

19
**И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

препринт 309

С.Г.Алиханов, И.К.Конкашбаев, П.З.Чеботаев

**ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС
ПЛОТНОЙ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЫ,
УДЕРЖИВАЕМОЙ СТЕНКАМИ**

НОВОСИБИРСК

1969

С.Г.Алиханов, И.К.Конкашбаев, П.З.Чеботаев

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ БАЛАНС ПЛОТНОЙ ТЕРМОЯДЕРНОЙ ПЛАЗМЫ, УДЕРЖИВАЕМОЙ СТЕНКАМИ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе рассматривается предложенная Г.И.Будкером модель термоядерного реактора с плотной $\beta \gg 1$ / плазмой цилиндрической геометрии. Давление плазмы постоянно вдоль z и r и удерживается только стенками, продольное магнитное поле служит только для уменьшения теплопроводности поперек поля. Показано, что при учёте излучения не существует приемлемого решения уравнения баланса энергии по радиусу при однородном магнитном поле и $nT = const$. Обсуждается возможность осуществления стационарной термоядерной реакции с пристеночным магнитным полем.

В данной работе, в связи с предложенной Г.И.Будкером моделью разрабатываемого в Институте ядерной физики СО АН СССР термоядерного реактора, рассматривается возможность существования самоподдерживающейся термоядерной реакции в достаточно плотной плазме, для которой длина свободного пробега и ларморовский радиус частиц много меньше характерных размеров системы в случае, когда газокINETическое давление плазмы полностью передается на стенки. Магнитное поле служит только для уменьшения теплопроводности.

Впервые система с $nT = \text{const}$ была рассмотрена Альфвеном в 1961 г /1/ без учета излучения. Так как размеры реактора без магнитного поля очень велики, то наложение магнитного поля для уменьшения теплопроводности в реакторе с $nT = \text{const}$ приводит к рассмотрению систем цилиндрической и плоской геометрии. Нетрудно видеть, что без учета излучения приемлемое решение существует в любом случае. Однако при наличии излучения это далеко не очевидно. Уменьшение размера L_y области с положительным выходом энергии при наложении достаточно сильного поля может привести к тому, что этой энергии не хватит для компенсации излучения в остальной области $L_{\text{ин}}$. Например в случае классической теплопроводности размер L_y определяется как

$$L_y \sim \frac{\alpha T^{5/2}}{H^2 Q_y} \quad (1)$$

где α - коэффициент теплопроводности, а размер $L_{\text{ин}}$ определяется областью максимальной теплопроводности при $(\omega\tau)_i \sim 1$, откуда следует

$$T_{(\omega\tau)_i \approx 1}^{5/2} \sim H \quad (2)$$

$$\alpha_{\text{ин}} \sim \frac{1}{H}$$

Ниже рассматривается подробнее возможность существования стационарных решений уравнения баланса энергии самоподдерживающегося термоядерного реактора. Будем рассматривать реактор цилиндрической геометрии. Столб плазмы термоядерных пара-

метров находится в однородном продольном магнитном поле. Давление плазмы постоянно вдоль z и \bar{z} и удерживается только стенками. Уравнение баланса энергии имеет вид

$$-\operatorname{div}(\alpha \nabla T) = -Q_r + Q_y \quad (3)$$

Мощность излучения взята из /2/

$$Q_r = \frac{6 \cdot 10^{-22} n^2}{\sqrt{T}} + 1,6 \cdot 10^{-27} n^2 \sqrt{T} \quad (4)$$

а мощность ядерного энерговыделения из /3/

$$Q_y = \frac{n_D \cdot n_T}{4} 1,6 \cdot 10^{-7} T^{-2/3} \exp\left(-\frac{452 \cdot 10^3}{T^{1/2}}\right) \cdot 3,5 \text{ МэВ} \quad (5)$$

Точные расчёты Q_y по Козлову /4/ не более чем на 10% отличаются от аппроксимационной формулы (5) в интересующем нас диапазоне температур. При этом предполагается, что выполняются условия прозрачности излучения и справедливости диффузионного приближения:

$$L_{e,i} \ll \left(\frac{dx}{d \ln T} \right) \quad (6)$$

(В дальнейшем выполнение этих условий будет рассмотрено отдельно для каждого случая).

В рассматриваемой системе отсутствует наиболее опасные МГД неустойчивости. Однако в такой системе могут быть и другие, например, перегреваемая и радиационная. В настоящей работе проблема устойчивости не рассматривается, а влияние мелкомасштабных неустойчивостей, если они будут, можно учесть введением турбулентной теплопроводности с коэффициентом диффузии порядка бомовского.

Численное решение трехмерного уравнения (3) требует значительного времени счёта и памяти машины, однако для получения полезных оценок можно ограничиться решением отдельно

уравнения баланса для r и \bar{z} . Это предположение не совсем корректно, однако в случае преобладания потерь энергии по r или \bar{z}

$$\operatorname{div}_z(\alpha \nabla_z T) \gg \operatorname{div}_r(\alpha \nabla_r T) \quad (7)$$

$$\operatorname{div}_z(\alpha \nabla_z T) \ll \operatorname{div}_r(\alpha \nabla_r T) \quad (8)$$

это предположение даёт достаточно хорошее приближение.

Таким образом, уравнение (3) распадается на два: вдоль \bar{z}

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\alpha \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}) = -Q_r + Q_y \quad (9)$$

и r

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \alpha \frac{\partial T}{\partial r}) = -Q_r + Q_y \quad (10)$$

Так как Q_y и Q_r пропорциональны n^2 , то можно записать

$$Q_r - Q_y = n^2 f(T)$$

Функция $f(T) = 0$ при $T = T_3 = 5$ кэВ для Д-Т (когда мощность ядерного энерговыделения равно мощности излучения). Так как $nT = \text{const}$, то уравнения (9, 10) можно привести к виду

$$\frac{d}{dz} \left[\alpha(T) \frac{dT}{dz} \right] = n_0^2 f(T) \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \alpha(T, H) \frac{dT}{dr} \right] = n_0^2 f(T) \quad (12)$$

где n_0 - плотность при z , $z = 0$.

