

11
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

препринт 290

Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко

КИНЕТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН
В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

НОВОСИБИРСК

1969

Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко

КИНЕТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ДИСПЕРСИЕЙ

А Н Н О Т А Ц И Я

Рассматриваются решения уравнения Кортевега-де Вриза в виде нелинейных периодических волн с очень большими периодами. Показано, что при определенных условиях суперпозиция таких нелинейных волн может быть рассмотрена как нулевое приближение к решению. Поправки к решению отыскиваются по теории возмущений, причем, возмущением являются резонансные процессы взаимодействия нелинейных волн. Показано, что если число нелинейных волн велико, то их фазы хаотизируются со временем. Получено кинетическое уравнение, описывающее ансамбль нелинейных волн и найдены некоторые его частные решения. Получена степенная зависимость средней энергии волн от их длины, соответствующая колмогоровской теории турбулентности. Отмечается в частности, что теория слабой турбулентности соответствует разложению по малому числу Рейнольдса (или его аналогу в данной задаче), в то время как рассмотренная в работе область параметров соответствует большим числам Рейнольдса и теория возмущений строится по их обратным степеням.

§ 1. Введение

В последние годы появилось много работ, посвященных теоретическому и численному исследованию уравнения Кортевега-де Вриза (КдВ):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad (1.1)$$

где v — физическая переменная задачи (например, скорость), x — координата, t — время. Интерес к КдВ — уравнению связан с тем, что к нему сводятся многие задачи, описывающие нелинейное движение в среде с дисперсией. Сюда относятся волны в канале конечной глубины, ионный звук, магнитный звук и др. (см. например /1/). Являясь упрощенным вариантом, КдВ — уравнение описывает в то же время, в основном, характерные свойства исходных уравнений^{х)}. Стационарное решение КдВ — уравнения

$$v = v(x - ut) \quad (1.2)$$

имеет вид нелинейной периодической волны, движущейся со скоростью u (в дальнейшем это решение будем называть S -волной). Вырожденным случаем решения в виде (1.2) является уединенная волна (солитон). Фундаментальным результатом для КдВ — уравнения является в настоящее время решение задачи Коши для произвольного гладкого ограниченного в пространстве начального профиля $v(x)$, полученное Гарднером, Гринном, Крускалом и Миурой /2/. При $t \rightarrow \infty$ решение $v(x, t)$ представляет собой набор конечного числа не взаимодействующих друг с другом солитонов, параметры которых определяются из соответствующих уравнений. Перефразировкой этого результата является существование асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) принципа суперпозиции для решений типа солитонов и возможность определения их параметров с помощью конечного числа интегралов движения КдВ — уравнения /3/.

Теперь мы перейдем к изложению другой точки зрения на возможные решения (1.1), связанной с проблемой Ферми-Паста-Улама /4/. Гипотеза, высказанная Ферми, заключается в том, что система (даже одномерная) из большого числа связанных нелиней-

^{х)}Исключением является "опрокидывание", которое в КдВ — уравнении отсутствует.

ных осцилляторов должна обладать статистическими свойствами при вполне регулярном (не стохастическом) возбуждении её. Как следствие этого, энергия, вложенная в возбужденные моды колебаний, должна распределиться в среднем равномерно по всем (или почти всем) степеням свободы подобно тому, как это происходит при максвелловском распределении. Численный анализ и аналитические оценки, проведенные Израйлевым и Чириковым /5/, подтвердили соображения Ферми. Однако, в приближении континуального распределения и не очень сильной нелинейности система осцилляторов, рассматривавшаяся в /4/, описывается КдВ-уравнением /6/. Если приближенность такого описания не является существенной, то должны существовать решения КдВ-уравнения совсем иного типа, чем найденные в /2/. Именно, возможны такие решения, в которых $u(x, t)$ является случайной функцией переменных x, t , более того, существует функционал $F(u, t)$, представляющий собой статистическую функцию распределения по u , которая при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению, обеспечивающему термодинамическое равновесие. Изложенные соображения можно назвать проблемой нахождения стохастических решений КдВ-уравнений.

Наконец, еще одна особенность решений КдВ-уравнения, тесно связанная с проблемой Ферми-Паста-Улама. Поскольку уравнение (1.1) описывает определенный класс гидродинамических движений, то стохастические решения должны описывать также турбулентное движение среды. Вопрос о существовании стохастических решений для КдВ-уравнения с сильной нелинейностью и без введения дополнительных случайных источников до сих пор оставался открытым.

Метод исследования, излагаемый ниже, применим к произвольной нелинейной среде с дисперсией, в которой существуют решения типа S -волн. Мы укажем область параметров, в которой можно построить стохастические решения, получим кинетическое уравнение для функции распределения состояний системы и выясним свойства некоторых решений этого уравнения. Полученные стохастические решения соответствуют движениям с большим числом Рейнольдса.

§ 2. Основные уравнения

Опишем кратко те свойства стационарного решения КдВ-уравнения, которые будут существенно использованы. Кроме того, все время будет исследоваться случай, когда длина S -волны $\lambda \rightarrow \infty$. Поэтому все выражения будут записаны в соответствующем приближении.

Периодическое решение, описывающее S -волну, в оговоренном случае имеет вид (рис.1):

$$u = 3\alpha \cdot \text{cn}^2 \left[\frac{\sqrt{3\alpha}}{2} (x - ut); 1 \right] \quad (2.1)$$

где cn - эллиптический косинус (здесь единица - его модуль); величина

$$\alpha = u - 1$$

есть разность скорости S -волны и характерной для рассматриваемой задачи скорости звука, принятой равной единице. В дальнейшем $\alpha > 0$ и $\alpha \ll 1$. Последнее неравенство не обязательно, однако обычно КдВ-уравнение справедливо лишь при малых α . В силу периодичности (2.1) можно разложить в ряд Фурье:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ink(x-ut)} \quad (2.2)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\sqrt{\alpha}}{N}$$

Здесь N есть характерное число гармоник a_n в спектре S -волны. При $n > N$ амплитуды разложения экспоненциально убывают как $\exp(-n/N)$. При $k \rightarrow 0$ $N \rightarrow \infty$. Число N может быть придан еще и другой смысл. Согласно (2.1) ширина горбов на рис.1 равна $\sim 1/\sqrt{3\alpha}$, а расстояние между ними λ . Согласно последнему равенству в (2.2) N равно отношению расстояния между горбами к их ширине. Выпишем также значения Фурье - амплитуд a_n :

$$a_n \approx \frac{3\alpha}{N}; \quad (n \leq N) \quad (2.3)$$

Гамильтоновский формализм для КдВ-уравнения выглядит

следующим образом. Введем гамильтониан:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{6} v^3 - \frac{1}{2} v^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dq (1-q^2) v(q) v(-q) - \\ &- \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 dq_2 dq_3 v(q_1) v(q_2) v(q_3) \delta(q_1 + q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где использовано разложение:

