21

И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 311

А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев

ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСЕ В ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

НОВОСИБИРСК

1969

А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев

ОБ ОДНОМ ПАРАДОКСЕ В ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ

А Н Н О Т А Ц И Я

На основе уравнений баланса импульса пролетных и запертых частиц рассматривается процесс релаксации плазмы к квазистационарному состоянию. Диффузия плазмы в квазистационарном состоянии является амбиполярной и не зависит от величины радиального электрического поля. Однако, в процессе столкновительной релаксации плазмы происходит "самодиффузия" ионной компоненты плазмы, что приводит к установлению самосогласованного электрического поля найденной нами ранее величины. Вычислены коэффициенты термодиффузии и теплопроводности для обеих компонент плазмы.

A.A.Galeev and R.Z.Sagdeev

ON A PARADOX IN PLASMA DIFFUSION IN TOROIDAL MAGNETIC TRAPS;

Abstract.

The relaxation of the plasma to the stationary state is considered on the basis of the momentum conservation low for trapped and untrapped particles. Plasma diffusion in a quasistationary state i is ambipolar. However "selfdiffusion" takes place during the process of collisional relaxation. This is the mechanism for establishing a selfconsistent electric field which was found previously.

The coefficients of diffusion and thermal conductivity are calculated for both components of the plasma.

Хорошо известно, что классическая диффузия полностью ионизованной плазмы поперек магнитного поля происходит лишь в результате столкновений между частицами разного сорта (между ионами и электронами) /1/. С отсутствием самодиффузии связано и то обстоятельство, что диффузия автоматически оказывается амбиполярной (независимо от величины электрического поля). Все эти особенности диффузии являются следствием того, что в промежутке времени между актами соударения сохраняется обобщенный импульс отдельных частиц, а соударения сохраняют суммарный импульс. В магнитных ловушках со сложной геометрией обобщенный импульс может не быть интегралом движения и в таких системах коэффициенты диффузии могут содержать явную зависимость от частот столкновений одинаковых частиц (см. /2/, где это показано на примере тороидального стеллератора). Вообще в ловушках со сложными траекториями частиц рассмотрение классической диффузии наталкивается на вычислительные трудности. Поэтому лишь недавно была построена теория явлений переноса /2-4/, хотя уже давно было очевидно, что вследствие "перемешивания" траекторий диффузия должна существенно возрасти /5/.

В тороидальных магнитных ловушках с аксиальной симметрией ("Токамак", "Левитрон") сохраняется аксиальная компонента обобщенного импульса и коэффициент диффузии, в этом случае определяющийся известной формулой Пфирша-Шлютера пропорционален частоте столкновений электронов с ионами /6/. Однако, рассмотрение /6/ применимо лишь в случае достаточно плотной плазмы (когда длина свободного пробега меньше периметра тороида). Противоположный предельный случай редкой плазмы, исследованный в работе авторов /3/, привел к следующему результату: 1) диффузия не амбиполярна до тех пор, пока в плазме не устанавливалось некоторое равновесное распределение электрического поля; 2) коэффициент амбиполярной диффузии явно зависит от частоты столкновений частиц одного сорта (а именно электронов с электронами). Неудивительно, что это могло показаться парадоксальным и дать пищу для критики в ряде последующих работ /7-9/. Таким образом, возникла весьма противоречивая ситуация. В связи с этим представляется поучительным разъяснить физический смысл полученного в /3/ кажущегося парадокса самодиффузии, не понятного в работах /7-9/.

Прежде всего, на основе уравнений баланса импульса частиц мы рассмотрим процесс релаксации распределения частиц плазмы к равновесному. Мы покажем, что решение стационарных уравнений не является однозначным и диффузия плазмы может быть амбиполярной как в отсутствие, так и при наличии самосогласованного электрического поля. Решение же нестационарного уравнения с учетом "самодиффузии" плазмы приводит к реальной плазме к установлению равновесного электрического поля, величина которого зависит от скорости микроскопического вращения плазмы вокруг оси симметрии и в частном случае отсутствия вращения была найдена в работе /3/.

