, Y^{*}_{k\mu}(\vec{n}) \begin{pmatrix} \alpha^{(+)}_{k} \\ \beta^{(+)}_{k} \end{pmatrix}. \qquad (5.3)$$

Малым величинам $A^{(-)}$, $B^{(-)}$ соответствуют дифференциальные операторы

$$\hat{A}^{(-)}_{k\mu} = -\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, g\alpha^{(-)}_{k} \left[ (\hat{\vec{L}} Y^{*}_{k\mu}(\vec{n})), \hat{\vec{L}} \right]_{+} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, g\alpha^{(-)}_{k} \left[ Y^{*}_{k\mu}(\vec{n}), \hat{\vec{L}}^{2} \right]_{-} \qquad (5.4)$$

$$\hat{B}^{(-)}_{k\mu} = -\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, g\beta^{(-)}_{k} \left[ (\vec{\nabla}_{0} Y^{*}_{k\mu}(\vec{n})) + \vec{n} Y^{*}_{k\mu}(\vec{n}), \hat{\vec{L}} \right]_{+}, \qquad (5.4')$$

где $\hat{\vec{L}}$ и $\vec{\nabla}_{0} \equiv r\vec{\nabla}$ – обычные дифференциальные операторы момента и градиента, действующие на углы вектора $\vec{n}$. Вообще говоря, коэффициент при продольной шаровой гармонике $\vec{n}\, Y^{*}_{k\mu}(\vec{n})$ в $\hat{B}^{(-)}_{k\mu}$ (5.4') является произвольным, так как внутри полосы с четными моментами его матричные элементы (5.2) тождественно равны нулю. При нашем частном выборе для $k=1$ имеем

$$\hat{\vec{B}}^{(-)}_{1} = -2g\beta^{(-)}_{1} \hat{\vec{L}} \qquad (5.5)$$

что отвечает физическому смыслу этого оператора (ср. с (4.16)).

Операторное представление оказывается очень удобным для получения решения в случае произвольной схемы одночастичных уровней.

## 6. Общее решение для произвольной схемы уровней

От уравнений движения (2.8) для матричных элементов $\langle a|A^{(\pm)}_{k\mu}|\ell\rangle$, $\langle a|B^{(\pm)}_{k\mu}|\ell\rangle$ можно перейти к уравнениям для соответствующих операторов $\hat{A}^{(\pm)}_{k\mu}$, $\hat{B}^{(\pm)}_{k\mu}$. Легко видеть, что эти уравнения формально совпадают с исходными уравнениями (2.8), если в левой части под $H$ понимать оператор $E(\hat{\vec{L}}^{2})$, который очевидным образом соответствует энергии $E(J(J+1))$ в представлении $|JM\rangle$.

В случае многих уровней появляются новые величины, тождественно исчезающие для одного уровня, а именно, $A^{(\pm)}_{\kappa\mu}$ и $B^{(+)}_{\kappa\mu}$ с нечетными $k$ и $B^{(-)}_{\kappa\mu}$ с четными $k$. В силу свойств симметрии (2.6) все эти величины по нашей классификации являются малыми, ибо большими (статические средние от которых отличны от нуля) могут быть только эрмитовские $\vec{R}$-четные величины.

Элементарная проверка подтверждает, что для больших величин по-прежнему справедливо выражение (5.3), где амплитуды $\alpha^{(+)}_k$ и $\beta^{(+)}_k$ зависят теперь от двух одночастичных индексов (1, 2) и должны удовлетворять уравнениям (ср. с (3.3))

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,\alpha^{(+)}_k(12) - \Delta\left(\delta_{k0}\delta_{12} - 2\beta^{(+)}_k(12)\right)$$
$$+\frac{1+(-1)^k}{2}\left[(-1)^{j_1-j_2}+\hat{P}_{12}\right]\varkappa Q\sum_{3l}(2l+1)\begin{Bmatrix} k & 2 & l \\ j_3 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} k & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_{13}\,\alpha^{(+)}_l(32)=0;$$
$$(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,\beta^{(+)}_k(12) \tag{6.1}$$
$$+\frac{1+(-1)^k}{2}\left[(-1)^{j_1-j_2}-\hat{P}_{12}\right]\varkappa Q\sum_{3l}(2l+1)\begin{Bmatrix} k & 2 & l \\ j_3 & j_2 & j_1 \end{Bmatrix}\begin{pmatrix} k & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_{13}\,\beta^{(+)}_l(32)=0,$$

где $Q$ определено в (2.12), а $\Delta=\varphi\sum_1 g_1^2\,\alpha^{(+)}_0(11)$.

