

Ф.55

7

**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

препринт 282

Н.Н.Филоненко

**ОБ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ
ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ**

Ответственный за выпуск Филоненко Н.Н.
Подписано к печати
Лек. 1 1969 г., строк 260 экз.
Заказ № 111, безналтно.

Отпечатано на ротационной в ИЯФ СО АН СССР, кв.

НОВОСИБИРСК

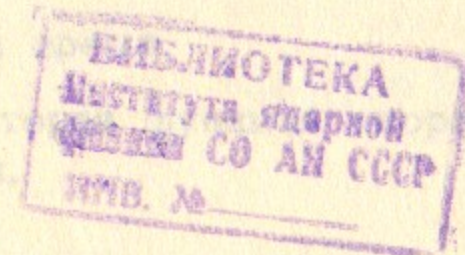
1969

Н.Н.Филоненко

ОБ ЭВОЛЮЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассматривается распространение нелинейной периодической волны в среде, параметры которой меняются во времени и в пространстве настолько быстро, что могут выполняться резонансные условия. В случае одного резонанса получен интеграл движения в окрестности этого резонанса. Подробно исследуется случай большого числа резонансов между возмущением и волной и находится условие, при котором резонансное воздействие среды приводит к хаотизации фазы волны. Последнее позволяет перейти от динамического описания эволюции волны со временем к статистическому.



Настоящая работа посвящена исследованию влияния возмущений на нелинейные периодические волны, распространяющиеся в среде с дисперсией. Хорошо разработанный метод Уитэма /1/, используемый обычно для такой цели, связан с усреднением по периоду и частоте колебания волны и позволяет учитывать лишь медленно меняющиеся во времени и в пространстве возмущения. Влияние таких адиабатических изменений параметров среды на движение нелинейной периодической волны рассматривалось подробно с помощью метода Уитэма в работах /2/. Ниже мы рассматриваем другой случай, при котором возможен резонанс между возмущением и нелинейной волной. Предлагается новый подход к такого рода задачам, который является дальнейшим развитием метода работы /3/. Особенностью резонансных явлений в рассматриваемом случае является наличие "сильной связи" между Фурье-гармониками нелинейной волны. Это приводит к влиянию резонанса не только на соответствующую Фурье-гармонику волны, но и на все остальные. Особенно внимание в работе уделено случаю, когда изменение параметров среды приводит к возникновению большого числа резонансов. Показано, что при определенных условиях такое возмущение приводит к хаотизации фазы волны. Временная эволюция волны в этом случае описывается уравнением Фоккер-Планка.

§ 1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать уравнение Кортевега-де-Вриза с правой частью, носящее в некотором смысле универсальный характер. Это уравнение описывает различные движения в нелинейных средах с дисперсией при условии малости, но конечности амплитуды и слабости дисперсии (например, волны на поверхности тяжелой жидкости с конечной глубиной, нелинейные ионно-звуковые волны в холодной плазме и др. (см., например, /4/))

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (1+v) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \epsilon F(v, x, t) \quad (1)$$

v - скорость среды,

x, t - координата и время,

$F(v, x, t)$ - некоторая функция скорости, координат и времени.

Такой член в уравнении (1) возникает вследствие изменения параметров среды во времени и в пространстве /3/. Все величины в уравнении обезразмерены таким образом, что скорость волны бесконечно малой амплитуды без учёта дисперсии и характерный масштаб длины (например, дебаевский радиус для ионного звука) приняты равными единице. В нелинейных средах с дисперсией могут существовать периодические волны с установившимся профилем, распространяющиеся с некоторой постоянной скоростью U /5/. Такие решения, так называемые "кноидальные" волны, существуют и у уравнения Кортевега-де-Вриза, условие применимости которого связано с ограничением $\alpha \equiv U-1 \ll 1$.

Внешнюю силу $F(y, x, t)$ выберем следующим образом:

$$F(y, x, t) = F \sum_{s=1}^S \cos(n_0 k x - s y t) \quad (2)$$

где $S \gg 1$, и $2\pi/k$ - длина волны невозмущенного решения. Эта периодическая по координате функция представляет собой ряд коротких импульсов длительностью $\sim 2\pi/Sy$, следующих периодически с частотой y .