Рассмотрим уравнение (11). Его можно проинтегрировать один раз по z

$$\frac{1}{2} \left(\alpha \frac{dT}{dz} \right)^2 = n_0 \int f(T) \alpha(T) dT + C \quad (13)$$

Отсюда видно, что если положить

$$\varphi(T) = \int \alpha(T) dT \quad (14)$$

$$V(\varphi) = V(T) = -n_0 \int f \cdot \alpha dT$$

то уравнение (11) сводится к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \quad (15)$$

которое по форме совпадает с уравнением движения частицы в потенциальном поле, где роль скорости играет поток энергии

$\left(\alpha \frac{dT}{dz} \right)$, а потенциала - $V(T)$. Так как $f(T)$ имеет

0 при $T = T_3$, то $V(T)$ имеет минимум там же, так что "частица" движется в потенциальной яме. Вид "потенциала" для

- а) $H = 0$, $\alpha \sim T^{5/2}$
- б) $H \neq 0$, $\alpha = \alpha_{кл} = \alpha_e + \alpha_i$
- в) $H \neq 0$, $\alpha = \alpha_{кл} + \alpha_T$

приведен на рис. 1. В расчетах коэффициент теплопроводности был взят из [5], а коэффициент турбулентной теплопроводности определялся из бомовского коэффициента диффузии и был взят в виде

$$\alpha_T = \alpha_e \frac{1}{16} \frac{1}{(\omega \tau)_e} \quad (16)$$

Из вида "потенциальной ямы" следует, что существует некоторое T_k такое, что при начальной температуре T_0 такой, что $T_0 < T_k$ - решение имеет колебательный характер с минимальной температурой, определяемой сохранением "полной энергии"

$$\frac{1}{2} \left(\alpha \frac{dT}{dz} \right)^2 + V(T) = \text{const} \quad (17)$$

Решение имеет вид

$$T(z) = -\sqrt{2} \int_0^z \frac{\sqrt{-V(T) + V(T_0)}}{\alpha(T)} dz + T_0 \quad (18)$$

с периодом

$$z = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_{T_0}^{T_{\min}} \frac{\alpha(T) dT}{\sqrt{-V(T) + V(T_0)}} \quad (19)$$

Полагая $\nabla T = 0$ при $T = T_0$ нетрудно видеть, что при $T = 0$ могут быть следующие случаи поведения ∇T :

- 1. $\nabla T|_{T=0} = 0$ при $T_0 = T_k$
- 2. $\nabla T|_{T=0} < 0$ при $T_0 > T_k$

Для уравнения (11) $T_k = 8,9$ кэВ, так что при $T > T_k$ имеется решение с $T = 0$. Так как в этом случае коэффициент теплопроводности не зависит от плотности, то появляется параметр подобия

$$a^2 = \frac{n_0 L_0^2}{\alpha_0} \quad (20)$$

где L_0 масштаб длины, поэтому из решения уравнения (11)

для конкретного n_0 можно получить решения для любых плотностей соответствующим изменением масштаба длины

$$L = L_0 \frac{n}{n_0}$$

Так как уравнение (11) не интегрируется аналитически, то оно было проинтегрировано численно. На рис.2 приведены графики $T(z)$ для различных начальных температур. На рис.3 приведена зависимость максимальной длины от начальной температуры для постоянной плотности и постоянного давления. Длина реактора имеет минимум для $n = \text{const}$

$$L_{\min} = 2 \cdot 2,64 \cdot 10^5 \left(\frac{n_0}{n} \right), \quad T_0 = 7,75 \text{ кэВ}$$

для $\rho = \text{const}$

$$L_{\min} = 2 \cdot 1,24 \cdot 10^5 \left(\frac{n_0}{n} \right), \quad T_0 = 7,3 \text{ кэВ}$$

где $n_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

Как следует из анализа кривых $T(z)$ условие прозрачности излучения

$$l_v \gg \left(\frac{dx}{d \ln T} \right)$$

и справедливость диффузионного приближения

$$l_{e,i} \ll \left(\frac{dx}{d \ln T} \right)$$

в данном случае выполняются.

Необходимая длина реактора может быть существенно сокращена уменьшением сечения цилиндра на его концах (при постоянном потоке магнитного поля $\alpha r^2 H = \text{const}$). В данном случае магнитные пробки служат только для увеличения плотности теплового потока вдоль силовых линий. Резкое увеличение градиента температуры $\nabla T \sim H$ в пробке приводит к уменьшению размера области теплоотвода $L_{\text{вн}}$. Например, увеличение плотности теплового потока в 12 раз ($H_{\text{кр}}/H_0 = 12$) соответствует сшиванию решений а) и б) на рис.2 при $T = 9,5$ кэВ, что приводит к сокращению длины реактора почти в 3 раза.

II.

В радиальном случае уравнение (12) можно привести к виду

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = f(\varphi)$$

Если снова обратиться к аналогии с движением частицы в потенциальном поле, то второй член, возникающий вследствие радиальности, можно интерпретировать как затухание, зависящее от "времени", т.е. от координаты. Следовательно, рассуждения о характере решений справедливы и здесь, если учитывать то обстоятельство, что вследствие "затухания" критическая температура $T_{\text{к}}$ несколько увеличивается. Поэтому при начальной температуре $T_0 < T_{\text{к}}$ решение имеет колебательный характер с затухающей амплитудой и увеличивающимся периодом, а при $T_0 > T_{\text{к}}$ имеются решения с $T = 0$.

При вычислении оказалось, что величина $V(T_0) - V(0) = 0,5 \left(\alpha \frac{dT}{dr} \right)^2$ проходит через 0 при $H = 1$ гс, имеет максимум при $H = 10$ гс и асимптотически приближается к 0 при увеличении магнитного поля. Таким образом, оказывается, что решения с $T = 0$ существуют только для слабых полей, что приводит к $R \sim 1$ км. Это связано с тем обстоятельством, что мощность ядерного энерговыделения имеет максимум при постоянном давлении при температуре около 12 кэВ, так что величина

$$\int \alpha(T) f(T) dT$$

становится в области больших температур из-за уменьшения теплопроводности весьма малой. Физически это можно понять следующим образом. При увеличении магнитного поля сильно уменьшается теплопроводность, что приводит к уменьшению размера области $L_{\text{я}}$, где $Q_{\text{я}} > Q_{\text{н}}$. Этот размер можно оценить из условия

$$Q_{\text{я}} L_{\text{я}} = \alpha \frac{dT}{dr} \approx \alpha(T, H) \frac{T_0}{L_{\text{я}}}$$

$$L_{\text{я}} \approx \sqrt{\frac{\alpha_0 T_0}{H^2 Q_{\text{я}}}}$$

Размер $L_{\text{вн}}$ зоны тепловода определяется градиентом температуры в области vicinity максимальной теплопроводности, т.е. при

$$(\omega\tau)_i \approx 1 \quad \text{и} \quad T = T_M$$

$$T_M^{5/2} \sim \frac{1}{H}, \quad T_M \sim H^{-2/5}$$

Откуда

$$\frac{\alpha T}{L_{\text{вн}}} \sim Q_{\text{я}} L_{\text{я}}$$

$$L_{\text{вн}} \sim \frac{\alpha_M T_M}{Q_{\text{я}} L_{\text{я}}} \sim \frac{1}{H^{2/5}}$$

Таким образом, при увеличении магнитного поля H размер области с положительным выходом энергии $L_{\text{я}}$ уменьшается в H раз и запасенной энергии не хватает для компенсации излучения в зоне тепловода, размер которой уменьшается только в $H^{2/5}$ раз.