Кроме того, мы покажем, что полученная авторами явная зависимость диффузии от электрон-электронных соударений находится в согласии с предположением об относительно большем количестве электрон-ионных соударений пролетных частиц, чем соударений запертых и пролетных электронов. Величина коэффициента диффузии может быть получена строго на основе уравнений баланса импульса в системе четырехкомпонентной плазмы (запертые и пролетные электроны (ионы)).

Наконец, полученные решения мы используем для вычисления коэффициентов термодиффузии и теплопроводности выражения для которых в работе / 7 / являются неверными.

1. Рассмотрим сначала процесс ре аксации распределения плазмы к равновесному. Как и в предыдущей работе /3/ мы ограничимся случаем аксиально-симметричного магнитного поля (см. рис.1):

$$\vec{H} = H_0\left\{(1-\epsilon\cos\vartheta)\vec{e}_z - \Theta\vec{e}_\vartheta\right\} \quad (1)$$

$$\epsilon = \frac{r}{R}, \quad \Theta = \frac{ir}{2\pi R}$$

Нами был найден общий вид распределения пролетных частиц в отсутствие соударений /3,10/:

$$f^{(0)}_{uj} = F_j(r,E)\left[\!\left[1 + \frac{\sigma\sqrt{2x_j\epsilon}\, r_{cj}}{\Theta}\left\{\left[b_n^j - \left(\frac{3}{2}-\beta\right)b_T^j\right]\cdot\right.\right.\right. \quad (2)$$

$$\cdot\left[\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\pi\Delta_j^u}{4}\int_1^{\varkappa^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\,E(t^{-1/2})}\right] + (x_j-\beta)b_T^j\cdot$$

$$\left.\left.\left.\cdot\left[\sqrt{\varkappa^2 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}} - \frac{\pi\Delta_j^T}{4}\int_1^{\varkappa^2}\frac{dt}{\sqrt{t}\,E(t^{-1/2})}\right]\right\}\right]\!\right]$$

где

$$F_j(r,E) = \frac{n_{0j}(r)}{\pi^{3/2}v_{Tj}^3}e^{-\frac{E}{T_j}}; \quad E = \frac{m_j v^2}{2} + e_j\Phi_0(r)$$

$$\mu = \frac{m_j v_\perp^2}{2H}; \quad x_j = \frac{2\mu H_0}{m_j v_{Tj}^2}; \quad \varkappa^2 = \frac{1}{v^2\epsilon}\left|v_\parallel(\mu,E;r,\vartheta=0) - \frac{v_E}{\theta}\right|^2$$

$$b_n^j = \frac{d\ln n_{0j}(r)}{dr}; \quad b_T^j = \frac{d\ln T_j}{dr}; \quad b_u^j = b_n^j - \left(\frac{3}{2}-\beta\right)b_T^j$$

$$v_E = -c\frac{\Phi_0'(r)}{H_0}; \quad \omega_{cj} = \frac{e_j H_0}{m_j c}; \quad v_{Tj} = \sqrt{\frac{2T_j}{m_j}}; \quad r_{cj} = \frac{v_{Tj}}{\omega_{cj}}.$$

$$\sigma = \operatorname{Sign} v_\parallel$$

Параметры Δ_j^u, Δ_j^T вообще говоря зависят от энергии E и адиабатического инварианта μ. Распределение запертых частиц $f_{tj}^{(0)}$ определяется тем же выражением (2), если в последнем положить $\Delta_j^u \equiv \Delta_j^T \equiv 0$.

С учетом соударений частиц параметры Δ_j^u, Δ_j^T становятся медленно меняющимися функциями времени и, кроме того, появляется добавка к функции распределения $f_j^{(0)}$, содержа -

эцая зависимость не только от обобщенного импульса $J(\mu, E; \tau, \vartheta)$ но и непосредственно от угла ϑ :

$$f_j = f_j^{(0)}(\mu, E, J, \sigma) + f_j^{(1)}(\mu, E, J, \sigma; \vartheta) \tag{3}$$

Решение в таком виде мы подставим в кинетическое уравнение работы /3/

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \Big\{ -\frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj} R} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \tau} + \Big(-\theta v_{\parallel} + \frac{c}{H_0}\frac{d\Phi_0}{d\tau} -$$

$$- \frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj} R} \cos\vartheta \Big) \frac{\partial}{\tau \partial \vartheta} + \theta \frac{\mu H_0/m_j + v_{\parallel}^2}{\omega_{cj} R} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \Big\} f_j = St\, f_j \tag{4}$$