Такой выбор возмущения обусловлен двумя причинами:

1) возмущения, входящие параметрически в задачу, дают более слабый эффект из-за малости амплитуды волны ($\max V \sim \alpha$);

2) возмущения с волновым числом, кратным волновому числу волны, оказывают наиболее сильное влияние на последнюю /3/.

Предварительно мы построим решение уравнения (1) для простого случая гармонического возмущения ($S=1$).

§ 2. Построение асимптотического решения для случая гармонического возмущения

Разложим уравнение (1) с внешней силой

$$F(x, t) = F \cos(n_0 k x - y t) \quad \text{в ряд Фурье по координате:}$$

$$\frac{dV_n}{dt} + i k n V_n + (i k n)^3 V_n + \frac{i k n}{2} \sum_{n_1} V_{n_1} V_{n-n_1} =$$

$$= \frac{\epsilon F}{2} \left[e^{-i y t} \delta_{n, n_0} + e^{i y t} \delta_{n, -n_0} \right]$$

$\delta_{m, e}$ - символ Кронекера,

$$V_n = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{-i n k x} v(x, t); \quad V_{-n} = V_n^* \quad (3)$$

Решение невозмущенного уравнения Кортевега-де-Вриза с длиной волны $2\pi/k$ и скоростью U имеет следующий вид /6/

$$V^{(0)}(x-ut) = d + 2a(1+p^2)/3p^2 - 2a \operatorname{sn}^2 \left[\sqrt{\frac{a}{6}} \cdot \frac{(x-ut)}{p} \right] \quad (4)$$

где

$$a = \frac{6}{\pi^2} k^2 p^2 K^2(p) \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{sn}(z)$ - эллиптическая функция Якоби с модулем $0 \leq p \leq 1$, $K(p)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Величина a играет роль амплитуды волны. Амплитуда волны a и модуль функции Якоби p однозначно определяются заданием волнового числа K и скорости U . Однако в дальнейшем нам эта связь не понадобится. Приведём здесь разложение функции Якоби в ряд Фурье, которым в дальнейшем будем часто пользоваться:

$$\operatorname{sn}^2 z = -\frac{1}{2a} \left\{ a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n k z \right\}$$

$$a_0' = -24 k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2},$$

$$a_0 = \alpha + 2\alpha(1+p^2)/3p^2 + a_0',$$

$$a_n = 24 k^2 \frac{nq}{1-q^{2n}} \quad n \neq 0,$$

$$q = e^{-\frac{\pi K(p')}{K(p)}}, \quad p' = \sqrt{1-p^2}$$
(6)

Будем искать решение для n -ого осциллятора волны в следующем виде:

$$V_n(q, \theta, t) = a_n(q) e^{in(\theta - \frac{v}{n_0}t)} + \varepsilon U_{1n}(q, \Psi, vt) + \dots$$
(7)

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon A_1(q, \theta) + \varepsilon^2 A_2(q, \theta) + \dots$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(q) + \frac{v}{n_0} + \varepsilon B_1(q, \theta) + \dots$$

$$\Psi = \theta - \frac{v}{n_0}t$$
(8)

При исследовании этой задачи мы, в сущности, используем метод Ван-дер-Поля (см., напр., /7/). В данном случае задача усложняется сильной нелинейностью, а также тем, что число осцилляторов волны бесконечно. Следует заметить, что решение (7) не является общим решением задачи, так как не является решением при произвольных начальных условиях. Мы ищем решение в виде суммы двухпараметрического семейства осцилляторов, которое при начальном условии, близком к профилю нелинейной периодической волны, может достаточно хорошо представлять решение при малых ε . Запишем уравнение (3) с использованием разложений (7). Выписав все члены нулевого порядка мы получим функциональный вид $\omega(q)$:

$$\omega[q(u, k)] = k \left[-1 + (kn)^2 - \frac{1}{2} \frac{\sum_n a_n a_{n-n_0}}{a_n} \right] = -kU \quad (9)$$