Включение турбулентной теплопроводности, казалось бы, улучшает положение, так как при постоянном давлении коэффициент турбулентной теплопроводности не зависит от температуры

$$\alpha_T = \frac{\alpha_0^2}{16} \frac{T^{3/2}}{(\omega\tau)_e} \sim H_0 n_0$$

однако, как видно из рис.1, абсолютная величина α_T слишком мала и увеличивает область допустимых полей незначительно.

Колебательный характер решения уравнения баланса энергии в практически интересных случаях достаточно сильных полей и высоких плотностей имеет некоторый интерес для систем с большим β . На рис.4 приведены графики $T(\tau)$ для классической (а) и турбулентной (в) теплопроводности для конкретного случая

$n = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $H = 100 \text{ кгс}$. Для плотностей и полей, при которых $T_{\text{к}} > T_{\text{и}} (\omega\tau)_i \gg 1$, когда преобладает один вид теплопроводности (ионная (1) или турбулентная (2)), уравнение баланса энергии имеет параметр подобия a^2 .

$$1) \quad a_1^2 = R^2 H_0^2$$

$$2) \quad a_2^2 = R^2 H_0 n_0$$

поэтому решение для других полей и плотностей могут быть получены изменением масштаба длины

$$R_1 = R_{10} \frac{H_0}{H}$$

$$R_2 = R_{20} \sqrt{\frac{H_0 n_0}{H n}}$$

Из рис.4 видно, что температура на границе плазма-магнитное поле для систем с магнитным удержанием может быть значительно меньше температуры в центре, что довольно существенно с точки зрения энергетического баланса и устойчивости. Здесь также можно отметить, что это явление имеет достаточно общий характер для стационарных систем с постоянным давлением, в которых объемное выделение тепла, например джоулево, скомпенсировано излучением. Тогда кроме тривиального решения $\nabla T = 0$ имеется и колебательное решение, когда плазма приобретает слоистую структуру.

Ш.

Таким образом, отсутствие решений для реактора с магнитным полем с разумными размерами связано с тем обстоятельством, что увеличение поля уменьшает теплопроводность в такой степени, что запасенного тепла в области, где $Q_{\text{я}} > Q_{\text{л}}$, не хватает для компенсации излучения в холодной и, следовательно, плотной пристеночной области. Отсюда следует вывод: для существования решения необходимо, чтобы теплопроводность была высока во внутренней области и мала во внешней. Этого можно добиться созданием такого поля, чтобы напряженность магнитного поля была во внутренней области мала (или его вообще не было) и велика во внешней. При этом теплопроводность во внешней области мала, поэтому температура быстро падает. Так как она спадает быстрее, чем без магнитного поля, то излучение из пристеночной области мало и размеры внутренней области, где выход энергии положителен, много меньше, чем в случае $H = 0$, рис.(5). Такое магнитное поле может быть создано специальными проводниками, создающими быстроспадающее от стенок к центру мультипольное поле, или за счет не большого магнитного удержания. В последнем случае быстроспадающее магнитное поле создается за счет скинирования, когда на границе плазмы создаваемое магнитное поле не успевает продиффун-

дировать в плазму за интересующее время, или автоматически, когда однородное первоначально поле при движении плазмы к стенкам из-за охлаждения пристеночного слоя поджимается вблизи хорошо проводящей стенки.

Для получения такого решения необходимо задать вид $H(r)$. Для простоты положим $H = 0$ во внутренней области и $H = H_0$ во внешней. Тогда можно подобрать такой поток S из внутренней области во внешнюю, чтобы температура на стенке была близка к 0. Затем по определенному таким образом потоку можно оценить размер внутренней области

$$R = \frac{2S}{Q_0(n, T)}$$

Так как "полная энергия"

$$E = 0,5 (\alpha \nabla T)^2 + V(T)$$

сохраняется, то из "потенциала" $V(T)$ можно определить необходимый поток S на границе внутренней и внешней области

$$S = (\alpha \nabla T)_{T=T_0} = \sqrt{2} \sqrt{V(T)_{T=T_0} - V(T)_{T=0}}$$

Поскольку мощность излучения во внешней области много больше мощности ядерного энерговыделения во внутренней вследствие большего увеличения плотности в $(\frac{T_0}{T})$ раз, то заранее ясно, что размер внешней области $\Delta R_{\text{внеш.}}$ много меньше размера внутренней области $L_{\text{внутр.}}$. Поэтому в расчётах радиальность не принима-

лась во внимание, допуская при этом ошибку порядка $\frac{\Delta R_{\text{вн}}}{L_{\text{внутр}}}$

Как оказалось в расчётах, эта ошибка около 0,05. Определенные таким образом S , $L_{\text{внутр.}}$, $\Delta R_{\text{внеш.}}$ грубо можно аппроксимировать следующим образом:

$$S \sim n^{4/3} H^{-1/2}$$

$$L_{\text{внутр.}} \sim n^{-2/3} H^{-1/2}$$

$$\Delta R_{\text{внеш.}} \sim n^{1/8} H^{-1/2}$$

Как и следовало ожидать, основная длина $\Delta R_{\text{внеш.}}$ приходится на область с $(\omega \tau)_i \sim 1-10$, т.е. вблизи максимума теплопроводности. При увеличении магнитного поля полный радиус монотонно уменьшается и при полях порядка 10 - 100 кгс достигает приемлемых размеров (порядка 1 метра).

На рис.5 приведен график температуры для конкретного случая $n = 3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $H = 100 \text{ кгс}$,

$$S = 4,5 \cdot 10^{14} \text{ эрг/см}^2 \text{ сек}$$

$$\Delta R_{\text{внеш.}} = 2,5 \text{ см}$$

$$L_{\text{внутр.}} = 40 \text{ см}$$

$$P = 10^4 \text{ атм}$$

$$\beta^{-1} = 4 \cdot 10^{-2}$$

Поведение решений в других случаях аналогично.