Уравнения (6.1) диагонализуются по $k$ и $l$ введением новых амплитуд, подобных (3.4),

$$\beta^{(+)}(m;12)=\beta^{(+)}(m;21)=(-1)^{j_1-j_2}\beta^{(+)}(-m;12)=\sum_k(2k+1)(-1)^{j_1-m}\begin{pmatrix} j_1 & k & j_2 \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}\beta^{(+)}_k(12) \tag{6.2}$$

и аналогично для $\alpha^{(+)}(m)$. (Старые амплитуды $\beta^{(+)}_k$, $\alpha^{(+)}_k$ выражаются через новые $\beta^{(+)}(m)$, $\alpha^{(+)}(m)$ соотношениями, аналогичными (3.4')). После преобразования (6.2) уравнения (6.1) можно записать символически в виде

$$\mathcal{E}\alpha^{(+)}+\alpha^{(+)}\mathcal{E}=\Delta\left(\mathbb{1}-2\beta^{(+)}\right), \tag{6.3}$$
$$\mathcal{E}\beta^{(+)}-\beta^{(+)}\mathcal{E}=0,$$

которые следует понимать как матричные равенства по одночастичным квантовым числам:

$$\mathcal{A}^{(+)} \longrightarrow \alpha^{(+)}_{1m;2m'} = \delta_{mm'}\,\alpha^{(+)}(m;12),$$

$$\mathcal{B}^{(+)} \longrightarrow \beta^{(+)}_{1m;2m'} = \delta_{mm'}\,\beta^{(+)}(m;12), \tag{6.2'}$$

$$\mathcal{E} \rightarrow \varepsilon_{1m;2m'} = \delta_{mm'}\left[\varepsilon_1 \delta_{12} - \varkappa Q q_{12} (-1)^{j_1-m} \begin{pmatrix} j_1 & 2 & j_2 \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}\right]. \tag{6.4}$$

Определим еще матрицу одночастичного квадрупольного момента $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\circ} - \varkappa Q \mathcal{Q}, \qquad q_{1m;2m'} = q_{12}(-1)^{j_1-m}\begin{pmatrix} j_1 & 2 & j_2 \\ -m & 0 & m \end{pmatrix}\delta_{mm'}. \tag{6.4'}$$

Матрица $\mathcal{E}$ в силу симметрии

$$\varepsilon_{1m;2m'} = \delta_{mm'}\,\varepsilon_m(12); \quad \varepsilon_m(12) = \varepsilon_m(21) = (-1)^{j_1-j_2}\,\varepsilon_{-m}(12) \tag{6.5}$$

является эрмитовской. Она имеет смысл одночастичного гамильтониана, включающего самосогласованный потенциал квадрупольной деформации. Пусть одночастичные собственные функции $\psi_\nu$ и соответствующие собственные значения $\varepsilon_\nu$ найдены. В этом $\nu$-представлении, как следует из (6.3), $\mathcal{A}^{(+)}$ и $\mathcal{B}^{(+)}$ (компоненты обобщенной матрицы плотности) также диагонализуются; вычисление их диагональных матричных элементов проводится так же, как в разделе 3, и даёт

$$\alpha^{(+)}_\nu = \frac{\Delta}{2E_\nu}, \quad \beta^{(+)}_\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_\nu}{E_\nu}\right), \quad E_\nu = \sqrt{\varepsilon_\nu^2 + \Delta^2} \tag{6.6}$$

Условие согласования (2.2), определяющее величину $Q$,

$$Q = \sum_{12} q_{12}\,\beta^{(+)}_2(12)$$

можно записать, согласно (6.2) и (6.4'), в виде

$$Q=\sum_{12} q_{12}\sum_{m}(-1)^{j_1-m}\begin{pmatrix} j_1 & 2 & j_2 \\ -m & 0 & m\end{pmatrix}\beta^{(+)}(m;12)=Sp\left(q\,\beta^{(+)}\right)=\sum_{\nu} q_{\nu\nu}\beta^{(+)}_{\nu}. \tag{6.7}$$