Разложим теперь функции $U_{sn}(q, \Psi, vt)$ в ряд Фурье по фазе $\Psi = (\theta - \frac{v}{n_0}t)$ и по времени vt :

$$U_{sn}(q, \Psi, vt) = \sum_{m, l=-\infty}^{\infty} U_{sn}^{me} e^{i(m\Psi - lvt)} \quad (10)$$

$$U_{sn}^{me}(q) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint d(vt) d\Psi U_{sn}(q, \Psi, vt) e^{i(m\Psi - lvt)}; \quad n \neq m \quad (11)$$

$$U_{sn}^{n_0} = 0 \quad (12)$$

Последнее условие не ограничивает общности, так как все отличные от нуля гармоники $U_{sn}^{n_0}$ могут быть включены в основную соответствующим выбором $A_s(q, \theta)$ и $B_s(q, \theta)$. Выписав далее все члены порядка ε в уравнении для n_0 -го осциллятора, мы получим величины $A_1(q, \theta)$ и $B_1(q, \theta)$ с учётом (12) в явном виде:

$$\left[\frac{da_{n_0}}{dq} A_1(q, \theta) + in_0 a_{n_0} B_1(q, \theta) \right] e^{in_0(\theta - \frac{v}{n_0}t)} = F e^{-ivt} \quad (13)$$

$$A_1(q, \theta) = \frac{F}{da_{n_0}/dq} \cdot \cos n_0 \theta$$

$$B_1(q, \theta) = -\frac{F}{n_0 a_{n_0}} \sin n_0 \theta \quad (14)$$

Для функций U_{1n}^{me} при $n \neq m$ мы получим следующую бесконечную неоднородную алгебраическую систему уравнений:

$$U_{1n}^{me} i[m\omega - lV - (kn)^3] + ikn \sum_{h, h+m=n} a_n U_{1, n-n_0}^{me} = \varphi_{nm}^e \quad (15)$$

где $\varphi_{n_0, n_0}^{-1} = 0$, $\varphi_{-n_0, -n_0}^1 = 0$

$$\varphi_{nm}^e = F \left[\frac{n a_n}{n_0 a_{n_0}} - \frac{d a_n / d q}{d a_{n_0} / d q} \right] \cdot \delta_{m, n+n_0} \cdot \delta_{e, -1} - \quad (16)$$

$$- F \left[\frac{n a_n}{n_0 a_{n_0}} - \frac{d a_n / d q}{d a_{n_0} / d q} \right] \delta_{m, n-n_0} \cdot \delta_{e, 1}; \quad \begin{cases} l \neq \pm 1 \\ n \neq \pm n_0 \\ m = \pm n_0 \end{cases}$$

Теперь ясно, что система (15) разбивается на 3 независимые подсистемы уравнений: на 2 неоднородные подсистемы для семейств функций $U_{ln}^{n+n_0, -1}$ и $U_{ln}^{n-n_0, 1}$ и однородную подсистему уравнений для всех прочих функций. Последняя имеет тривиальное решение, которое мы и выберем. Функции $U_{ln}^{n+n_0, -1}$ и $U_{ln}^{n-n_0, 1}$ будут найдены в приложении.

Таким образом, решение возмущенной задачи в первом приближении по ε свелось к решению всего лишь двух дифференциальных уравнений первого порядка для величин q и θ с параметрами v и n_0 :

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon F}{24 k^2 n_0^2} \cdot \frac{(1 - q^{2n_0})}{q^{n_0-1} (1 + q^{2n_0})} \cos n_0 \theta \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(q) + \frac{v}{n_0} - \frac{\varepsilon F}{24 k^2 n_0^2} \cdot \frac{(1 - q^{2n_0})}{q^{n_0}} \cdot \sin n_0 \theta$$

Уравнение (17) имеет, как легко проверить, следующий интеграл движения:

$$\begin{aligned} & - \int_{q_0}^q dq \frac{(\omega(q) - \frac{v}{n_0}) \cdot \frac{n_0}{2} \cdot \frac{(1 + q^{2n_0})}{(1 - q^{2n_0})}}{q} = \\ & = \frac{\varepsilon F}{24 k^2 n_0^2} \cdot \frac{(q^{n_0} - q^{-n_0})}{2} \sin n_0 \theta + const \quad (18) \end{aligned}$$