Область возможных вариантов термоядерных систем в удобных координатах приведена на рис.6. Минимальное время работы реактора τ определялось из критерия Лоусона

$$n \tau = 10^{15}$$

На рисунке нанесена сетка линий равных радиусов и мощностей на

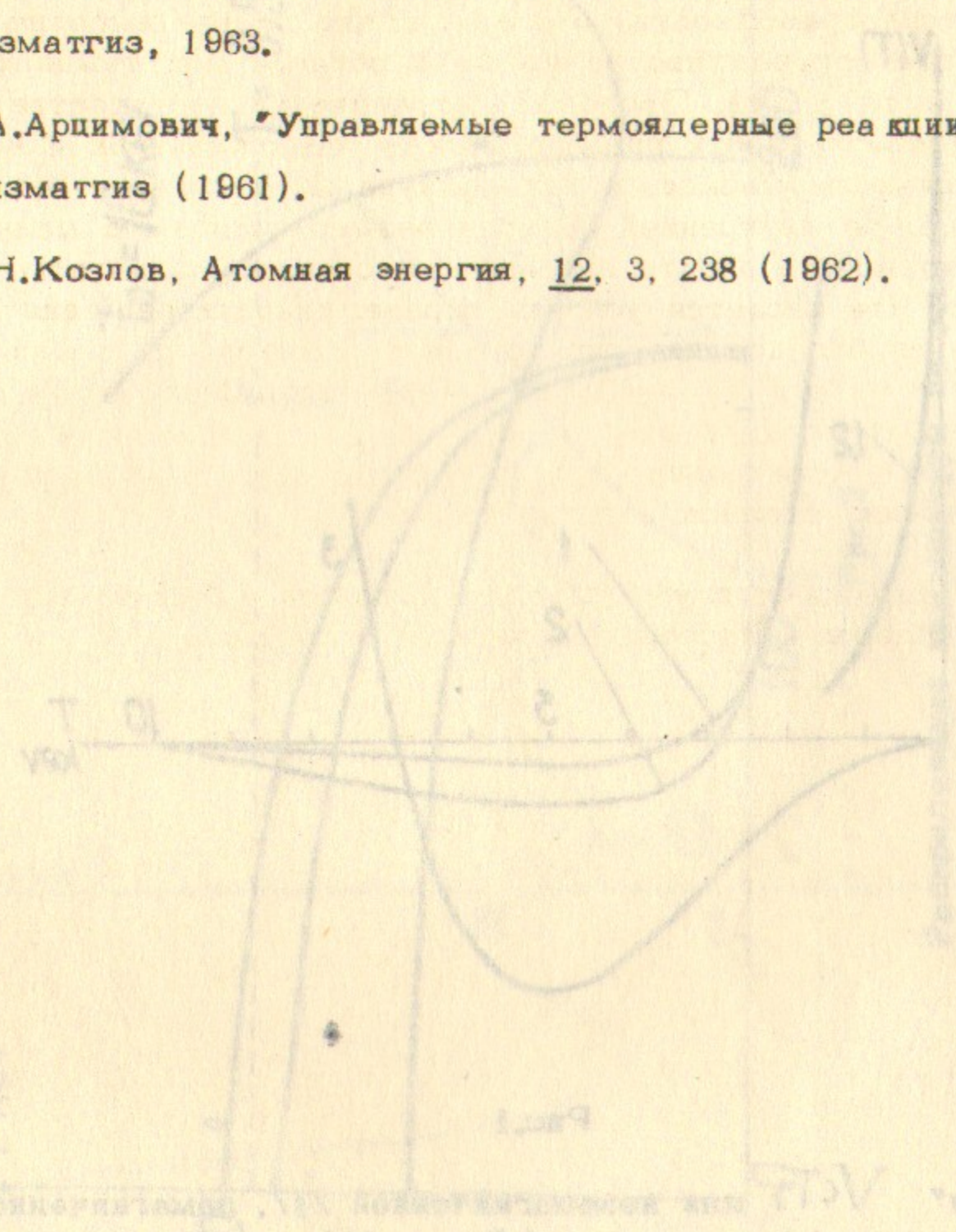
2 поверхности, что позволяет по заданным плотности и магнитному полю определить все необходимые параметры реактора. Как видно из рис. 6 разумные размеры реактора получаются при достаточно большой плотности $n > 10^{16}$ и большом магнитном поле $H > 10$ Кгс.

При проверке сделанных допущений (прозрачность излучения, приближение теплопроводности) оказалось, что первое выполняется всегда, а второе справедливо во внешней области для температур в диапазоне от 0 до 2 Кэв. Последнее ограничение несущественно, так как в действительности граница между замагниченной и незамагниченной областью размазана, и температура идет плавнее, чем показано на рис. 5. Во внутренней области размер сравним с длиной пробега, но это можно обойти наложением слабого магнитного поля порядка гаусс. Что касается условия справедливости решения отдельно уравнения баланса энергии по оси и радиусу, то, по оценкам, при температуре на оси $T_0 = 10$ кэв потери энергии по радиусу на порядок превышают потери энергии по оси Z , т.е. выполняется условие (8). Следовательно, можно считать, что ошибка при расщеплении уравнения баланса энергии невелика.

Авторы выражают глубокую благодарность Г.И.Будкеру за постановку проблемы и постоянный интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Н. Алфвен, Е. А. Смартс, *Nature*, 188, 861, (1961).
2. С.А.Каплан, С.Б.Пикельнер, "Межзвездная среда", М., Физматгиз, 1963.
3. Л.А.Арцимович, "Управляемые термоядерные реакции", М., Физматгиз (1961).
4. Б.Н.Козлов, *Атомная энергия*, 12, 3, 238 (1962).