Рассмотрим сначала пролетные частицы. Для корректного учета их соударений с запертыми частицами мы перепишем соударительный член в проинтегрированном по частям виде:

$$St\, f_j^{(0)} \simeq \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \sum_{j'} \frac{2\pi\lambda e_j^2 e_{j'}^2}{m_j} \int d\vec{v}\,' \frac{v_\alpha' - v_\alpha}{|\vec{v}\,' - \vec{v}|} \Big(f_j(\vec{v}) \frac{\partial f_{j'}(\vec{v}\,')}{m_{j'} \partial v_\beta'^2} + f_j(\vec{v}\,') \frac{\partial f_j(\vec{v})}{m_j \partial v_\beta^2} \Big)$$

Интегрирующий нас вклад в интеграл дает область пограничного слоя между запертыми и пролетными частицами сорта j, где производная $\partial f_j^{(0)} / \partial v_{\parallel}$ терпит разрыв. Воспользовавшись вычислениями работы /3/ получаем уравнение для $f_j^{(1)}$ и параметров Δ_j^u, Δ_j^T:

$$\frac{v_{\parallel}}{\theta\omega_{cj}} F_j(\tau, E) \frac{\partial}{\partial t} \Big[b_u^j (1 - \Delta_j^u) + (x_j - \beta) b_T^j (1 - \Delta_j^T) \Big] - \theta v_{\parallel} \frac{\partial}{\tau \partial \vartheta} f_{ju}^{(1)} =$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{8\,\tau_{j'/j'}} \cdot \frac{\tau_{cj} b_T^j}{\theta} (1 - \Delta_j^T) \frac{8 v_{\parallel j}}{v_j} \Big[\mu + \mu' - \frac{5\mu}{2 v_j^2} \Big] F_j(\tau, E) -$$

$$- \frac{3\sqrt{\pi\epsilon}}{8} \cdot \frac{\partial}{m_j \partial v_{\parallel}} \sum_{j'} \frac{m_{j'} v_{Tj'}}{\tau_{j'/j'}} \frac{\tau_{cj'}}{\theta} \Big(1 - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\Big) \Big\{ P_{j'} b_u^{j'} + W_{j'} b_T^{j'} \Big\} -$$

$$- \frac{1}{\tau_{e/i}} \frac{2 v_{\parallel}}{m_j v_{Tj}^2} \Big[T_j b_u^j (1 - \Delta_j^u) + T_{j'} b_u^{j'} (1 - \Delta_{j'}^u) \Big]_{j' \neq j} F_j(\tau, E) / \theta\omega_{cj}$$

$$- \frac{1}{\tau_{e/i}} \frac{2 v_{\parallel}}{m_j v_{Tj}^2} \Big[T_j (x_j - \beta) b_T^j (1 - \Delta_j^T) + T_{j'} (x_{j'} - \beta) b_T^{j'} (1 - \Delta_{j'}^T) \Big] \frac{F_j(\tau, E)}{\theta\omega_{cj}} \tag{5}$$

где:

$$b_u^j P_j + b_T^j W_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(1 + v_{\parallel j} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel j}} \Big) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{y}\, dy\, e^{-y}}{\sqrt{y - 2\sqrt{y x_j} \cos\phi + x_j + v_{\parallel j}^2}} \cdot$$

$$\cdot \Big[b_u^j \Delta_j^u + (y - \beta) b_T^j \Delta_j^T \Big]. \qquad \tau_{j/j} = \frac{3 m_j^2 v_{Tj}^3}{16\sqrt{\pi}\,\lambda e^4 n}$$

$$\mu(y^2)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y^2}\sqrt{t}\,e^{-t}dt$$

$$\nu_{\parallel j}=v_\parallel/v_{Tj}\quad;\quad \nu_j^2=\nu_{\parallel j}^2+x_j$$

Черта сверху означает здесь усреднение по скоростям согласно следующему правилу:

$$\overline{\psi(x_j)}=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int\psi(x_j)\,\nu_{\parallel j}^2\,e^{-x_j+\nu_{\parallel j}^2}d\nu_{\parallel j}\,dx_j \qquad (6)$$