Как видно из (6) величина $N = 1/\varepsilon n q$ представляет собой эффективное число гармоник в нелинейной волне. Таким образом, мы видим, что число гармоник волны, а вместе с ним и её амплитуда a , связанные соотношением (5), совершают малые колебания. Оценим амплитуду этих колебаний из уравнения (18), разложив интеграл в ряд по ε и считая также, что $n_0/N < 1$ и $N \gg 1$:

$$\frac{N - N_0}{N_0} \approx \frac{\delta}{18 \pi^2} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \sin n_0 \theta + C_1 \quad (19)$$

$$\frac{a - a_0}{a_0} \approx 2 \frac{\delta}{18 \pi^2} \cdot \frac{1}{n_0} \cdot \sin n_0 \theta + 2 C_1$$

$$\left(\frac{N - N_0}{N_0} \right)^2 \approx \frac{\delta}{18 \pi^2} \cdot \frac{1}{n_0} \sin n_0 \theta + C_2 \quad (20)$$

$$\left(\frac{a - a_0}{a_0} \right)^2 \approx 4 \frac{\delta}{18 \pi^2} \cdot \frac{1}{n_0} \sin n_0 \theta + 4 C_2$$

где $\delta \equiv \frac{\varepsilon F}{N^3 k^5} = \frac{\varepsilon F}{k^2 a^{3/2}}$ - параметр малости задачи.

Резюмируя, можно сказать, что основным результатом влияния гармонического возмущения на волну есть периодическое изменение её профиля с частотой $\sim (n_0 \omega - v)$. Отдельный горб волны будет периодически заостряться и расплываться. Кроме того, в волне появятся малые, $\sim \delta$, осцилляции разных длин волн с комбинационными частотами $(n + n_0) \omega - v$ и $(n - n_0) \omega + v$, амплитуды которых вычислены в приложении. При этом влияние возмущения тем больше,

чем ближе длина волны возмущения к длине нелинейной волны. Это физически естественный результат слабого влияния $\sim k/n_0 k$, быстрых осцилляций внешней силы на основной медленный процесс. При приближении частоты возмущения к частоте резонансной гармоники волны амплитуда модуляции возрастает в $\sqrt{\varepsilon}$ раз.

Случай импульсного по времени возмущения является много более сложным, однако следует ожидать, что влияние такого воз-

мушения может быть учтено при помощи статистических методов /3/.

§ 3. Случай импульсного возмущения

При изучении более простого случая гармонического возмущения стало ясно, что результат влияния внешнего возмущения на волну имеет 2 качественно различных стороны: 1) изменение параметров волны как целого; 2) появление в решении различных комбинационных гармоник; причём, наиболее важным в эволюции волны является первый эффект, который мы и попытаемся выделить.

Рассмотрим уравнения для величин $H(t)$ и $\Psi(t)$, где функционал

$$H\{V_n\} = -\frac{1}{2} \sum [1 - (k_n)^2] V_n V_n - \frac{1}{6} \sum_{n_1+n_2+n_3=0} V_{n_1} \cdot V_{n_2} \cdot V_{n_3}$$

в невозмущенном случае является интегралом движения и имеет физический смысл плотности энергии, а $\Psi(t)$ — фаза волны. H и Ψ подчиняются следующим уравнениям движения, в которых мы удержим только старший член по ε :

$$\frac{dH}{dt} = 2\varepsilon U F a_n \sum_{s=1}^S \cos(n_s \Psi - sVt) \quad (21)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega(H) = -k U(H) \quad (21')$$

Наиболее сильное влияние возмущения мы можем ожидать при резонансе $sV = n_s \omega(H)$, где H_s — значение H , соответствующее указанному резонансу. При этом H , а с ней и $\omega(H)$ сильно изменяются. В случае гармонического возмущения, как уже было выяснено в § 2, легко найти интеграл движения уравнений (21) и (21'):

$$\int^H dH \frac{[n_s \omega(H) - sV]}{2\varepsilon F U(H) a_n} = \sin(n_s \Psi - sVt) + \text{const} \quad (23)$$