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} v(q); \quad v(q) = v^*(-q) \quad (2.5)$$

Уравнение (1.1) эквивалентно следующим каноническим уравнениям движения:

$$\frac{dv(q)}{dt} = iq \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(-q)}; \quad \frac{dv(-q)}{dt} = -iq \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(q)} \quad (2.6)$$

а производная по времени от произвольной величины P вычисляется по формуле:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + i \int q \left(\frac{\delta P}{\delta v(q)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(-q)} - \frac{\delta P}{\delta v(-q)} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(q)} \right) dq \quad (2.7)$$

§ 3. Постановка задачи и параметр разложения

Пусть $H_s = H_s(k_s, u_s)$ есть гамильтониан S -волны $v_s(x - u_s t)$. Ввиду нелинейности КдВ-уравнения суперпозиция

$$v = \sum_{s=1}^S v_s \quad (3.1)$$

не является решением уравнения (1.1). Ниже мы покажем, что если для всех s выполнены условия

$$\alpha_s \ll 1; \quad N_s \gg 1 \quad (3.2)$$

означающие "близость" v_s к решениям "солитонного" типа, то выражение (3.1) может быть использовано в качестве нулевого приближения, поправки к которому вычисляются с помощью соответствующей теории возмущений^{x)}.

Примем относительно пакета (3.1) S -волн следующие ограничения:

1) $S \ll N;$

2) различные значения k_s волновых чисел отличаются друг от друга на величину Δk :

$$k \gg \Delta k \approx k/N \quad (3.3)$$

где k и N — некоторые характерные для пакета числа k_s, N_s . Смысл неравенства (3.3) будет раскрыт ниже. Для простоты примем также $\Delta \alpha / \alpha \sim \Delta k / k$

3) Числа k_s несоизмеримы, так что каждому q из дискретного ряда значений, входящих в разложение величины v в нулевом приближении, может быть приписан один и только один индекс Z , указывающий на принадлежность данного волнового числа к спектру Z -ой S -волны.

Запишем гамильтониан (2.4) в виде:

$$\mathcal{H} = \sum_s H_s + H_I \quad (3.4)$$

где

$$H_s = -\frac{1}{2} \int dq_s (1-q_s^2) v(q_s) v(-q_s) -$$

x) Разложение по точным стационарным решениям нелинейного уравнения использовалось в работе /7/. С такого рода разложением, как мы увидим ниже, связана возможность применения к задачам сильной турбулентности теории слабой связи /8/.

$$-\frac{1}{6} \int dq_s dq'_s dq''_s v(q_s) v(q'_s) v(q''_s) \delta(q_s + q'_s + q''_s);$$

$$H_I = -\frac{1}{6} \sum'_{s_1, s_2, s_3} \int dq_{s_1} dq_{s_2} dq_{s_3} v(q_{s_1}) v(q_{s_2}) v(q_{s_3}) \delta(q_{s_1} + q_{s_2} + q_{s_3});$$

$$v_s = \int dq_s e^{iq_s x} v(q_s).$$

(3.5)

Штрих в сумме означает исключение члена с $s_1 = s_2 = s_3$. Интегрирование в H_I ведется по значениям q , принадлежащим одному и тому же s ; наоборот, в H_I индексы при q показывают, что значения q относятся к различным s . Определим H_I , считая v_s определенной формулой (2.2). Пусть периоды S -волн отличаются на

$$\Delta\lambda \geq 1/\sqrt{\alpha}$$

(3.6)

т.е. более, чем на ширину горба. В этом случае, как видно из рис.2, совпадения горбов, принадлежащих различным s , происходит, примерно, через N периодов. Это означает, что интегралы перекрытия, определяющие H_I , имеют порядок S/N , которое мало ввиду ограничения 1. Ограничение 2 эквивалентно (3.6), т.к. $\Delta k = k^2 \Delta\lambda \geq k^2 / \sqrt{\alpha}$. Наконец, ограничение 3 позволяет записать канонические уравнения для Фурье-гармоник $v(q_s)$, принадлежащих одной определенной S -волне, аналогично (2.6):

$$\frac{dv(q_s)}{dt} = iq_s \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(-q_s)}; \quad \frac{dv(-q_s)}{dt} = -iq_s \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v(q_s)} \quad (3.7)$$

Таким образом, согласно (3.4) гамильтониан задачи в нулевом приближении равен сумме энергий каждой из S -волн, а возмущение H_I учитывает их взаимодействие, которое имеет по-

рядок $S \Delta k / k$:

$$S/N \leq S \Delta k / k \ll 1$$

В действительности, правое неравенство должно быть более жестким и мы уточним его позднее.

Положим

$$v(q_s) = a(n_s) e^{in_s \vartheta_s};$$

$$a(-n_s) = a^*(n_s); \quad q_s = n_s k_s \quad (3.8)$$

В нулевом приближении согласно (2.2)

$$\frac{d\vartheta_s}{dt} = \omega_s = u_s k_s \quad (3.9)$$

причем $u_s = u_s(H_s, k_s)$. Удобно в дальнейшем каждую из S -волн рассматривать как степень свободы пакета (3.1), характеризуемую переменными энергия-фаза (H_s, ϑ_s) .

§ 4. Резонансные процессы и условие хаотизации

фаз S -волн

Рассмотрим изменение переменных (H_s, ϑ_s) , связанное с учетом взаимодействия S -волн. Согласно (2.7), (3.4)

$$\frac{dH_s}{dt} = i \int dq_s \left(\frac{\delta H_s}{\delta v(q_s)} \frac{\delta H_I}{\delta v(-q_s)} - \frac{\delta H_s}{\delta v(-q_s)} \frac{\delta H_I}{\delta v(q_s)} \right) q_s \quad (4.1)$$

Ввиду малости H_I можно воспользоваться для $\delta H_s / \delta v(\pm q_s)$ нулевым приближением. Учитывая выражения (3.7) - (3.9) приходим к следующему:

$$\frac{dH_s}{dt} = -i u_s \int dq_s \cdot q_s \left[v(-q_s) \frac{\delta H_I}{\delta v(-q_s)} - v(q_s) \frac{\delta H_I}{\delta v(q_s)} \right] \quad (4.2)$$

Отберем в (4.2) те члены, которые могут приводить к резонансам и, следовательно, являются старшими. Для этого заметим, что

$$\frac{\delta H_I}{\delta v(q_s)} = -\frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2} \int dq_s dq_{s_1} dq_{s_2} v(q_{s_1}) v(q_{s_2}) \cdot \delta(q_s + q_{s_1} + q_{s_2}) \quad (4.3)$$

и исключается случай $s = s_1 = s_2$. С каждым множителем $v(q_s)$ в (4.2) входит множитель $\exp(-i u_s q_s t)$. Отсюда следует, что простейшие резонансы происходят при выполняющихся одновременно условиях:

$$q_s + q_{s_1} + q_{s_2} = 0 \quad (4.4)$$

$$u_s q_s + u_{s_1} q_{s_1} + u_{s_2} q_{s_2} = 0$$

Последнее, однако, возможно лишь в том случае, когда все числа из тройки (s, s_1, s_2) различны (рис.3).