Перейдем теперь к вычислению малых величин. Все малые величины, как и в (5.4), представляются линейными комбинациями трех $\vec{n}$ -четных дифференциальных операторов (антикоммутаторы оператора $\hat{\vec{L}}$ с шаровыми векторами трех типов)

$$\hat{R}_{k\mu}[\vec{L}]=-\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\,\frac{1+(-1)^k}{2}\left[\left(\vec{L}\,Y^*_{k\mu}(\vec{n})\right),\hat{\vec{L}}\right]_+\equiv\hat{R}^{(M)}_{k\mu},$$

$$\hat{R}_{k\mu}[\vec{\nabla}_0]=-\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\,\frac{1-(-1)^k}{2}\left[\left(\vec{\nabla}_0 Y^*_{k\mu}(\vec{n})\right),\hat{\vec{L}}\right]_+\equiv\hat{R}^{(E)}_{k\mu},$$

$$\hat{R}_{k\mu}[\vec{n}]=-\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\,\frac{1-(-1)^k}{2}\left[\vec{n}\,Y^*_{k\mu}(\vec{n}),\hat{\vec{L}}\right]_+\equiv\hat{R}^{(c)}_{k\mu} \tag{6.8}$$

Малые величины $\hat{A}^{(-)}_{k\mu}$, $\hat{B}^{(-)}_{k\mu}$ просто выражаются через сумму операторов (6.8)

$$\hat{A}^{(-)}_{k\mu}=\alpha^{(-)}_k(12)\hat{R}_{k\mu},\quad \hat{B}^{(-)}_{k\mu}=\beta^{(-)}_k(12)\hat{R}_{k\mu},$$

$$\hat{R}_{k\mu}=\hat{R}^{(M)}_{k\mu}+\hat{R}^{(E)}_{k\mu}+\hat{R}^{(c)}_{k\mu} \tag{6.9}$$

После подстановки (6.9) в уравнения (2.8) суммирование по проекциям легко проводится с помощью соотношения

$$\sum_{\sigma\lambda}(-1)^{\mu}\begin{pmatrix} k & s & l \\ -\mu & \sigma & \lambda\end{pmatrix}Y^*_{s\sigma}(\vec{n})\begin{pmatrix}\hat{\vec{L}}\\ \vec{\nabla}_0\end{pmatrix}Y^*_{l\lambda}(\vec{n})$$

$$=-\sqrt{\frac{l(l+1)(2l+1)}{k(k+1)(2k+1)}}\sqrt{\frac{2s+1}{4\pi}}\begin{pmatrix} s & l & k \\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\left\{\frac{1+(-1)^{s+l+k}}{2}\begin{pmatrix}\hat{\vec{L}}\\ \vec{\nabla}_0\end{pmatrix}Y^*_{k\mu}(\vec{n})\right.$$

$$\left.+\frac{1-(-1)^{s+l+k}}{2}\begin{pmatrix}\vec{\nabla}_0\\ \hat{\vec{L}}\end{pmatrix}Y^*_{k\mu}(\vec{n})\right\}.$$

В результате правые части уравнений $\left[\hat{A}^{(+)}_{k\mu},\ E(\hat{\vec{L}}^2)\right]_- = \ldots$ и $\left[\hat{B}^{(+)}_{k\mu},\ E(\hat{\vec{L}}^2)\right]_- = \ldots$ оказываются пропорциональными оператору $\hat{R}_{k\mu}$. Для четных $k$ $\hat{R}_{k\mu}$ сводится к оператору $\hat{R}^{(M)}_{k\mu}$, который тождественно можно переписать в виде

$$\hat{R}^{(M)}_{k\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\left[Y^{\times}_{k\mu},\ \hat{\vec{L}}^2\right]_- \qquad (6.10)$$

Из сравнения операторных зависимостей правых и левых частей следует вращательный спектр[7)]

$$E(\hat{\vec{L}}^2) = \frac{1}{2\mathcal{J}}\hat{\vec{L}}^2 . \qquad (6.11)$$

Для нечетных $k$ левые части являются малыми более высокого порядка, поэтому дополнительных условий на операторную часть не возникает. Для амплитуд $\alpha^{(-)}_k(12)$, $\beta^{(-)}_k(12)$ получаем уравнения (ср. с (4.9))

$$\frac{1}{2\mathcal{J}}\sqrt{k(k+1)}\,\alpha^{(+)}_k(12) = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sqrt{k(k+1)}\,\alpha^{(-)}_k(12)$$