Разлагая вблизи резонанса при $H = H_s$, имеем:

$$\frac{n \frac{d\omega(H_s)}{dH}}{dH} (H - H_s)^2 = 2\varepsilon F U(H_s) a_{n_s} \sin(n_s \Psi - sVt) + \text{const}$$

Движение параметров волны H и Ψ в этом случае, происходит в некоторой области, ограниченной так называемой сепаратрисой. Максимальный размер такой локальной сепаратрисы по H вблизи резонанса равен

$$\Delta H = H_{\text{max}} - H_s = \sqrt{\frac{2\Phi(H_s)}{n_s \frac{d\omega}{dH}}} \quad (24)$$

или, по частоте,

$$\Delta \omega = \frac{d\omega}{dH}(H_s) \cdot \Delta H = \sqrt{\frac{2\Phi(H_s)}{n_s} \cdot \frac{d\omega}{dH}} \quad (25)$$

$$\Phi(H) = 2\varepsilon U(H) a_n$$

, где

Если некоторый резонанс происходит на частоте $sV = n_s \omega(H_s)$, то ближайший к нему резонанс будет на частоте $(s+1)V = n_{s+1} \omega(H_{s+1})$, причём, расстояние между резонансами по частоте равно

$$\Omega = \omega(H_{s+1}) - \omega(H_s) = \frac{V}{n_s}$$

Уравнения типа (21) и (21') изучались Арнольд, Колмогоровым и Мозером. Было показано, что при достаточно малых $\delta \ll 1$ система устойчива, т.е. для неё можно построить интеграл движения в виде сходящегося ряда по степеням δ при этом H изменяется квазипериодически в некоторой ограниченной области /8/. Необходимое ограничение на δ для существования приближенного интеграла движения не выяснено, существует лишь жесткое условие на δ удобное для построения теории.

В случае, когда параметр $K = \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2 \gg 1$, т.е. происходит перекрытие резонансов друг с другом по частоте, движение осциллятора, описываемое уравнениями (20), (21'), становится перемещающимся /8/. При этом условии фаза $\Psi(t)$ изменяется квазистохастически.

Можно предположить, что область стохастичности движения системы (20), (21') отделена от области устойчивости условием $K \sim 1$. Исследуемым уравнениям в области стохастичности можно дать любопытную интерпретацию. Заметим, что в правой части уравнения (20) стоит сумма большого числа гармоник с различными частотами $S\nu$. Такая функция хорошо представляется в виде суммы δ -функций с периодом $2\pi/\nu$ при $S \gg 1$, если ширина импульса по времени много меньше характерного времени изменения величины H в среднем

$$\frac{dH}{dt} = 2\varepsilon U F a_{n_0} \sum_{S=1}^S \cos(n_0 \Psi - S\nu t) \approx \quad (26)$$

$$\approx 2\varepsilon U F a_{n_0} \frac{\pi}{\nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - m \frac{2\pi}{\nu}\right)$$

Теперь хорошо видно, что величина H периодически через большие промежутки времени $\sim 2\pi/\nu$ испытывает толчки, оставаясь приблизительно постоянной между толчками. Легко вычислить скачок ΔH_m на m -толчке.

$$\Delta H_m = 2\varepsilon U F a_{n_0} \frac{\pi}{\nu} \cos n_0 \Psi_m$$

где $n_0 \Psi_m$ - фаза в момент m -ого толчка. При этом частота $\omega(H)$ испытывает приращение

$$\Delta \omega_m = \Delta H_m \cdot d\omega/dH$$

Очевидно, что величина толчка существенно зависит от фазы $n_0 \Psi_m$. Посмотрим теперь, каково будет значение фазы Ψ_{m+1} в момент $(m+1)$ -ого толчка.

Если величина $\mathcal{K} = n_0 \Delta\omega(H) 2\pi/\nu \gg 1$, то к новому толчку фаза получит большое приращение и за счёт сдвига частоты при предыдущем толчке. По прошествии нескольких толчков "истинная" фаза $2\pi n_0 \{\Delta\omega/\nu - [\Delta\omega/\nu]\}$ "размажется" по промежутку $(0, 2\pi)$, и система как бы успеет "забыть" свою предысторию. Здесь $[Z]$ - целая часть Z .