Резонанс типа

$$q_s + q_{s_1} + q_{s_2} + q_{s_3} = 0$$

$$u_s q_s + u_{s_1} q_{s_1} + u_{s_2} q_{s_2} + u_{s_3} q_{s_3} = 0$$

может происходить и при совпадающей паре чисел s_i , однако он связан с взаимодействием во втором порядке по H_I и даёт вклад меньший, чем (4.4). Таким образом в (4.2) мы должны отобрать члены, соответствующие резонансу типа (4.4), в которые вступают гармоники трех различных S -волн.

Подставляя (4.3) в (4.2) и учитывая сказанное, получаем:

$$\frac{dH_s}{dt} = -\frac{i}{2} \beta k_s u_s \sum_{s_1, s_2} \sum_{n_s, n_{s_1}, n_{s_2}} n_s \{ 2 a(n_s) a(n_{s_1}) a^*(n_{s_2}) \cdot e^{-i(n_s \vartheta_s + n_{s_1} \vartheta_{s_1} - n_{s_2} \vartheta_{s_2})} \delta_{n_s k_s + n_{s_1} k_{s_1} - n_{s_2} k_{s_2}} +$$

$$+ a^*(n_s) a(n_{s_1}) a(n_{s_2}) e^{i(n_s \vartheta_s - n_{s_1} \vartheta_{s_1} - n_{s_2} \vartheta_{s_2})}$$

$$\cdot \delta_{n_s k_s - n_{s_1} k_{s_1} - n_{s_2} k_{s_2}} + \text{K.C.} \}$$

(4.5)

Здесь: β - нормировочная константа, связанная с переходом от интегрирования к суммированию; числа n_s меняются от 1 до ∞ ; К.С. означает члены, комплексно сопряженные предыдущим; функцию $\delta_{n_s k_s \pm n_{s_1} k_{s_1} - n_{s_2} k_{s_2}}$ следует понимать здесь и в дальнейшем как символ Кронекера. Систему (4.5) следует дополнить уравнениями для изменения фаз ϑ_s , которые в первом порядке по теории возмущений сохраняют вид (3.9) с той лишь разницей, что теперь H_s зависят от t в соответствии с (4.5).

Исследуем изменение величин (H_s, ϑ_s) вследствие резонансов аналогично тому, как это делалось в /9/. Изменение H_s под действием процесса (4.4) приводит к изменению частоты ω_s из-за нелинейности и, следовательно, к нарушению условий (4.4). В связи с этим возникает максимально возможное изменение энергии вследствие резонанса, которое мы обозначим δH_s и связанное с ним максимальное изменение частоты:

$$\delta \omega_s = \frac{d\omega_s}{dH_s} \delta H_s \quad (4.6)$$

На рис.4 сплошные стрелки связывают частоты гармоник, вступающих в резонанс (4.4). Введем теперь расстояние между резонансами Ω_s равное величине, на которую нужно изменить ω_s , чтобы стал возможным резонанс типа (4.4) с ближайшими к q_{s_1}, q_{s_2} возможными значениями волновых чисел по спектру (например, процесс, указанный пунктирными стрелками на рис.4). При условии

$$K_s = \left(\frac{n_s \delta \omega_s}{\Omega_s} \right)^2 \gg 1 \quad (4.7)$$

гармоника с номером n_s находится постоянно в резонанса с какой-либо парой гармоник (n_{s_1}, n_{s_2}) и процесс типа (4.4) постоянно поддерживается. В этом случае (см. /5,9/) изменение фазы ϑ_s со временем можно считать хаотическим.

Произведем оценку параметра K_s . Для этого заметим, что процесс (4.4) может быть переписан в виде:

$$n_s k_s \pm n_{s_1} k_{s_1} - n_{s_2} k_{s_2} = 0$$

$$n_s \vartheta_s \pm n_{s_1} \vartheta_{s_1} - n_{s_2} \vartheta_{s_2} = 0, \quad (n_i > 0) \quad (4.8)$$

$$\vartheta_i = k_i \alpha_i = k_i (\alpha_i - 1)$$

Выделим в сумме (4.5) член, соответствующий, например, знаку минус в (4.8). Этот член пропорционален

$$\exp i(n_s \theta_s - n_{s_1} \theta_{s_1} - n_{s_2} \theta_{s_2})$$

где

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \vartheta_s (H_s) \quad (4.9)$$

Из (4.5), (4.6) получаем оценку:

$$n_s \delta \omega_s = n_s \delta \vartheta_s \sim \left[n_s^2 S^2 k_s \frac{d\vartheta_s}{dH_s} a_{n_s}^3 \right]^{1/2}$$

Переходя в (3.5) от интегрирования к суммированию и учитывая, что $\alpha_s \ll 1$, имеем:

$$\frac{dH_s}{d\vartheta_s} \sim \sqrt{\alpha_s} \quad (4.10)$$

Отсюда получаем, используя для $a(n_s)$ выражение (2.3)

$$n_s \delta \omega_s \sim \frac{S}{N_s} n_s k_s \alpha_s; \quad (n_s \lesssim N_s) \quad (4.11)$$

Поскольку согласно (4.8)

$$\Omega = \alpha \Delta k + k \Delta \alpha$$

то теперь легко записать критерий (4.7) в явном виде:

$$K = \left(\frac{S}{N} n \frac{k}{\Delta k} \right)^2 \gg 1, \quad (n \lesssim N) \quad (4.12)$$

где индексы внизу для удобства опущены. Из (4.12) следует, что для некоторых $n < n_0$ критерий стохастичности может не выполняться и, наоборот, для достаточно больших n , близких к N , он выполняется всегда. В оптимальном случае подставляя (3.3) в (4.12) имеем просто

$$K = S^2 n^2 \gg 1$$

Это означает, что фактически все гармоники S -волны имеют хаотические фазы.

Время хаотизации фазы τ_n гармоники с частотой $n\omega$ определяется согласно /9/

$$\tau_n \sim (NS\Omega \ln K)^{-1}$$

Из (4.7) и (4.12) следует, что число перекрытых резонансов, равное \sqrt{K} приводит к эффективному увеличению малого параметра задачи. Условие малости H_s должно теперь иметь вид:

$$S^2/N \ll 1$$

Действительно, изменение α равно:

$$\Delta \alpha \sim \sqrt{K} \delta \alpha = \alpha \sqrt{K} S \Delta k / k \sim \alpha S^2 / N$$

и написанное выше правое неравенство сразу следует из условия $\Delta \alpha \ll \alpha$

§ 5. Кинетическое уравнение для S -волн

Результаты предыдущего параграфа позволяют перейти к выводу основного кинетического уравнения ("master equation") для S -волн в приближении хаотических фаз.