Из уравнения (5) следует, что столкновения идентичных частиц стремятся в первую очередь уничтожить имеющееся отклонение распределения частиц от максвелловского. Это достигается при

$$\Delta_j^T\equiv 1 \qquad (7)$$

Правда имеющийся, при этом скачок на функции распределения приводит к возникновению силы трения между запертыми и пролетными частицами одного сорта. Последняя обращается в нуль независимо от величины Δ_j^T при следующем значении коэффициента

$$\beta=\left[2-\sqrt{2}\,\ln(1+\sqrt{2})\right]^{-1} \qquad (8)$$

Далее, сила трения между пролетными и запертыми частицами обращается в нуль только при отсутствии скачков на функции распределения ($\Delta_j^{T,Ч}=0$). Но при этом имеется относительное движение между ионами и электронами и, следовательно, нескомпенсированное электрон-ионное трение. Все это является причиной того, что разрывы на функции распределения всегда существуют, а их величина определяется балансом сил трения между пролетными и запертыми частицами (см. ур.(11), (12)).

В уравнении (5) опущены члены, ответственные за изменение функции распределения частиц вследствие диффузии и теплопроводности. Определяя поправку $f_j^{(1)}$ из (5) и подставляя в выражение для потока пролетных частиц, получаем

$$\langle nv\rangle_u=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\vartheta\int\frac{\mu H_0/m_j+v_\parallel^2}{\omega_{cj}R}\sin\vartheta\, f_{uj}^{(1)}(\vartheta)\,d^3\vec{v}=$$

$$=-\frac{3\sqrt{\pi}}{16}\sqrt{\varepsilon^3}\int d^3\vec{v}\sum_{j'}\varepsilon_{j/j'}\frac{1}{\tau_{j/j'}}\frac{\tau_{cj'}^2}{\theta^2}\left[b_u^{j'}P_{j'}+b_T^{j'}W_{j'}\right]n_0 \qquad (9)$$

где:

$$\varepsilon_{j/j'}=\begin{cases}+1\,,\ j=j'\\ -1\,,\ j\neq j'\end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что коэффициенты переноса пролетных частиц оказываются примерно в тороидальное отношение раз меньше, чем коэффициенты переноса запертых частиц /сравни с ур.(10),(11),(13)/. Поэтому столкновения пролетных частиц лишь меняют параметры в бесстолкновительной функции распределения (2) и практически не приводят к их диффузии.

Домножая уравнение (5) на импульс частиц и интегрируя по скоростям получаем уравнение баланса импульса:

$$-\frac{m_j v_{Tj}^2}{2\theta\omega_{cj}}\frac{\partial}{\partial t}b_u^j(1-\overline{\Delta}_j^Ч)=-\frac{1}{\theta\omega_j\tau_{e/i}}\sum_{j'}\left[T_{j'}b_u^{j'}(1-\Delta_{j'}^Ч)\right]-$$

$$-\frac{3\sqrt{\pi\varepsilon}}{8}\sum_{j'}\frac{1}{\tau_{j/j'}}\frac{m_{j'}v_{Tj'}^2}{2\theta\omega_{cj'}}\int d^3\vec{v}\left[P_{j'}b_u^{j'}+W_{j'}b_T^{j'}\right]F_j(z,\varepsilon) \qquad (10)$$

Входящие сюда интегралы в общем случае зависят от функций

$\Delta_j^{\text{ц},\text{т}}(\mu,\mathcal{E})$. С другой стороны поток плазмы поперек магнитного поля определяется только входящими в (10) моментами от функций $\Delta_j^{\text{ц},\text{т}}$. Поэтому, если нас интересуют лишь правильные соотношения между ними, то мы можем положить $\Delta_j^{\text{ц},\text{т}} = const$ и переписать (10) в явном виде:

$$\frac{m_e v_{Te}^2}{2\theta\omega_{ce}}\left[b_{\text{ц}}^e\frac{\partial\Delta_e^{\text{ц}}}{\partial t}+(\Delta_e^{\text{ц}}-1)\frac{db_{\text{ц}}^e}{dt}\right]\simeq-\frac{1}{\theta\omega_{ce}\tau_{e/i}}\sum_{j'}T_{j'}\,b_{\text{ц}}^{j'}(1-\Delta_{j'}^{\text{ц}})-$$