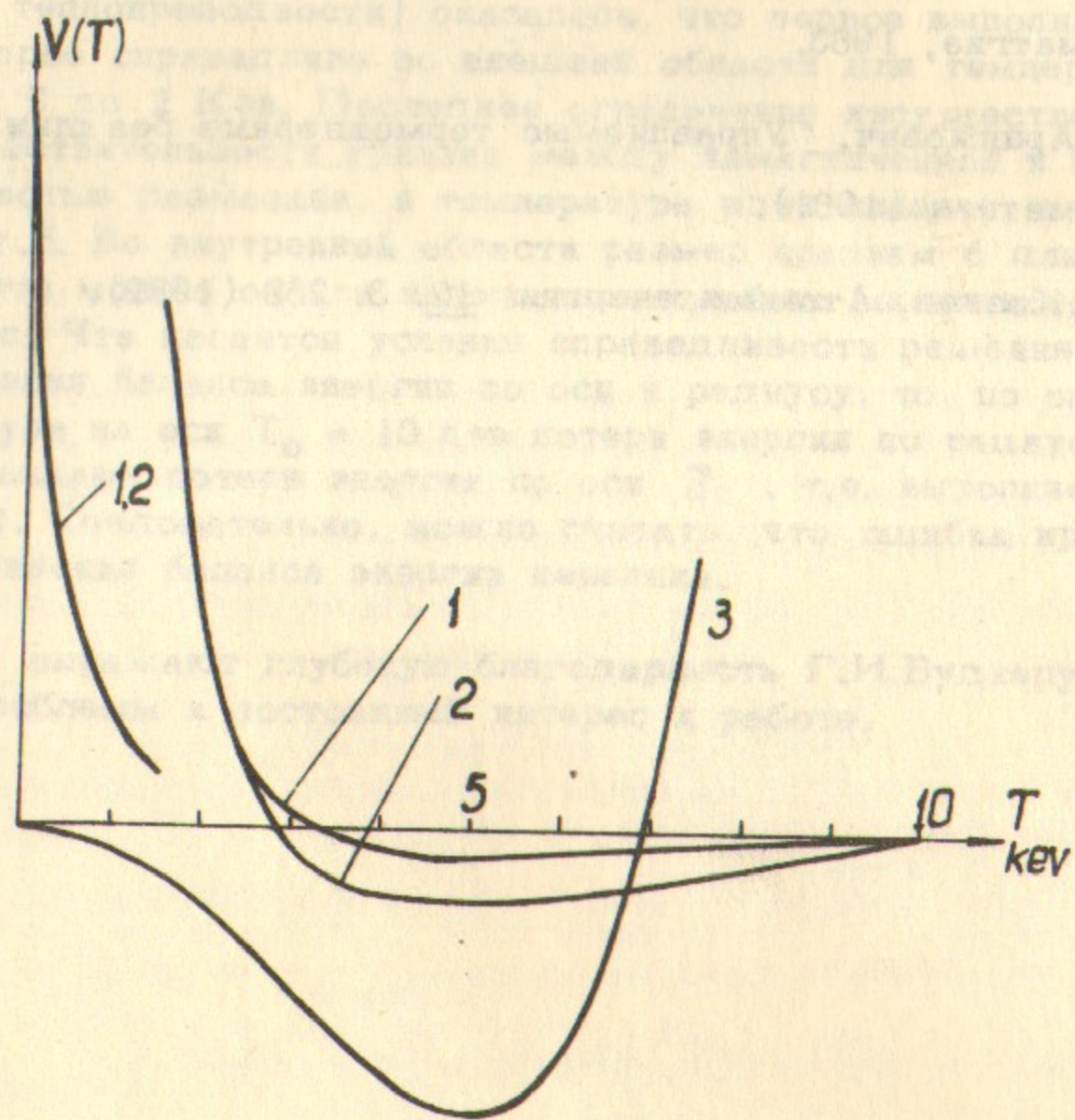


Рис.1

"Потенциал" $V(T)$ для немагнитиченной /3/, намагнитиченной с классическим коэффициентом диффузии /2/ и турбулентной с боровским коэффициентом диффузии /1/ теплопроводностей.

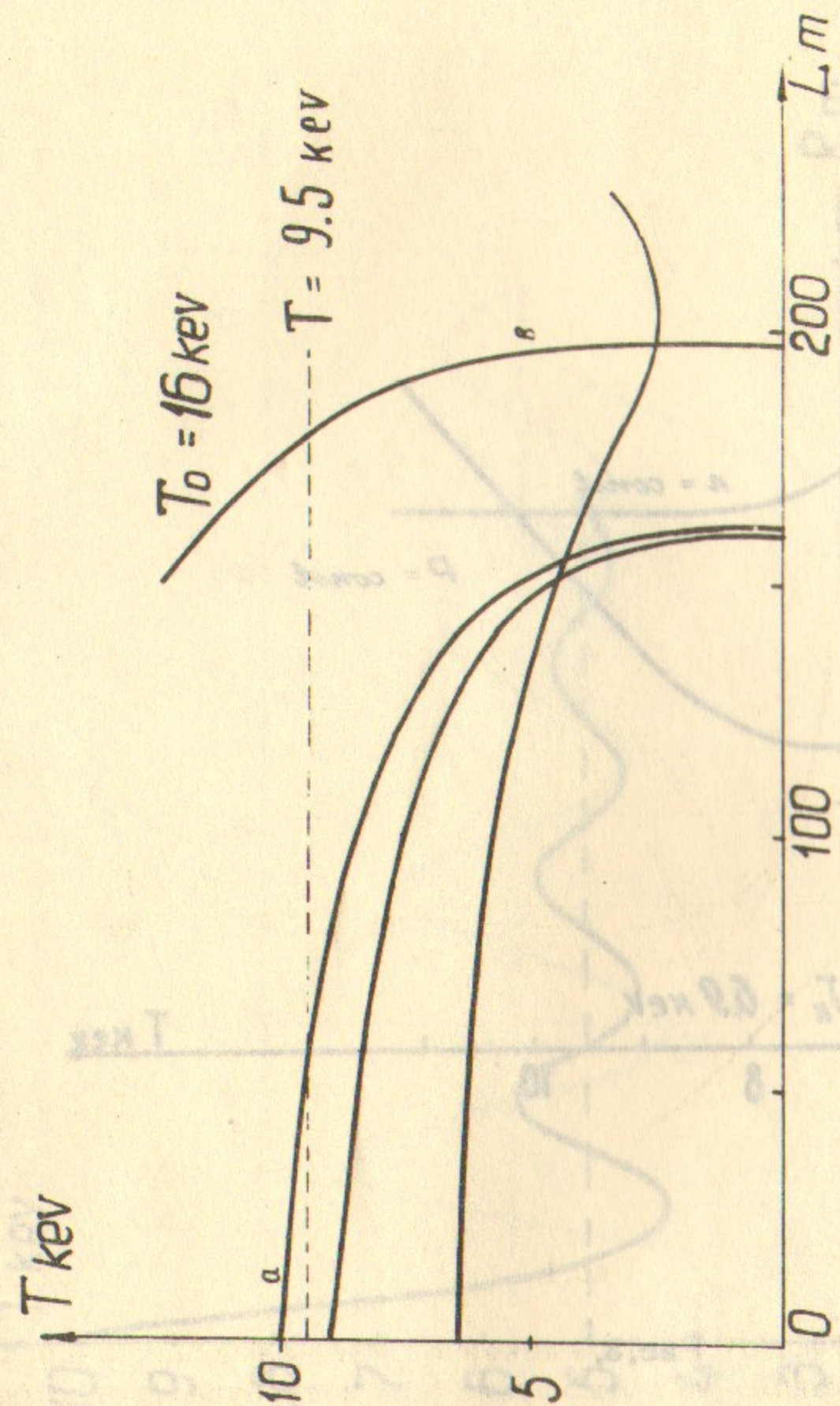


Рис.2

Распределение температуры по оси.