Введем функцию распределения $f(t, H, \theta)$, где (H, θ) означает совокупность всех переменных $(H_1, \dots, H_s; \theta_1, \dots, \theta_s)$. Уравнение Лиувилля для f имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_s \nu_s \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H_s} - \sum_s \nu_s \frac{\partial f}{\partial H_s} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta_s} = 0$$

или, после подстановки (3.4) вместо \mathcal{H} :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_s \nu_s \frac{\partial f}{\partial \theta_s} = \sum_s \nu_s \left(\frac{\partial H_s}{\partial \theta_s} \frac{\partial f}{\partial H_s} - \frac{\partial H_s}{\partial H_s} \frac{\partial f}{\partial \theta_s} \right) \quad (5.1)$$

Разложим f в ряд Фурье:

$$f(t, H, \theta) = \sum_{\{m\}} \left(f^{(m)}(H, t) \exp \left[i \left(m, \theta - \int \nu dt \right) \right] + f^{(-m)}(H, t) \exp \left[-i \left(m, \theta - \int \nu dt \right) \right] \right) \quad (5.2)$$

$$f^{(m)} = \left(f^{(-m)} \right)^*$$

где суммирование ведется по всем возможным системам чисел $\{m\}$ и

$$(m, \varphi) \equiv \sum_s m_s \varphi_s$$

При подстановке (5.2) в (5.1) учтем, что вследствие резонансов частоты ν меняются согласно (4.11) на величину

$$\delta \nu = \frac{\sum_s \nu_s}{N} \nu \quad (5.3)$$

Выражение (5.3) означает, что влияние резонансов сказывается в следующем порядке малости параметра S/N , по которому производится разложение при выводе кинетического уравнения. Это позволяет воспользоваться в дальнейшем диаграммой техникой того же типа, что и в работе Пригожина-Броута /10/.

Из (5.1), (5.2) и (3.5) имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{i}{2} \sum_{s, s_1, s_2} \sum_{n_s, n_{s_1}, n_{s_2}} \sum_{\{m\}} (2\pi)^{-S} \int d\theta_1 \dots d\theta_s \cdot \left(i \exp \left\{ i \left[n\theta \right] + i \sum_s m_s \left(\theta_s - \int \nu_s dt \right) \right\} a^*(n_s) a(n_{s_1}) a(n_{s_2}) \cdot \left[n \nu \frac{\partial}{\partial H} \right] f^{(m)} - i \left\{ \left[n \nu \frac{\partial}{\partial H} \right] a^*(n_s) a(n_{s_1}) a(n_{s_2}) \right\} \exp \left\{ i \left[n\theta \right] + i \sum_s m_s \left(\theta_s - \int \nu_s dt \right) \right\} f^{(m)} \right) \delta_{[nk]} + K.C. =$$

$$= -\frac{3}{2} i \sum_{s, s_1, s_2} \sum_{n_s, n_{s_1}, n_{s_2}} \left\{ \left[n \nu \frac{\partial}{\partial H} \right] a^*(n_s) a(n_{s_1}) a(n_{s_2}) \cdot \exp \left(-i \left[n \int \nu dt \right] \right) \delta_{[nk]} f^{(n_s), (n_{s_1}), (n_{s_2})} \right\} + K.C.$$

$$F \equiv f^{(0)}(H, t) \quad (5.4)$$

где принято сокращение:

$$[nQ] \equiv n_s Q_s - n_{s_1} Q_{s_1} - n_{s_2} Q_{s_2}$$

Каждую экспоненту типа $\exp(in_s \theta_s)$ будем представлять тонкими линиями, заключенными внутри двух толстых линий. Так, например, на рис. 5а изображен переход

$$\langle 0 | \rightarrow | n_s \rangle$$

для $n_s = 3$. Процесс (4.8) показан на рис. 5б. Совокупность тонких линий, ограниченная двумя толстыми линиями, относится к фиксированной S -волне и может быть названа элементом сильной связи, т.к. изменение любой из Фурье-компонент $a(n_s)$ приводит к изменению всех остальных Фурье-компонент той же S -волны. Суммирование в (5.4) по n_i учитывает влияние сильной связи внутри i -ой S -волны. Вершина на диаграмме 5б учитывает слабую связь ($\sim S/N$) между тремя элементами сильной связи. Выражаем далее F из (5.4) в виде формального ряда по степеням H_I , отбираем главные члены ряда и учитываем начальные условия

$$f^{(n)}(t=0) = F(t=0) \delta_{n,0}$$

соответствующие случайным фазам θ . Пример главных членов во втором и четвертом порядке приведен соответственно на рис. 6а и 6б. Опуская стандартные выкладки, приходим к следующему кинетическому уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{s, s_1, s_2} \sum_{n_s, n_{s_1}, n_{s_2}} \left[n_s \frac{\partial}{\partial H} \right] |a^*(n_s) a(n_{s_1}) a(n_{s_2})|^2 \cdot \delta([n\nu]) \delta_{[nk]} \left[n \nu \frac{\partial}{\partial H} \right] F \quad (5.5)$$

где $a(n_i)$ предполагаются выраженными как функции H_i .

Введем переменную действие I с помощью соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial I} = \nu(H) \frac{\partial}{\partial H} = k\alpha(H) \frac{\partial}{\partial H} \quad (5.6)$$

С точностью до численного коэффициента порядка единицы из (4.10) следует:

$$\alpha = (H/k)^{2/3} \quad (5.7)$$

Подстановка (5.7) в (5.6) даёт связь:

$$H = kI^3 \\ \alpha = I^2 \quad (5.8)$$

Кроме того, согласно (2.3)

$$a_n = \frac{\alpha}{N} = \sqrt{\alpha} k = kI \quad (5.9)$$

Учтем теперь, что амплитуды a_n экспоненциально малы при $n > N$. Это позволяет ограничить суммирование по n_i в (5.5). Подставляя (5.6), (5.8), (5.9) в (5.4) получаем окончательно:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 6\pi \sum_{s, s_1, s_2} \sum_{n_s, n_{s_1}, n_{s_2}} \left[n_s \frac{\partial}{\partial I} \right] G_{ss_1s_2} \cdot \delta([nkI^2]) \delta_{[nk]} \left[n \frac{\partial}{\partial I} \right] F \quad (5.10)$$

где

$$G_{ss_1s_2} = (k_s k_{s_1} k_{s_2} I_s I_{s_1} I_{s_2})^2 \quad (5.11) \\ [nkI^2] = n_s k_s I_s^2 - n_{s_1} k_{s_1} I_{s_1}^2 - n_{s_2} k_{s_2} I_{s_2}^2 \\ N_i = \sqrt{\alpha_i} / k_i = I_i / k_i$$