$$-\varkappa Q\left[(-1)^{j_1-j_2+k}+\hat{P}_{12}\right]\sum_{3l}(2l+1)(-1)^l\begin{Bmatrix}k&2&l\\ j_3&j_2&j_1\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}2&l&k\\ 0&1&-1\end{pmatrix}q_{13}\sqrt{l(l+1)}\,\alpha^{(-)}_l(32);$$

$$\frac{1}{2\mathcal{J}}\sqrt{k(k+1)}\,\beta^{(+)}_k(12) = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sqrt{k(k+1)}\,\beta^{(-)}_k(12) + 2\Delta\sqrt{k(k+1)}\,\alpha^{(-)}_k(12)$$

$$-\varkappa Q\left[(-1)^{j_1-j_2+k}+\hat{P}_{12}\right]\sum_{3l}(2l+1)(-1)^l\begin{Bmatrix}k&2&l\\ j_3&j_2&j_1\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}2&l&k\\ 0&1&-1\end{pmatrix}q_{13}\sqrt{l(l+1)}\,\beta^{(-)}_l(32),$$

$$(6.12)$$

---

7) Можно было бы пытаться искать решение уравнений в виде более общем, чем (6.9), например, $\hat{B}^{(-)}_{k\mu} \sim \left[\hat{R}_{k\mu},\ f(\hat{\vec{L}}^2)\right]_+$. С помощью таких выражений можно также удовлетворить уравнениям (2.8), с более сложной зависимостью энергии $E$ от $\hat{\vec{L}}^2$. Однако такое усложнение не совместимо с дополнительным условием $\hat{\vec{B}}^{(-)}_1 \sim \hat{\vec{L}}$ (5.5).

где левые части определяются уже найденными большими величинами (которые обращаются в нуль для нечетных $k$ )[8].

Уравнения (6.12) удобно записать в матричном представлении, подобном (6.4):

$$\tilde{\beta}^{(\pm)} \to \tilde{\beta}^{(\pm)}_{1m;2m'} = \sum_k (2k+1)(-1)^{j_1-m} \begin{pmatrix} j_2 & k & j_1 \\ -m' & 1 & m \end{pmatrix} \sqrt{k(k+1)}\, \beta^{(\pm)}_k(12), \quad (6.13),$$

$$\beta^{(\pm)}_k(12) = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \sum_{mm'} (-1)^{j_1-m} \begin{pmatrix} j_2 & k & j_1 \\ -m' & 1 & m \end{pmatrix} \tilde{\beta}^{(\pm)}_{1m;2m'} \quad (6.13')$$

и аналогично для $\tilde{\alpha}^{(\pm)}$. Введенные матрицы имеют следующие свойства симметрии:

$$\tilde{\beta}^{(\pm)}_{1m;2m'} = \mp(-1)^{j_1-j_2} \tilde{\beta}^{(\pm)}_{2m';1m}, \quad \tilde{\alpha}^{(\pm)}_{1m;2m'} = -(-1)^{j_1-j_2} \tilde{\alpha}^{(\pm)}_{2m';1m} \quad (6.14)$$

В матричной форме (6.13) уравнения (6.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathcal{F}} \tilde{\alpha}^{(+)} &= \mathcal{E} \tilde{\alpha}^{(-)} + \tilde{\alpha}^{(-)} \mathcal{E}, \\ \frac{1}{2\mathcal{F}} \tilde{\beta}^{(+)} &= 2\Delta \tilde{\alpha}^{(-)} + \mathcal{E} \tilde{\beta}^{(-)} - \tilde{\beta}^{(-)} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где матрица одночастичного гамильтониана $\mathcal{E}$ определена в (6.4).

Для нахождения матриц $\tilde{\alpha}^{(+)}$, $\tilde{\beta}^{(+)}$ представим в правые части (6.13) и аналогичного выражения для $\tilde{\alpha}^{(+)}$ большие величины $\beta^{(+)}_k$, $\alpha^{(+)}_k$, найденные выше (см. (6.2)) через матрицы $\alpha^{(+)}$, $\beta^{(+)}$ (6.2'). Суммируя в (6.13) по $k$ с помощью рекуррентного соотношения (4.13), найдем

8) В этом приближении величины $\alpha^{(+)}_k$ и $\beta^{(+)}_k$ с нечетными $k$ вообще не входят в уравнения. Нетрудно видеть, что они являются величинами второго порядка малости и определяются из уравнений (2.8) следующего приближения (с учётом левых частей $[A^{(-)}_{k\mu}, H]_-$ и $[B^{(-)}_{k\mu}, H]_-$ ).