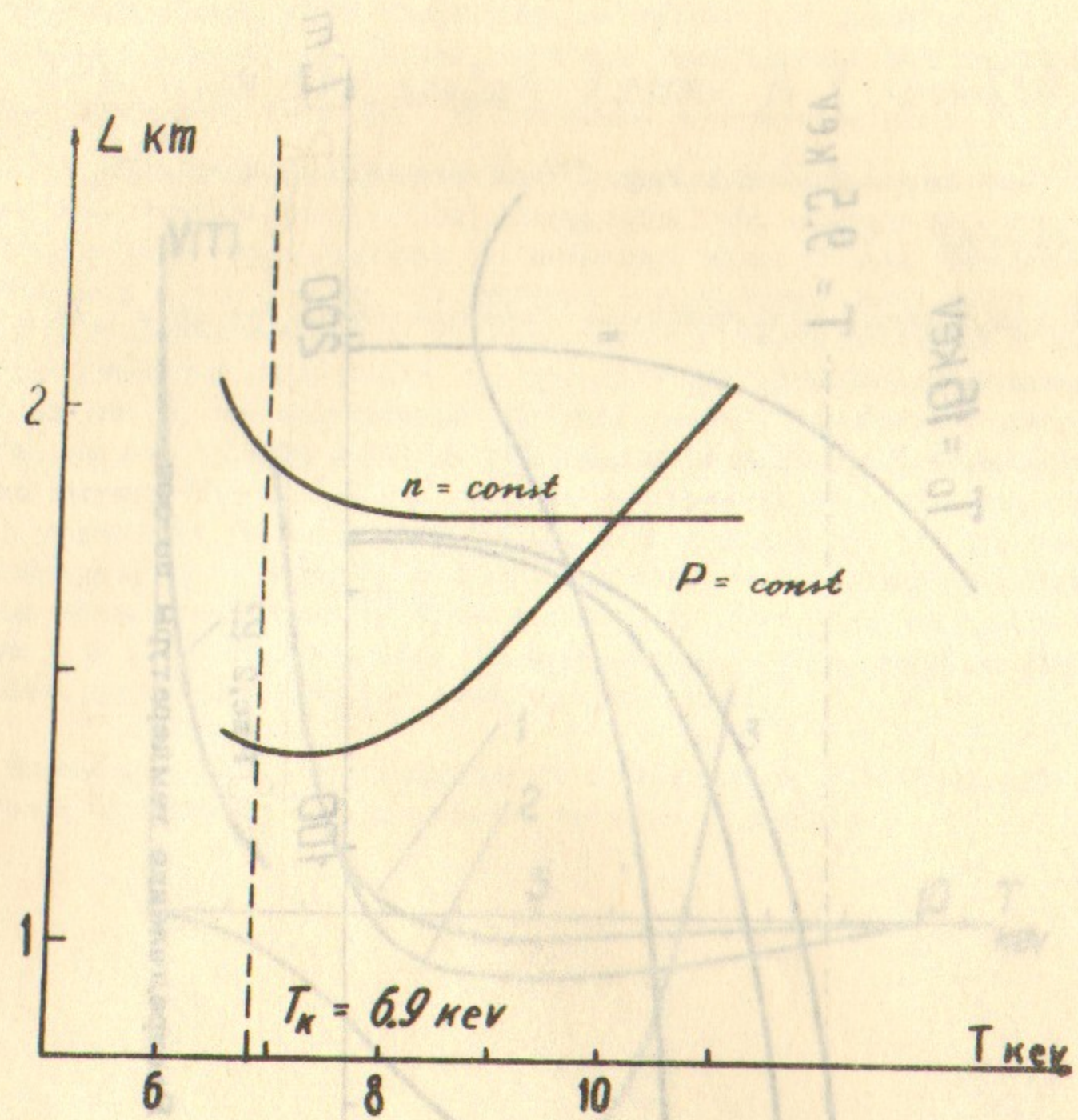


Рис.3.

Зависимость длины реактора от температуры в центре.