§ 6. Частные свойства кинетического уравнения и турбулентное движение

Равновесным решением кинетического уравнения является

$$F = F\left(\sum_s H_s\right) \quad (6.1)$$

обращающее правую часть (5.5) в нуль. Представляет интерес об-

судить другие возможности, связанные с колмогоровской теорией турбулентного движения. Как уже отмечалось во введении, в реальных задачах скорость нелинейных волн имеет верхнюю границу, выше которой волна опрокидывается. Обозначим через α_c критическое значение параметра α , которое не зависит от S . Движение отдельной S -волны со случайной фазой можно описывать таким же способом, как и броуновскую частицу, что приводит, в среднем, к росту α_s [11]. Этот процесс сопровождается сужением горбов S -волны и появлением более высоких значений волновых чисел q_s за счёт роста N_s . Когда α_s достигает значения α_c , волна опрокидывается и её энергия диссипируется в другой (многопоточковый) вид движения. Если число опрокинутых волн мало по сравнению с S , то можно пренебречь их обратным влиянием на процесс, описываемый уравнением (5.10). При этом стационарной картине соответствует постоянный поток энергии

$$\frac{d}{dt} \langle H_z \rangle = \text{const} \equiv C \quad (6.2)$$

где C не зависит от z , а угловые скобки означают усреднение по $F(H, t)$. Выражение (6.2) можно переписать в виде:

$$\int dH_1 \dots dH_2 \dots dH_S \quad H_z \frac{\partial F(H_1, \dots, H_2, \dots, H_S; t)}{\partial t} = C \quad (6.3)$$

Зависимость средней энергии

$$E_z(k_z) = \langle H_z \rangle$$

от k_z можно оценить из соображений размерности.

Отметим, что изменение энергии по спектру волн происходит совсем иным образом, чем в теории слабой связи. При опрокидывании z -ой S -волны исчезают Фурье-гармоники, соответствующие волновым числам $n_z k_z$, где n_z меняется от 1 до N_z . Таким образом, энергия равномерно почти по всей ширине спектра подсаживается.

Умножим (5.10) на I_z^m и проинтегрируем уравнение по всем H_s . Это даёт:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle I_z^m \rangle &= 6\pi m \sum_{s_1, s_2} \left\langle \sum_{n_1, n_2} \frac{N_{s_1} N_{s_2}}{n_1 n_2} (n_1 I_{s_1}^{m-1} \delta_{z s_1} - \right. \\ &\quad \left. - n_2 I_{s_2}^{m-1} \delta_{z s_2}) G_{s_1 s_2} \delta([nkI^2]) \delta_{[nk]} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\frac{\partial}{\partial I} \right] \right\rangle = 6\pi m \sum_{s_1, s_2} \left\langle \sum_{n_1, n_2} \frac{N_{s_1} N_{s_2}}{n_1 n_2} n_z I_z^{m-1} \left\{ G_{z s_1 s_2} \delta(n_z k_z I_z^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_{s_1} k_{s_1} I_{s_1}^2 - n_{s_2} k_{s_2} I_{s_2}^2) \delta_{n_z k_z - n_{s_1} k_{s_1} - n_{s_2} k_{s_2}} \left(n_z \frac{\partial}{\partial I_z} - n_{s_1} \frac{\partial}{\partial I_{s_1}} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - n_{s_2} \frac{\partial}{\partial I_{s_2}} \right) - 2 G_{s_1 z s_2} \delta(n_{s_1} k_{s_1} I_{s_1}^2 - n_z k_z I_z^2 - n_{s_2} k_{s_2} I_{s_2}^2) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \delta_{n_{s_1} k_{s_1} - n_z k_z - n_{s_2} k_{s_2}} \left(n_{s_1} \frac{\partial}{\partial I_{s_1}} - n_z \frac{\partial}{\partial I_z} - n_{s_2} \frac{\partial}{\partial I_{s_2}} \right) \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

С помощью δ -функций производим суммирование по n_i :

$$\begin{aligned} k_z \frac{d}{dt} \langle I_z^m \rangle &= 6\pi m \sum_{s_1, s_2} \left\langle \sum_{n_2} \frac{N_z}{n_2} n_z^2 I_z^{m-3} \left\{ G_{z s_1 s_2} \left(\frac{\partial}{\partial I_z} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Q_1 \frac{\partial}{\partial I_{s_1}} - Q_2 \frac{\partial}{\partial I_{s_2}} \right) - 2 G_{s_1 z s_2} \left(P_1 \frac{\partial}{\partial I_{s_1}} - \frac{\partial}{\partial I_z} - P_2 \frac{\partial}{\partial I_{s_2}} \right) \right\} \right\rangle \approx \end{aligned}$$

$$\approx 2\pi m k_2^{-3} \left\langle I_2^m \sum_{s_1, s_2} \left\{ G_{2s_1 s_2} \left[3 \frac{\partial}{\partial I_2} - (Q_1 + 2P_1) \frac{\partial}{\partial I_{s_1}} - (Q_2 - 2P_2) \frac{\partial}{\partial I_{s_2}} \right] \right\} \right\rangle \quad (6.4)$$

где обозначено:

$$Q_1 = \frac{k_2}{k_{s_1}} \frac{I_2^2 - I_{s_2}^2}{I_{s_1}^2 - I_{s_2}^2}; \quad Q_2 = \frac{k_2}{k_{s_2}} \frac{I_{s_1}^2 - I_2^2}{I_{s_1}^2 - I_{s_2}^2}$$

$$P_1 = \frac{k_{s_1}}{k_2} \frac{I_{s_1}^2 - I_{s_2}^2}{I_2^2 - I_{s_2}^2}; \quad P_2 = \frac{k_{s_1}}{k_{s_2}} \frac{I_2^2 - I_{s_1}^2}{I_2^2 - I_{s_2}^2}$$

При $m = 3$ приравниваем правую часть (6.4) константе, не зависящей от k , в соответствии с (6.2) ищем решение получившегося уравнения в виде:

$$E_2 = E_0 k_2^\mu \quad (6.5)$$

Из соображений размерности легко находим:

$$\langle I_2 \rangle \sim k_2^{-3/8}$$

Откуда $\mu = -1/8$.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. Рассмотренный в работе случай соответствует сильной нелинейности, величину которой можно характеризовать числом N "внутренних" степеней свободы S -волн, что соответствует в обычной гидродинамике большим числам Рейнольдса. В последнем можно убедиться следующим образом^{x)}. Составим аналог числа

x) Этим замечанием мы обязаны Б.В.Чирикову.

Рейнольдса для уравнения (1.1):

$$R = \frac{v}{k^2} \sim \frac{\alpha}{k^2} = N^2$$

Таким образом, разложение в приведенной теории возмущений ведется по степеням $R^{-1/2}$.

Выражаем благодарность Б.Б.Кадомцеву, В.Л.Покровскому и Б.В.Чирикову за ценные обсуждения.