$$-\alpha_{e/e}\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\tau_{e/e}}\frac{m_e v_{Te}^2}{\theta\omega_{ce}}b_{\text{ц}}^e\Delta_e^{\text{ц}}+\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}b_{\text{ц}}^i\Delta_i^{\text{ц}}+\left(1-\frac{2\beta}{3}\right)b_{\text{т}}^i\right]\frac{\sqrt{\mathcal{E}}\,m_e v_{Te}^2}{\theta\omega_{ce}\tau_{e/i}} \quad (11)$$

$$\frac{m_i v_{Ti}^2}{2\theta\omega_{ci}}\left[b_{\text{ц}}^i\frac{d\Delta_i^{\text{ц}}}{dt}+(\Delta_i^{\text{ц}}-1)\frac{db_{\text{ц}}^i}{dt}\right]\simeq-\frac{1}{\theta\omega_{ci}\tau_{e/i}}\sum_{j'}T_{j'}\,b_{\text{ц}}^{j'}(1-\Delta_{j'}^{\text{ц}})-$$

$$-\alpha_{i/i}\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\tau_{i/i}}\frac{m_i v_{Ti}^2}{\theta\omega_{ci}}b_{\text{ц}}^i\Delta_i^{\text{ц}}-\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\left[b_{\text{ц}}^e\Delta_{\text{ц}}^e+(1-\beta)b_{\text{т}}^e\right]\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{\tau_{e/i}}\frac{m_e v_{Te}^2}{\theta\omega_{ce}} \quad (12)$$

$$\alpha_{j/j}=(3\pi/8\sqrt{2})\left[\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right]$$

Эти уравнения показывают, что в стационарном состоянии трение пролетных частиц о запертые уравновешивается трением электронов и ионов между собой. Благодаря этому обеспечивается амбиполярность диффузии пролетных частиц (сравните ур. (9) и (10). Отсюда же следует и амбиполярность диффузии запертых частиц. Действительно, трение между запертыми ионами и электронами настолько мало, что неспособно скомпенсировать трение между запертыми и пролетными частицами. Поэтому последнее вызывает диффузию частиц поперек магнитного поля со скоростью:

$$V_r^e=-\frac{c\mathcal{F}_e}{eH_\vartheta}=-\left[\frac{\alpha_{e/e}}{\tau_{e/e}}b_{\text{ц}}^e\Delta_e^{\text{ц}}+\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\left(b_{\text{ц}}^e\Delta_e^{\text{ц}}+(1-\beta)b_{\text{т}}^e\right)\frac{1}{\tau_{e/i}}\right]\frac{\sqrt{\mathcal{E}}\,r_{ce}^2}{\theta^2} \quad (13)$$

$$V_r^i=\frac{c\mathcal{F}_i}{eH_\vartheta}=-\alpha_{i/i}\frac{b_{\text{ц}}^i\Delta_i^{\text{ц}}}{\tau_{i/i}}\frac{\sqrt{\mathcal{E}}\,r_{ci}^2}{\Theta^2}-\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\frac{1}{\tau_{e/i}}\left[\frac{2}{3}b_{\text{ц}}^i\Delta_i^{\text{ц}}+\left(1-\frac{2\beta}{3}\right)b_{\text{т}}^i\right]\frac{\sqrt{\mathcal{E}}\,r_{ce}^2}{\theta^2} \quad (14)$$

где $\mathcal{F}_j$ — компонента силы трения между запертыми частицами сорта j и пролетными частицами обоих сортов.

В частном случае почти изотермической плазмы

$$\frac{T_i}{T_e}<\sqrt[3]{\frac{m_i}{m_e}} \quad (15)$$

Стационарное решение уравнений (11)-(12) дает следующие значения параметров $\Delta_j^{\text{ц}}$:

$$\Delta_e^{\text{ц}}=1+\frac{T_i}{T_e}\cdot\frac{b_{\text{ц}}^i}{b_{\text{ц}}^e} \quad (16)$$

$$\frac{b_{\text{ц}}^i}{b_{\text{ц}}^e}\Delta_i^{\text{ц}}\ll 1 \quad (17)$$

Амбиполярный поток плазмы при этих значениях параметров находится из ур. (13)

$$V_r^e\simeq-\alpha_e D_e\left[b_n^e+\left(\frac{3}{2}-\beta_e\right)b_{\text{т}}^e+\frac{T_i}{T_e}\left(b_n^i+\left(\frac{3}{2}-\beta_i\right)\right)\right] \quad (18)$$