$$\tilde{\alpha}^{(+)} = \mathring{j}_- \alpha^{(+)} - \alpha^{(+)} \mathring{j}_- , \quad \tilde{\beta}^{(+)} = \mathring{j}_- \beta^{(+)} - \beta^{(+)} \mathring{j}_- , \tag{6.16}$$

где

$$\mathring{j}_- \to (j_-)_{1m;2m'} = \delta_{12}\, \delta_{m,m+1} \sqrt{(j_1-m)(j_1+m+1)} \tag{6.17}$$

– матрица одночастичного момента. Переходя в уравнениях (6.15) к $\nu$-представлению, в котором матрица $\mathcal{E}$ диагональна, и пользуясь (6.6) и (6.16), получим

$$\tilde{\beta}^{(-)}_{\nu\nu'} = \frac{(j_-)_{\nu\nu'}}{2\mathcal{J}} \frac{E_\nu E_{\nu'} - \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu'} - \Delta^2}{2E_\nu E_{\nu'}(E_\nu + E_{\nu'})} , \quad \tilde{\alpha}^{(-)}_{\nu\nu'} = \frac{(j_-)_{\nu\nu'}}{2\mathcal{J}} \frac{\Delta(E_\nu - E_{\nu'})}{2E_\nu E_{\nu'}(\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu'})} \tag{6.18}$$

Наконец, для вычисления величины $\mathcal{J}$ момента инерции воспользуемся, как и в случае одного $j$-уровня (см. (4.16), (4.17)) условием (2.7) нормировки $B_1^{(-)}$. Согласно (6.9) и (6.8), оператор $\hat{B}_1^{(-)}$ и в случае произвольной схемы $j$-уровней пропорционален оператору момента:

$$\vec{\hat{B}}_1^{(-)}(12) = -2\beta_1^{(-)}(12)\, \vec{\hat{L}} \tag{6.19}$$

(ср. с (5.5)). Поэтому амплитуды $\beta_1^{(-)}$ должны удовлетворять условию

$$-2\sum_1 \sqrt{j_1(j_1+1)(2j_1+1)}\, \beta_1^{(-)}(11) = 1 \tag{6.20}$$

Выражая в (6.20) амплитуду $\beta_1^{(-)}$ из равенств (6.13') и подставляя явное значение $3j$-символа с $k=1$, перепишем (6.20) с учётом (6.17) в виде

$$\sum_{1m2m'} (j_-)_{1m;2m'}\, \tilde{\beta}^{(-)}_{2m';1m} \equiv Sp(\mathring{j}_- \tilde{\beta}^{(-)}) = 1 \tag{6.21}$$

Вычисляя след (6.21) в $\nu$-представлении (6.18), найдем

$$\mathcal{J} = \sum_{\nu\nu'} |(j_\perp)_{\nu\nu'}|^2 \frac{E_\nu E_{\nu'} - \varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu'} - \Delta^2}{2E_\nu E_{\nu'} (E_\nu + E_{\nu'})}, \tag{6.22}$$

т.е. обычное выражение cranking -модели. Заметим, что все условия согласования сводятся к вычислению соответствующих средних с помощью обобщенной матрицы плотности, причем для больших величин (типа квадрупольного момента (6.7)) входит статическая часть $\beta^{(+)}$ матрицы плотности, а для малых (например, нечётных относительно отражения времени, как угловой момент (6.21)) усреднение производится с матрицей плотности $\beta^{(-)}$, которая описывает динамические эффекты, возникающие в первом порядке по вращению.

При выводе (6.22) мы использовали для матрицы плотности внутренней структуры явный вид (6.6), что, строго говоря, справедливо лишь для основного состояния частиц в деформированной яме. В случае вращательных полос, построенных на возбужденных внутренних состояниях, следует использовать модифицированные выражения, отвечающие новым числам заполнения квазичастиц, что, однако, также находится в соответствии с обычной процедурой cranking - модели.