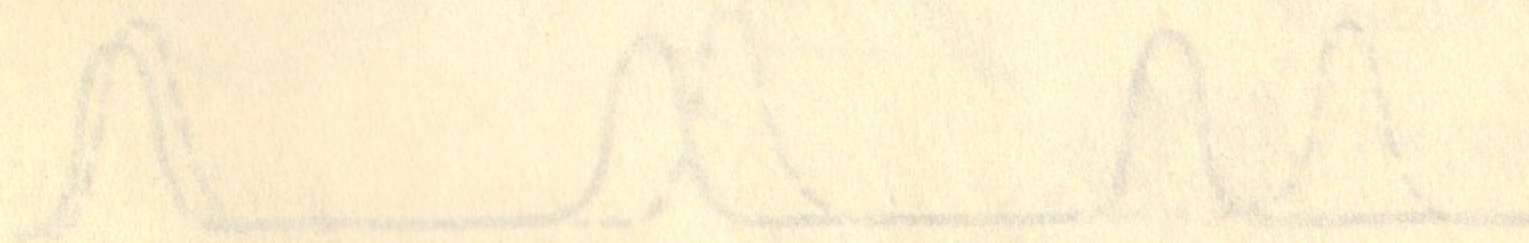


Рис. 2

Л и т е р а т у р а

- /1/ А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82, (1961).
- /2/ C. Gardner, J. Greene, M. Kruskal, R. Miura. *Phys. Rev. Lett.* 19, 1095 (1967)
- /3/ Ю.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 51, 1557 (1966).
- /4/ С.Улам. Нерешенные математические задачи. Наука. Москва (1964).
- /5/ Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков. ДАН СССР, 166, 57 (1966).
- /6/ N.J. Zabusky, *Proc. of the Confer. on Math. Models in the Phys. Sciences. N.Y.* p. 99 (1963)
- /7/ М.П.Рабинович. Изв. ВУЗов. Радиофизика, 10, 214 (1967).
- /8/ Б.Б.Кадомцев. Турбулентность плазмы. В сб. "Вопросы теории плазмы", т.4, Атомиздат (1964).
- /9/ Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев, ЖЭТФ, 52, 1081 (1967).
- /10/ R. Bzout, I. Prigogine. *Physica.* 22, 621 (1956)
- /11/ Г.М.Заславский, Н.Н.Филоненко. ЖЭТФ, 56, № 3 (1969).