Последовательность фаз $n_0 \Psi_m$, а вместе с ней и $\Delta H_m \sim \cos \Psi_m n_0$ становятся случайными функциями времени. Нетрудно оценить время расщепления корреляций τ_c для последовательности фаз Ψ_m подробно тому, как это делается в работе /10/.

Получим $\tau_c = n_0 / \nu \varepsilon n \mathcal{K}$. В этой интерпретации поведения системы (20), (21') в области стохастичности особенно хорошо понятна аналогия движения H с броуновским движением. Параметры K и \mathcal{K} , введенные, казалось бы, на основе различных физических соображений перекрытия резонансов и толчкообразного воздействия внешней силы, совпадают с точностью до несущественного множителя. Оценим возможность выполнения неравенства $K \gg 1$ для важного случая длинных нелинейных периодических волн с большим числом Фурье-гармоник ($N \gg 1, K \ll 1$):

$$K \approx \delta \left(\frac{\alpha}{U}\right)^2 \frac{S^2}{n_0 N} = \delta \left(\frac{K\alpha}{\nu}\right)^2 \frac{n_0}{N} \gg 1 \quad (27)$$

Область стохастичности всегда существует при достаточно редких толчках ($\nu \rightarrow 0$).

§ 4. Стохастическое описание нелинейной волны

Как было указано в предыдущем параграфе, величина H периодически испытывает малые изменения $\Delta H \ll 1$, пропорциональные $\cos \Psi n_0$, где фаза Ψ случайна. Отсюда ясно, что для статистического описания поведения H можно ввести функцию распределения $f(H, t)$, удовлетворяющую уравнению Фоккер-Планка. Удобнее сразу записать кинетическое уравнение для функции распределения $F(I, t)$, где I связано с H посредством соотношения: $dH/dI = \omega(H)$, и имеет смысл переменной действия. Уравнение Фоккер-Планка для

функция $F(I, t)$ имеет следующий вид (см., например, /11/):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial I} \langle (\Delta I)^2 \rangle \Omega \frac{\partial F}{\partial I} \quad (28)$$

где $\langle (\Delta I)^2 \rangle$ - изменение $(\Delta I)^2$ за один толчок, усредненное по случайной фазе Ψ . Остается вычислить $\langle (\Delta I)^2 \rangle$:

$$(\Delta I_m)^2 = \left(\frac{dI}{dH} \Delta H_m \right)^2 = \left(\frac{2 \varepsilon U F Q n_0}{\omega} \cdot \frac{\pi}{\nu} \cos n_0 \Psi_m \right)^2 \quad (29)$$

где ΔI_m - изменение действия I на m -ом толчке; откуда

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = 2 \alpha \left(\frac{\pi \varepsilon F}{\nu} \right)^2 \quad (30)$$

Теперь нетрудно написать и уравнение для $f(H, t)$, учтя, что $F(I, t) = \omega f(H, t)$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial H} \langle \Delta H \rangle \Omega f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial H^2} \langle (\Delta H)^2 \rangle \Omega f \quad (31)$$

где $\langle \Delta H \rangle = \frac{\omega}{2} \frac{d}{dH} \omega \cdot \langle (\Delta I)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta H)^2 \rangle = \omega^2 \langle (\Delta I)^2 \rangle$ (32)

$$\langle (\Delta H)^2 \rangle = \omega^2 \langle (\Delta I)^2 \rangle \quad (33)$$

Таким образом, величина H , а вместе с ней и скорость волны U , будут увеличиваться со временем в соответствии с уравнением диффузии (31). Оценим коэффициенты $\langle \Delta H \rangle$ и $\langle (\Delta H)^2 \rangle$ для случая нелинейных волн с большим периодом $k \ll 1$, $N \gg 1$ (см. § 2).