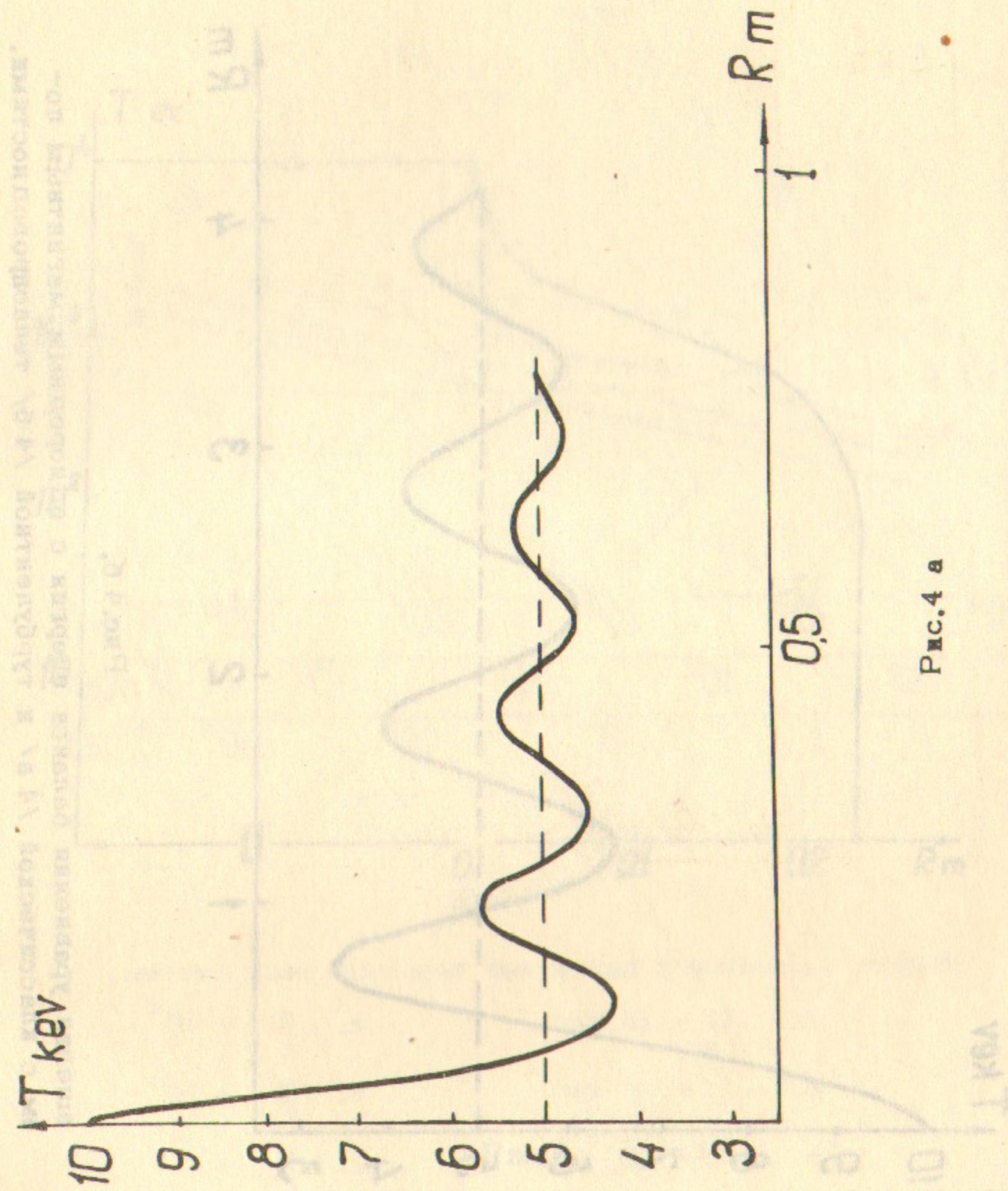


Рис.4 а

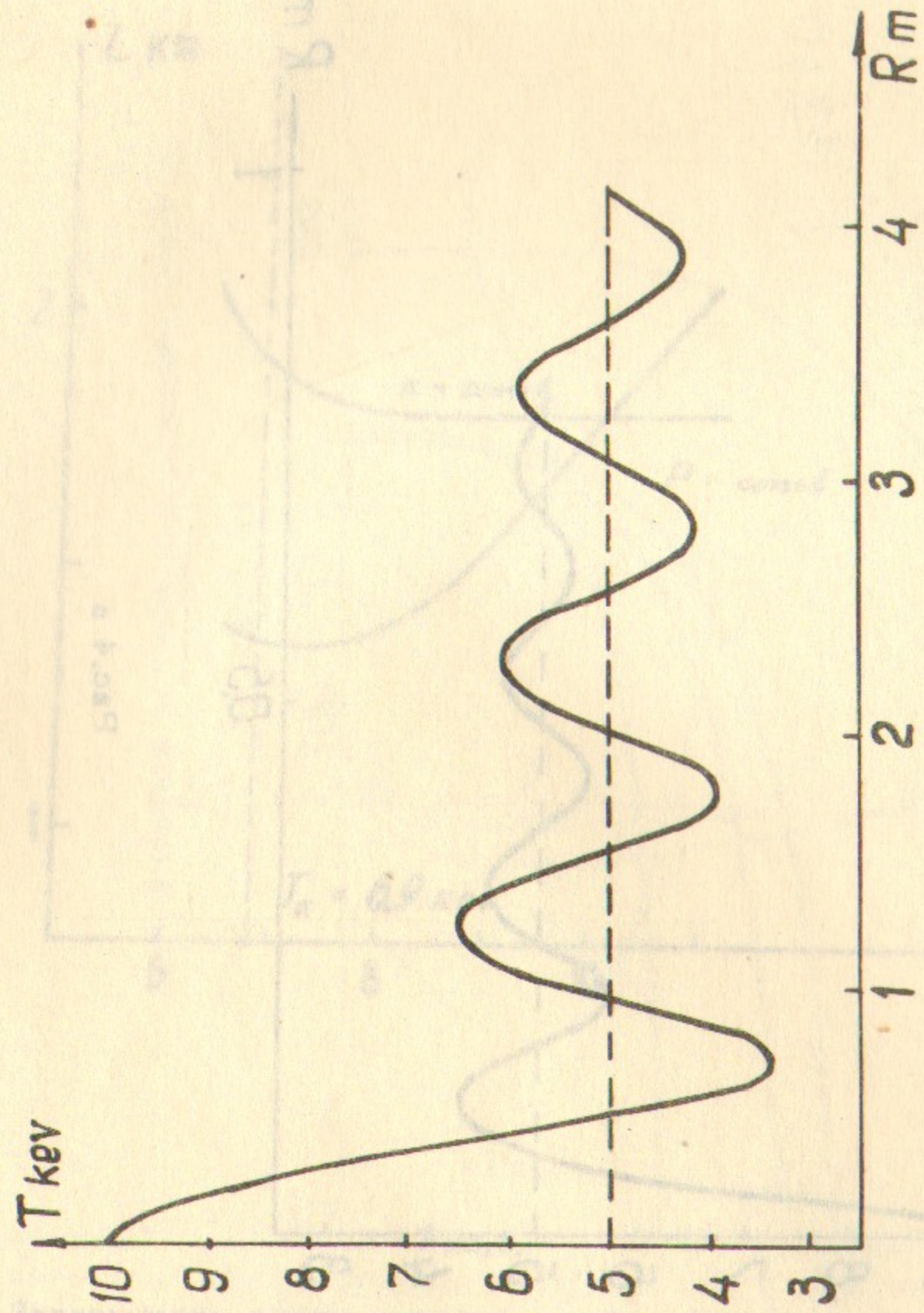


Рис.4 б.

ешения уравнения баланса энергии с однородным магнитным по-
 ем с классической /4 а/ и турбулентной /4 б/ теплопроводностями.