Рис. 1

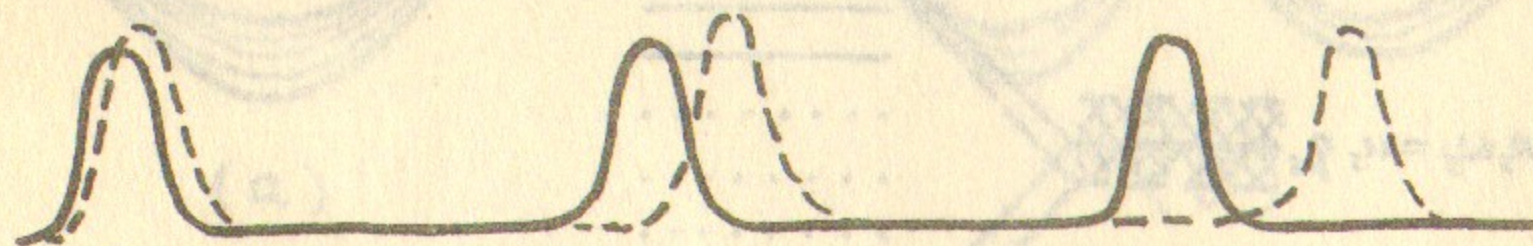


Рис. 2

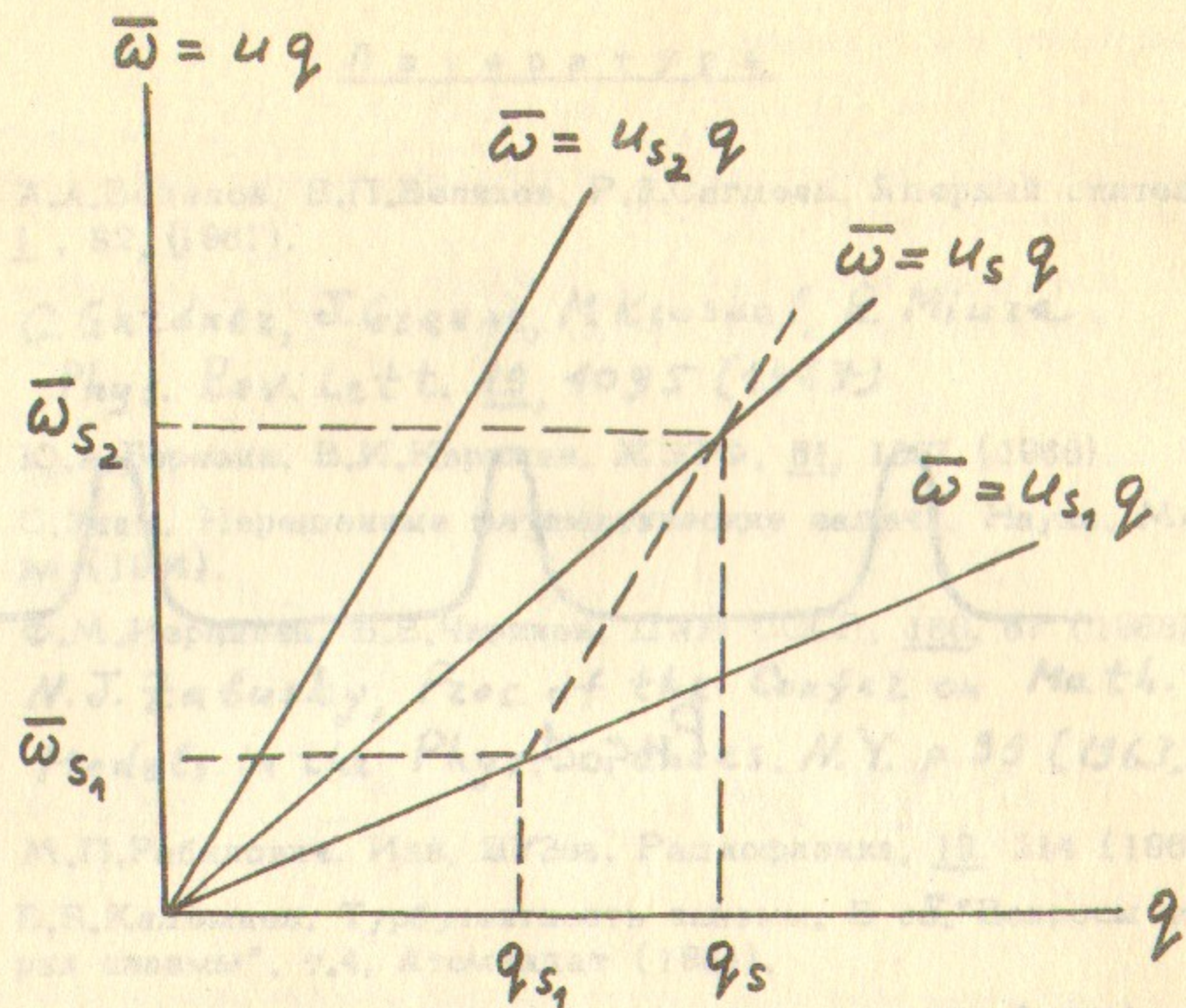


Рис. 3

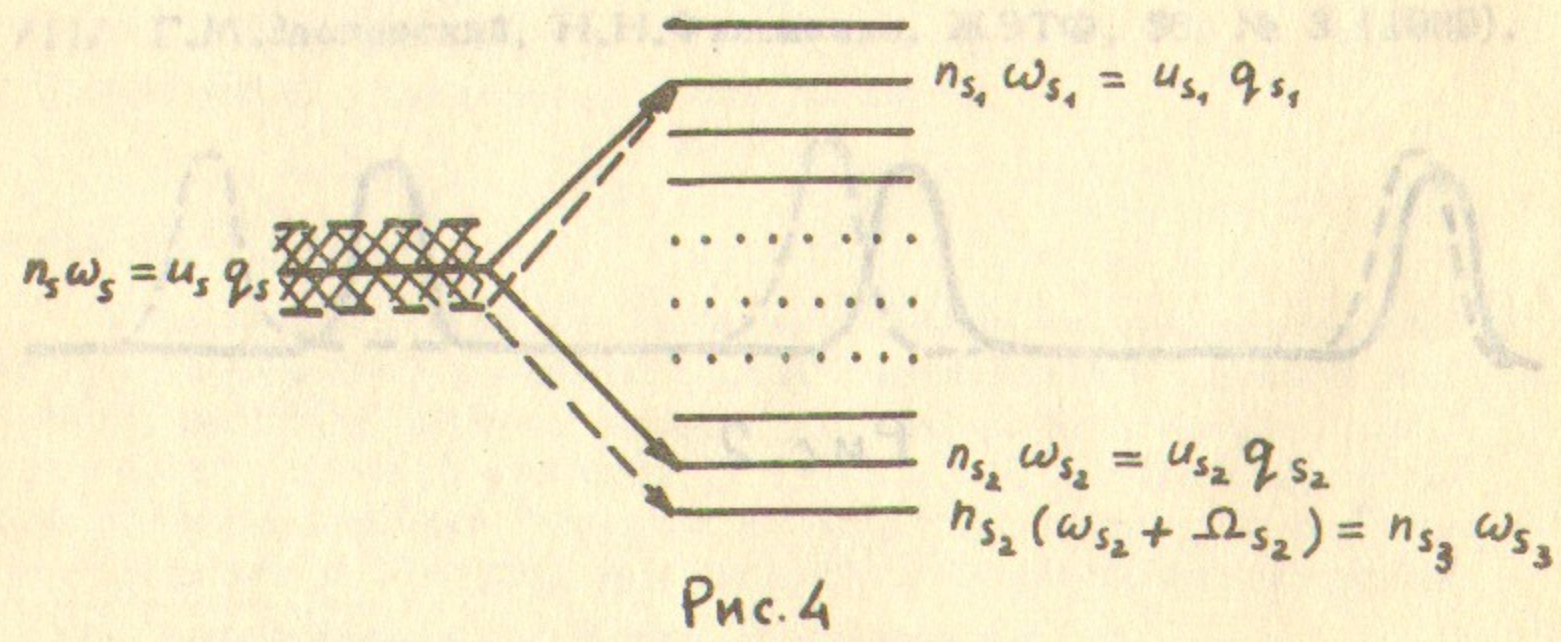
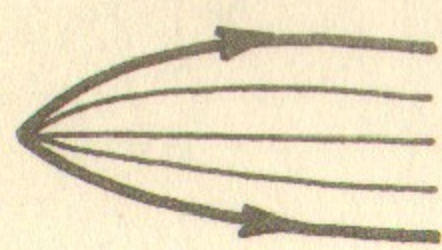
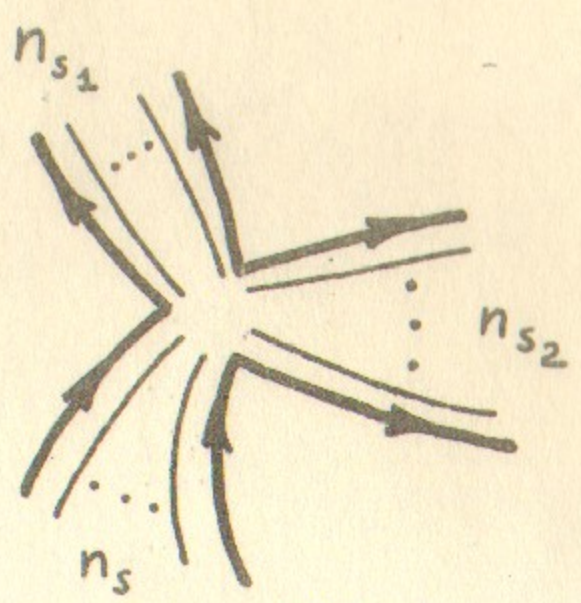


Рис. 4

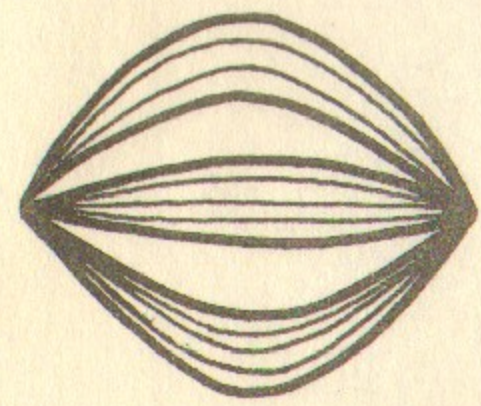


(a)

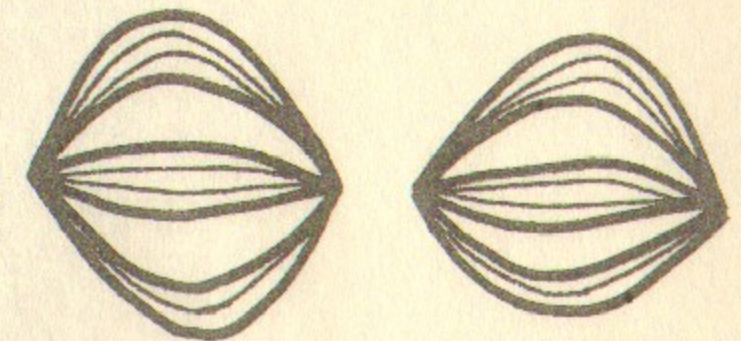


(δ)