В этом случае $dH/d\omega = 2U\sqrt{\alpha} + O\left(\frac{1}{N}\right)$ (34)

Используя (30) и (32), (33) и (34), получим

$$\langle \Delta H \rangle \approx (\pi \delta)^2 \frac{\alpha k^4}{\nu^2} H_0$$

где $\langle (\Delta H)^2 \rangle \approx 4(\pi \delta)^2 \frac{\alpha k^4}{\nu^2} H_0^2$; $H_0 \equiv k U \alpha^{3/2}$

Отсюда следует оценка для характерного времени диффузии

$$\tau_D = H_0^2 / \langle (\Delta H)^2 \rangle \Omega$$

или

$$\tau_D = \frac{n_0}{(\pi \delta)^2} \frac{\nu}{\alpha k^4}$$

Следует указать, что выполнение критерия стохастичности (27) ещё недостаточно для применимости уравнения (31). Необходимо также, чтобы характерное время диффузии было много больше времени между толчками $1/\nu$ и времени расцепления корреляций τ_c (см. § 3):

$$\tau_c / \tau \ll 1, \quad \tau_c \nu \ll 1 \quad (35)$$

Более сильное из неравенств (35) (это зависит от фактора $n_0 / \ln k$) и условие $k \gg 1$ определяют область значений скорости волны, где применимо уравнение Фоккер-Планка:

$$\frac{1}{\delta} \frac{N}{n_0} \left(\frac{\nu}{kU} \right)^2 < \left(\frac{\alpha}{U} \right)^2 < \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^2 n_0 \left(\frac{kU}{\nu} \right)^2 \quad (36)$$

При таких скоростях и амплитудах, что $(\alpha/U)^2 > \frac{N}{\delta n_0} \left(\frac{\nu}{kU} \right)^2$ нелинейность становится настолько малой, что локальные сепаратрисы, соответствующие отдельным резонансам, перестают перекрывать друг друга и наступает устойчивость движения в смысле Колмогорова, Арнольда /8/. В случае слишком больших амплитуд (нарушается правая часть неравенства (36)) относительные скачки величины H становятся настолько большими, что аналогия поведения параметров волны с броуновским движением будет уже неприменима. Однако следует заметить, что в реальных системах еще до нарушения этого условия может наступить опрокидывание волны, так что понадобятся другие уравнения для описания многопоточкового движения после опрокидывания.

Приложение

Существование ограниченного решения для бесконечной системы алгебраических уравнений (13) необходимо для применимости схемы приближений § 2. Рассмотрим, например, систему уравнений для функций $U_{1n}^{n+n_0, -1}$ (система уравнений для функций $U_{1n}^{n-n_0, 1}$ исследуется аналогично). Как известно, решение неоднородной алгебраической системы уравнений выражается в виде частного от двух определителей C_e и C :

$$U_e = \frac{C_e}{C}$$

где

$$C_e \equiv U_{1e}^{e+n_0, -1}$$

C - определитель системы с элементами C_{sm} :

$$C_{ss} = i[(s+n_0)\omega + ks a_0 - (ks)^3 + \nu]$$

$$C_{om} = 0$$

$$C_{sm} = iks a_{|s-m|} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} s \neq m$$

$$s, m = 0, 1, -1, 2, -2, \dots$$

а C_e - определитель системы, в котором e -ый столбец заменен столбцом свободных членов Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\varphi_n \equiv \varphi_{n, n+n_0}^{-1}$$

Рассмотрим определители C^n и C_e^n , состоящие из первых n строк и n столбцов C и C_e . В каждом из определителей C^n и C_e^n поменяем местами e -ый и n -ый столбцы. Теперь нетрудно привести каждый из определителей к треугольному виду, после чего они будут отличаться только n -ым элементом диагонали:

$$C^n = |(d_{sm})|; \quad C_e^n = |(d_{sm}^e)|$$

$$d_{sm} = d_{sm}^e \quad \left. \begin{array}{l} s = m \neq n \\ s \neq m \end{array} \right\} \quad d_{nn} \neq d_{nn}^e$$

$$d_{ms} = 0 \quad s > m$$

Оба определителя C^n и C_e^n равны теперь произведению их элементов, стоящих на диагонали. Совершив предельный переход $n \rightarrow \infty$, получим U_e :

$$U_e = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n1} \cdot d_{n2} \cdot \dots \cdot d_{nn}^e}{d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{nn}^e}{d_{nn}}$$