## 7. Два изолированных уровня. Сравнение с моделью " stretch scheme ".

Найденная совокупность матричных элементов между состояниями $|JM\rangle$ позволяет найти любые характеристики вращательных состояний, в частности получить разложение волновой функции вращательного состояния по одночастичным функциям оболочечной модели. Для иллюстрации рассмотрим простой пример системы с двумя не интерферирующими $j$-уровнями (например, нейтронный и протонный). Именно для этого случая Даносом и Жилле /7/ была предложена наглядная микроскопическая модель вращательного состояния (" stretch scheme "). Согласно этой модели, моменты всех нейтронов и всех протонов отдельно складываются в максимально возможные парциальные моменты $C_n$, $C_p$, от сложения которых затем и получается результирующий момент $J$ вращения всей системы. Другими словами, волновая функция системы может быть представлена в виде

$$|JM\rangle_{s-s} \sim \sum_{M_n M_p} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & C_n & C_p \\ -M & M_n & M_p \end{pmatrix} \left| \left( j_n^{N_n} \right)_{C_n M_n} \right\rangle \left| \left( j_p^{N_p} \right)_{C_p M_p} \right\rangle \tag{7.1}$$

В такой схеме удобно ввести операторы $\vec{I}_n, \vec{I}_p$ парциальных моментов, для которых очевидным образом из (7.1) имеем

$$\vec{J} = \vec{I}_n + \vec{I}_p ,$$

$$\langle \vec{I}_n \rangle_{s-s} = \langle \vec{J} \rangle \frac{C_n(C_n+1) - C_p(C_p+1) + J(J+1)}{2\,J(J+1)} \tag{7.2}$$

и аналогично для $\langle \vec{I}_p \rangle_{s-s}$. Согласно (7.2), коэффициент пропорциональности между парциальным и полным моментом оказывается универсальной функцией, не зависящей от взаимодействия. Легко видеть, что этот результат несовместим с полученным выше общим решением. Действительно, согласно (6.22), для системы двух уровней, переходы между которыми отсутствуют, момент инерции является суммой парциальных моментов инерции $\mathcal{J} = \mathcal{J}_n + \mathcal{J}_p$. В то же время парциальные моменты, в силу (6.21), определяются следами соответствующих парциальных матриц:

$$\langle \vec{I}_n \rangle = \langle \vec{J} \rangle \, Sp_n \left( \mathring{J}_- \widetilde{\beta}_n^{(-)} \right) \tag{7.3}$$

Поскольку матрица $\widetilde{\beta}^{(-)}$ дается равенством (6.18), формулу (7.3) можно формально записать аналогично (7.2):

$$\langle \vec{I}_n \rangle = \langle \vec{J} \rangle \frac{\mathcal{J}_n}{\mathcal{J}} = \langle \vec{J} \rangle \frac{\mathcal{J}_n - \mathcal{J}_p + \mathcal{J}}{2\mathcal{J}} \tag{7.4}$$

Ясно, что результат (7.4) принципиально отличен от (7.2): вклад данного уровня в полный момент вращения зависит не от максимально возможного момента частиц на этом уровне (кинематика), а от парциального момента инерции, существенно определяемого взаимодействием частиц (динамика).

Нетрудно убедиться, что правильная волновая функция двухуровневой системы, приводящая к (7.3), может быть записана в виде

$$|JM\rangle \sim \sum_{I_n M_n I_p M_p} (-1)^{J-M} \begin{pmatrix} J & I_n & I_p \\ -M & M_n & M_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J & I_n & I_p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} |I_n M_n\rangle |I_p M_p\rangle , \tag{7.4}$$

т.е. является суперпозицией парциальных вращательных полос, построенных на основных состояниях подсистем. В $\vec{n}$ - представлении (3.8) волновая функция (7.4) принимает вид

$$|\vec{n}\rangle = |\vec{n}\rangle_n \, |\vec{n}\rangle_p \, , \tag{7.5}$$

из которого видно, что в собственной системе совпадают направления деформации нейтральной и протонной оболочек. Это находится в соответствии с представлениями обобщенной модели.

## 8. Обсуждение результатов

Сформулируем кратко полученные результаты. Если: ( $i$ ) существует изолированная полоса, состояния которой однозначно характеризуются квантовыми числами $J, M$ ; ( $ii$ ) энергия расщепления в полосе мала по сравнению с энергиями одночастичных возбуждений, то спектр полосы оказывается вращательным $E(J) = J(J+1)/2\mathcal{J}$ , а момент инерции $\mathcal{J}$ в точности совпадает с результатом $\mathcal{J}_{crank}$ cranking -модели. По поводу этих результатов полезно сделать несколько замечаний.

1°. Рассмотрение проводилось в модели с упрощенным взаимодействием ( $P_0 \cdot P_0 + Q_2 \cdot Q_2$ ). В этом случае нам достаточно было предположения об аномально больших матричных элементах внутри полосы лишь для операторов $P_0$ и $Q_2$.