где $\alpha_e = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\left[1+\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})\right] \simeq 1,3$; $D_e \simeq \sqrt{\epsilon}\,\frac{r_{ce}^2}{\theta^2 \tau_{e/i}}$

$$\beta_j = \frac{\delta_{je} + 1/\sqrt{2}}{\delta_{je}+\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}\ ;\ \beta_e \simeq 1,11\ ;\ \beta_i = 1,33$$

В пределе $b_r^j = 0$, $T_i = T_e$ этот результат был получен в работе авторов /3/.x)

Совершенно аналогично находится выражение для потока тепла частиц сорта j :

$$q_j = \beta_j \langle n v_r \rangle T_j - \gamma_j D_j n \frac{\partial T_j}{\partial r} \qquad (19)$$

где:

$$\gamma_j = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\left\{\delta_{je}(2-\beta_j) + \frac{1}{2}\left(\frac{9\sqrt{2}}{4}-\beta_j\right)\right\}$$

$$\gamma_e \simeq 1,41\ ;\qquad \gamma_i = 0,6$$

2.Перейдем теперь непосредственно к исследованию процесса релаксации распределения плазмы к состоянию (16)-(17). Предположим, что мы заполняем ловушку частицами с максвелловским распределением. Тогда за время дрейфового движения запертых частиц по замкнутой орбите ($\tau_j = r/\sqrt{\epsilon}\, v_{rj}\theta$) устанавливается распределение (2) с параметрами $\Delta_j^T = \Delta_j^u = 1$, поскольку отклонения от максвелловского распределения при этом будут минимальными однако, такое состояние плазмы при учете столкновений уже не является стационарным. В отсутствие самосогласованного электрического поля (редкая плазма) соударения запертых и пролетных ионов стремятся привести ионы в движение вдоль малой оси тора со скоростью (см.рис.2): $U_\parallel^i = U_0 = v_{Ti}^2 b_u^i / 2\theta\omega_{ci}$ (20)

x)В работе /3/ коэффициент α_e был вычислен неверно (1.8 вместо 1,3).

С другой стороны соударения сохраняют суммарный импульс частиц, а между соударениями сохраняется обобщенный импульс каждой отдельной частицы. Следовательно, должна сохраняться и полная сумма обобщенных импульсов частиц

$$\sum J \equiv \sum \left(m v_\parallel - \frac{e}{c}\int_0^r dr\, H_\vartheta(r)\right)$$

Отсюда непосредственно следует, что то же самое дрейфовое движение, которое вкупе со столкновениями приводит к изменению суммарной скорости ионов,необходимо должна вести к расширению ионной компоненты плазмы. Иными словами, происходит "самодиффузия" ионов. Коэффициент такой неамбиполярной диффузии ионов определяется ур. (14) и был вычислен нами ранее /3/.

Интересно заметить, что если найти смещение ионов за счет "самодиффузии" ионов из условия сокращения суммарного обобщенного импульса, то мы придем к весьма парадоксальному результату: энергия магнитного поля тока, возникающего в плазме намного превышает энергию, высвобождающуюся за счет расширения плазмы.

Этот парадокс удается разрешить, если учесть, что расширение плазмы происходит в условиях, когда изменяющееся магнитное поле H_ϑ индуцирует электрическое поле вдоль малой оси тороида. Поэтому суммарный обобщенный импульс частиц уже не сохраняется.