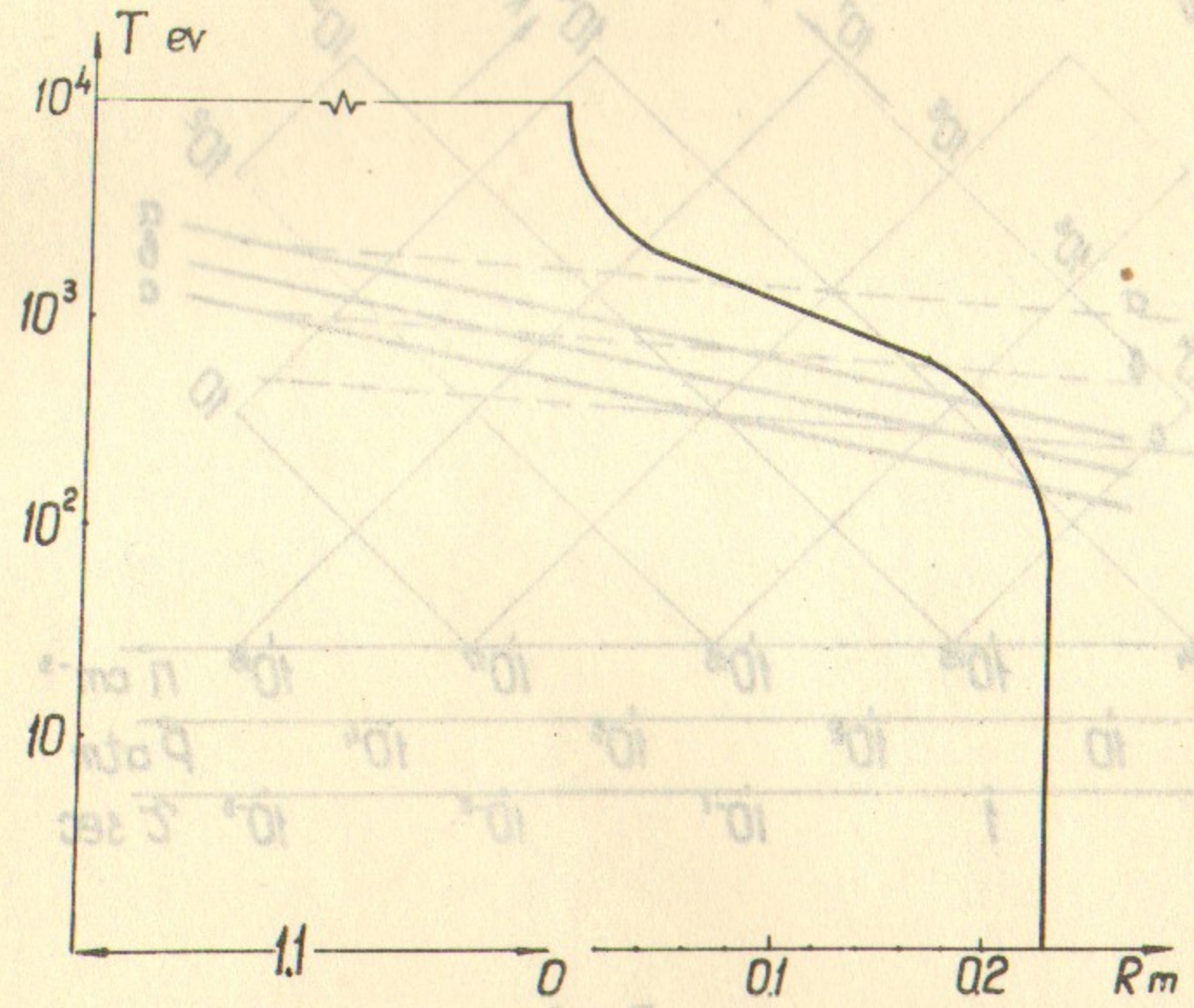


Рис.5. $H = 100$

Распределение температуры по радиусу для реактора с неоднородным магнитным полем

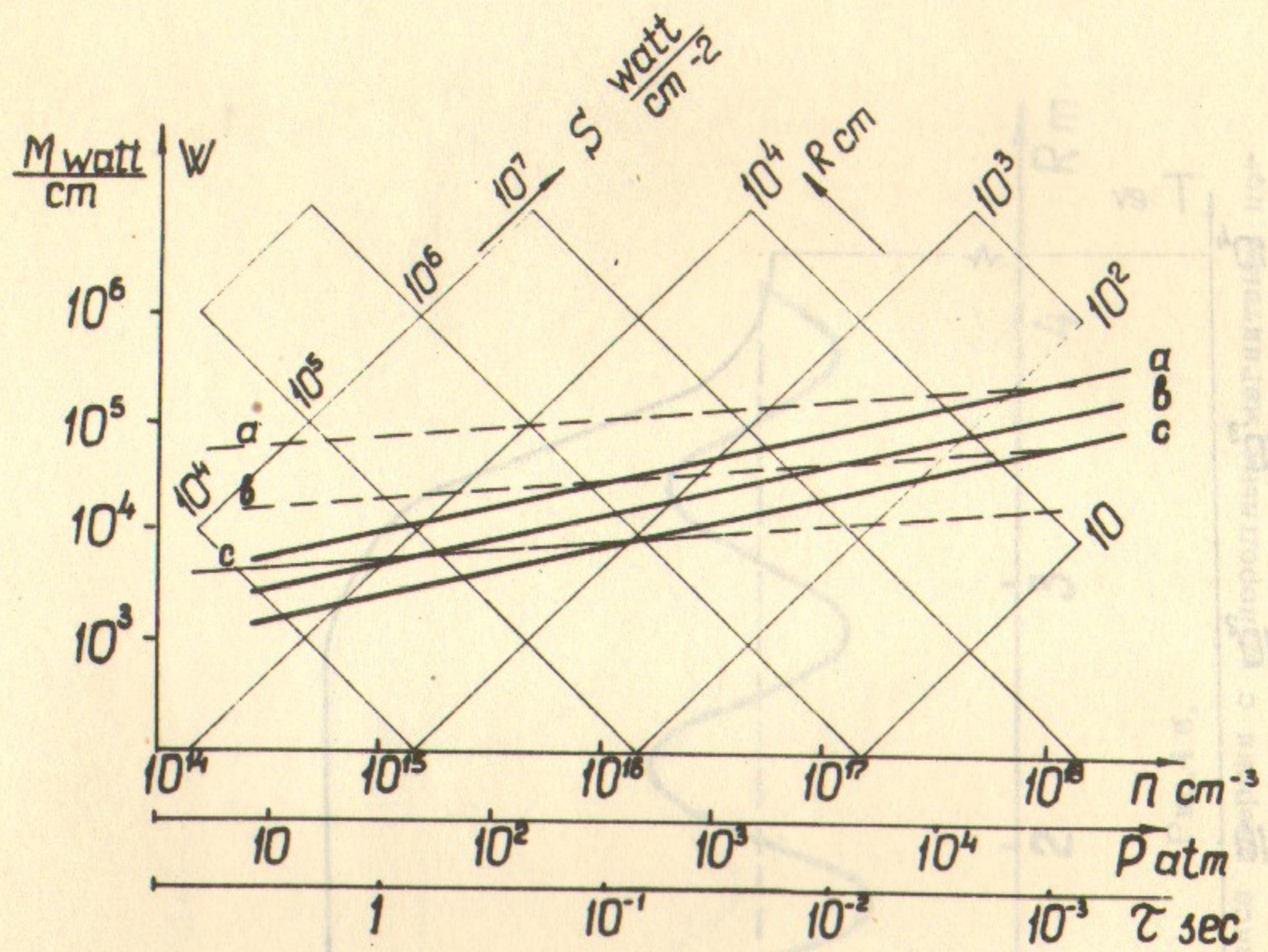


Рис. 6.

Область возможных вариантов термоядерных систем.

а. $H = 10$ кгс

а'. $\beta = 10^4$

б. $H = 30$ кгс

б'. $\beta = 10^2$

с. $H = 100$ кгс

с'. $\beta = 1$

Расчетные температуры термоядерных систем по данным с реактора с нейтронным источником



Рис. 6.

Область возможных значений термодинамических параметров.

$n = 10^2$ экз

$\rho = 10^2$

$\tau = 10^2$

Ответственный за выпуск П.З.Чеботаев

Подписано к печати 20.5.69

Усл. л. печ. л., тираж 1 50 экз. Бесплатно.

Заказ № 309

Отпечатано на ротационной машине в ИЯФ СО АН СССР, н.в.