Остается вычислить d_{nn} и d_{nn}^e , а затем совершить предельный переход $n \rightarrow \infty$:

$$d_{nn} = C_{ne} - \frac{d_{no}}{d_{oo}} C_{oe} - \frac{d_{n1}}{d_{11}} C_{1e} - \dots - \frac{d_{n2}}{d_{22}} C_{2e} - \dots - \frac{d_{n, 1-n}}{d_{1-n, 1-n}} C_{1-n, e}; \quad (1)$$

$$d_{nn}^e = \varphi_n - \frac{d_{no}}{d_{oo}} \varphi_0 - \frac{d_{n1}}{d_{11}} \varphi_1 - \dots - \frac{d_{n2}}{d_{22}} \varphi_2 - \dots - \frac{d_{n, 1-n}}{d_{1-n, 1-n}} \cdot \varphi_{1-n} \quad (2)$$

Нетрудно оценить все величины, входящие в формулы (1) и (2), учтя следующие неравенства: $N \gg 1$, $n \gg 1$ и $\alpha \ll 1$

При этом

$$c_{sm} \approx 24 i k S \alpha / N \quad |s-m| \leq N$$

$$c_{sm} \approx 12 i k S / (s-m) \cdot e^{-\frac{|s-m|}{N}} \quad |s-m| > N$$

$$c_{ss} \approx i [(s+n_0) k U - (k S)^2]$$

$$d_{ee} \approx c_{en}$$

$$d_{ne} \approx c_{nn}$$

$$\varphi_e \approx \frac{2FN}{\alpha} \cdot \frac{1}{n_0} \frac{e a_e}{(1 + e^{-2e/N})}$$

и окончательно

$$d_{nn} \approx \frac{d_{ne} \cdot c_{ee}}{d_{ee}}$$

$$d_{nn}^e \approx \frac{d_{ne} \varphi_e}{d_{ee}}$$

откуда

$$U_e \approx \frac{\varphi_e}{c_{ee}} \approx - \frac{i 2F e a_e}{[(n_0+e)kU - (kE)^2]} \cdot \frac{(e^{-\frac{2n_0}{N}} - e^{-\frac{2e}{N}})}{n_0 n_0 (1 + e^{-2e/N})(1 - e^{-2e/N})}$$

$$\approx - \frac{i 2FN}{\alpha [(n_0+e)kU - (kE)^2]} \cdot \frac{1}{n_0} \frac{e a_e}{(1 + e^{-2e/N})}$$

$$n_0/N < 1$$

$$e \neq 0, \pm n_0$$

Видно, что U_e пропорционально a_e , так что добавка εU_e к основному решению не искажает хвостовой части спектра нелинейной периодической волны. Влияние резонансов на высоких частотах, как уже указывалось в § 2, мало $\sim 1/n_0$.

Л и т е р а т у р а

1. G.B. Whitham Proc. Roy. Soc. A283, 238, 1965
2. G.B. Whitham Proc. Roy. Soc. A299, 6, 1967
3. F. P. Bretherton, C.J.R. Garrett Proc. Roy. Soc. A, 302, 529, 1968.
4. F.P. Bretherton Proc. Roy. Soc. A 302, 555, 1968
5. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 1969 (в печати).
6. C.S. Gardner, C.H. Su Annual Report of Princeton Plasma Phys. Lab. MAT-9-24, 329, 1966.
7. Р.З.Сагдеев. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, 4, 20, 1964.
8. D.J. Kortweg, de Vries, Phil. Mag. 5, 39, 422, 1895.
9. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. физ.-мат.лит., 1963.
10. В.И.Арнольд, УМН, ХУШ, 6, 91, 1963.
11. Б.В.Чириков, Атомная энергия, 6, 630, 1959.
12. Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко, ЖЭТФ, 54, 5, 1590, 1968.
13. Пригожин. Неравновесная статистическая механика, Изд. "Мир", 1964.