Рис. 5

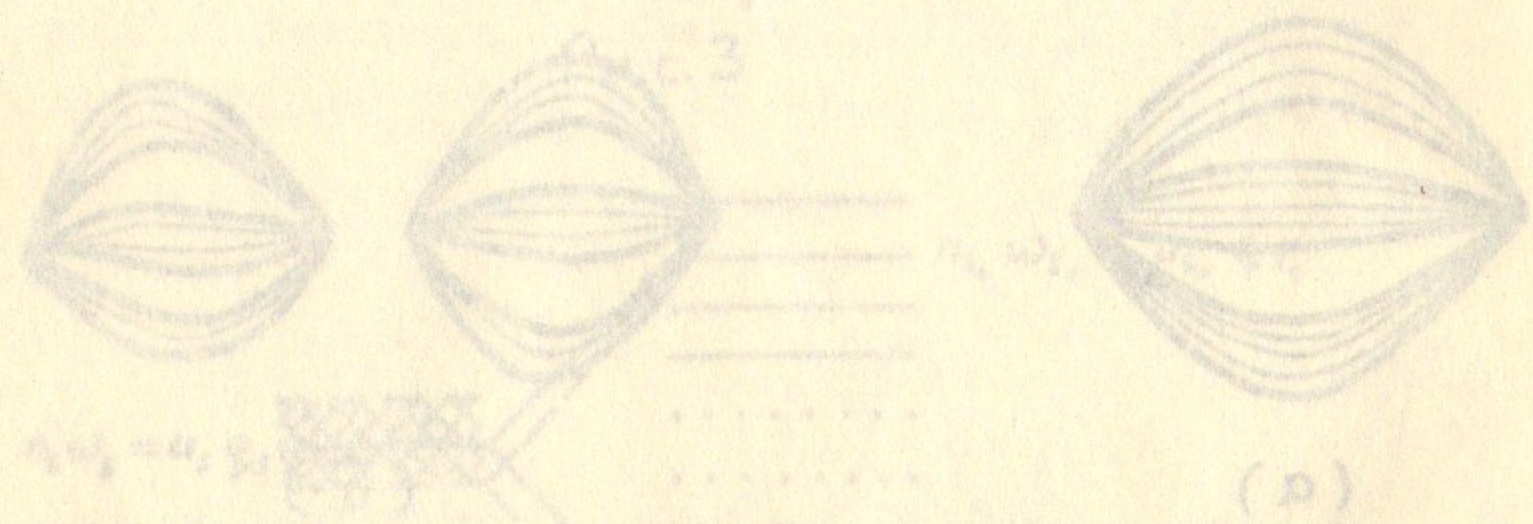
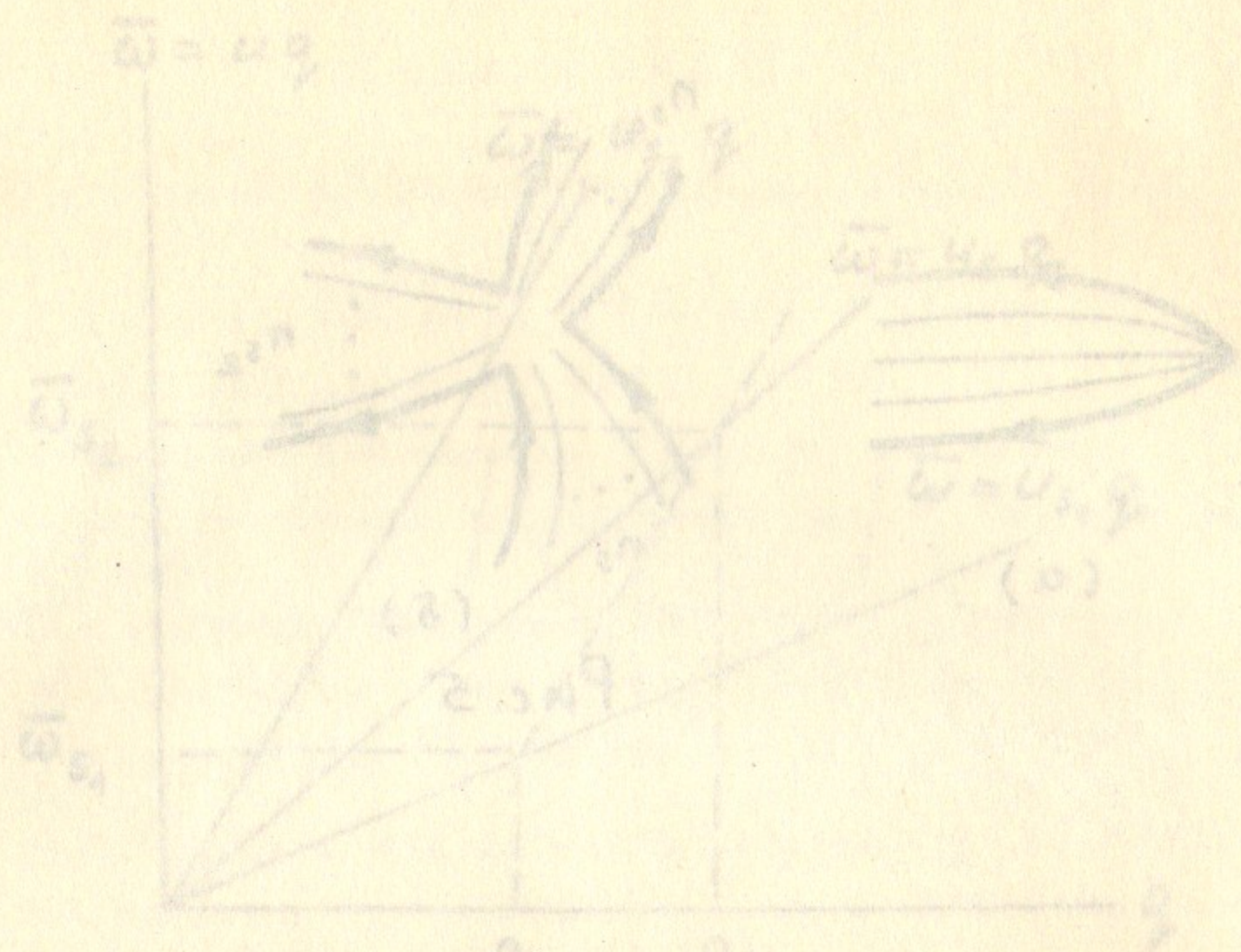


(a)



(δ)

Рис. 6



Ответственный за выпуск **Филоменко**

Подписано к печати 10.3.69

Усл. 2,1 печ.л., тираж 200 экз.

Заказ № 290 , бесплатно

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.