Произвольное взаимодействие может быть представлено в виде разложения по сферическим тензорам в каждом из каналов $\sum_k \{P_k \cdot P_k + Q_k \cdot Q_k\}$ и поэтому получение замкнутых уравнений возможно лишь в предположении большой величины всех мультиполей, входящих во взаимодействие. Однако, по существу, это не является дополнительным предположением, так как из большой величины $P_0$ и $Q_2$ в силу уравнений движения матричные элементы других мультиполей автоматически оказываются большими[9]. Таким образом, обобщение на случай произвольного взаимодействия вносит лишь вычислительные, но не принципиальные трудности.

2°. Слова "получен вращательный спектр" часто понимают лишь в смысле $J(J+1)$ - зависимости энергии от момента. На самом деле зависимость $J(J+1)$ получается уже в самых грубых неоправданных моделях. Реальным критерием может служить величина момента инерции, наиболее чувствительная к моделям и приближениям. Момент инерции $\mathcal{J}_{crank}$ cranking - модели, во всяком случае, правилен в адиабатическом пределе. Поэтому теории, в которых момент инерции отличается от $\mathcal{J}_{crank}$, заведомо являются слишком грубыми. В менее тривиальных случаях, хотя и получаются формулы для момента инерции, по виду совпадающие с $\mathcal{J}_{crank}$, но с иным смыслом входящих в формулы величин. В теории Клейна, Кермана и др. /2/ получаются результаты cranking - модели после формального включения всех лишних членов (пропорциональных $\vec{J}^2$) в одночастичный гамильтониан[10]. Аналогичная ситуация имеет место и в ряде других подходов /9/. Наш метод свободен от этих недостатков.

3°. Отклонения от $J(J+1)$ - зависимости в спектре могут вызываться двумя причинами: неадиабатическими поправками и связью с состояниями другой природы. Неадиабатические поправки всегда малы (если не рассматривать слишком большие моменты) и могут быть легко найдены по теории возмущений. Существенное искажение вращательного спектра, несомненно, обусловлено второй причиной. Можно надеяться, что учет наиболее существенных переходов в другие состояния позволит описать спектры ядер в переходных областях.

9) В работах Марумори и др./8/ развивалось приближение, где высшие мультиполи ( $k>2$ ) считались малыми и отбрасывались. Очевидно, что в подобной модели нельзя получить правильного описания вращательных состояний.

10) В /2/ момент инерции находится усреднением гамильтониана с использованием матрицы плотности второго порядка по энергии вращения. В нашем подходе было достаточно найти решение в первом приближении. На самом деле, необходимые для вычисления $\langle H \rangle$ поправки второго порядка (см.конец раздела 3) могут быть выражены через члены первого приближения непосредственно из условия нормировки матрицы плотности вращательной полосы. Поэтому решение уравнений во втором порядке оказывается излишним.

## Литература

1. J.P. Elliott in "Selected Topics in Nuclear Theory", IAEA, Vienna, 1963.

2. Kerman A. Klein A. Phys. Lett., 1 185 (1962); Phys. Rev., 132, 1326 (1963); Klein A., Kerman A. Phys. Rev., 138, B1323 (1965); Klein A., Celenza L., Kerman A.K., Phys. Rev., 140, B245 (1965).

3. S.T. Belyaev V.G. Zelevinsky. Nucl. Phys. 39, 582 (1962).

4. A.R. Edmonds. Angular Momentum in Quantum Mechanics. Princeton Univ. Press, 1957.

5. Н.Н.Боголюбов, УФН, 67, 549 (1959).

6. S.T. Belyaev. Mat.-Fys. Medd. Kgl. Dansk. Vid. Selsk., 31, № 11, 1959.

7. M. Danos, V. Gillet Phys. Rev., 161, 1034 (1967).

8. T. Marumori, Y. Shono, M. Yamamura, A. Tokunaga, Y. Miyanishi Phys. Lett, 25B, 249 (1967)

9. H.J. Lipkin. Ann. Phys. (N.Y.), 9, 272 (1960);
Б.Л.Бирбраир. ЯФ, 5, 746 (1967).

Ответственный за выпуск В.Г.ЗЕЛЕВИНСКИЙ
Подписано к печати 8.IV.69
Усл. 1,5 печ.л., тираж 200 экз.
Заказ № 298, бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.