Воспользуемся поэтому следующей системой уравнений движения частиц и уравнений Максвелла

$$\frac{dH_\vartheta'}{dr} = \frac{4\pi e n U_\parallel}{c}, \qquad (21)$$

$$\partial E_\parallel / \partial r = \partial H_\vartheta' / c\,\partial t \qquad (22)$$

$$m\frac{\partial U_\parallel}{\partial t} = \frac{e v_r}{c}\left(H_\vartheta + H_\vartheta'\right) + eE_\parallel \qquad (23)$$

где $U_\parallel$ –направленная скорость ионов, H_ϑ' –поправка с основному магнитному полю, возникающая из-за ионного тока, $E_\parallel$ –напряженность продольного электрического поля.
Эта система сводится к одному уравнению:

$$\frac{c^2}{\omega_{pi}^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(m_i\frac{\partial u_\parallel}{\partial t}-\frac{e}{c}V_r\left(H_\vartheta+H_\vartheta'\right)\right)=m_i\frac{\partial u_\parallel}{\partial t} \qquad (24)$$

Отсюда видно, что за счет самосогласованного электрического поля происходит как бы увеличение эффективной массы иона и плазма расширяется гораздо больше, чем согласно (20), а именно на величину[x)]

$$\Delta r \sim \beta r/\theta^2 \qquad (25)$$

где $\beta = \frac{8\pi n T_i}{H^2}$;

При таком расширении энергия высвобождаемая из плазмы достаточна для поддержания ионного тока.

Описанная картина релаксации справедлива лишь в случае очень редкой плазмы, когда расширение одной компоненты плазмы поперек магнитного поля не приводит к возникновению самосогласованного электрического поля. Это имеет место при

$$\frac{\lambda_D^2}{r^2} > \beta/\theta^2 \qquad (26)$$

Легко видеть, что это условие в реальных условиях не выполняется; тогда вместо ионного тока в плазме возникает радиальное электрическое поле величиной /3/:

$$e\Phi_0'(r) = -T_i\left[\frac{d\ln n}{dr}-\left(\frac{3}{2}-\beta_i\right)b_T^i\right] \qquad (27)$$

---

x) При этом выводе предполагается, что $r^2 \gg c^2/\omega_{pi}^2$. Это условие в термоядерной плазме выполняется практически всегда.

Из (18) нетрудно найти, что в случае сдвинутого Максвелловского распределения ионов (т.е. при наличии вращения) равновесное электрическое поле меняется

$$\frac{c}{\theta H_0}\frac{d\Phi_0}{dr}\simeq U_0-U_\parallel^i;\qquad U_0=\frac{v_{Ti}^2}{2\theta\omega_{ci}}\left[\frac{d\ln n(r)}{dr}-\left(\frac{3}{2}-\beta_i\right)b_T^i\right]$$

Заметим, что в работе Л.Коврижных /7/ утверждается, что диффузия частиц всегда амбиполярна и поэтому в плазме не обязательно должно возникать электрическое поле. Как следует из нашего рассмотрения процесс установления стационарного равновесия в плазме сопровождается самодиффузией" ионов и установлением электрического поля (27). Ошибочность утверждения Л.Коврижных проистекает таким образом из непонимания сущности "Самодиффузии" и процесса установления равновесия в плазме.

Кроме того, даже коэффициенты стационарной диффузии плазмы, приведенные Л.Коврижным, являются неверными из-за использования приближенного соударительного члена в кинетическом уравнении. Ошибочными являются не только численные коэффициенты, но и знак термодиффузии плазмы.
Его формулы приводят к правильному ответу лишь в случае промежуточных частот

$$\frac{\theta v_{Te}}{r} \gg \nu_e \gg \frac{\theta v_{Te}\epsilon^{3/2}}{r} \qquad (28)$$

поскольку коэффициенты переноса в этом пределе совсем не зависят от вида соударительного члена и определяются теми же формулами (18) и (19) после подстановки в них следующих значений коэффициентов

$$\gamma_j=\beta_j=3;\qquad \alpha_j=1;\qquad D_j=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\epsilon^2\frac{r_{cj}}{|\theta| r}\frac{cT_j}{eH_0} \qquad (29)$$

Уже после того, как настоящая статья была практически закончена, появилась еще одна неправильная статья (Т.Стрингера /9/), где в отличие от предыдущих работ учтено самосогласованное электрическое поле $\Phi_1(r,\vartheta)$ возникающее из-за неполной компенсации заряда вследствии различия в дрейфовых траекториях ионов и электронов. В пределе $v_E \ll \theta v_{Ti}$ это поле оказывается пропорциональным ларморовскому радиусу ионов /9/:

$$e\phi_1(r,\vartheta) = \frac{T_i T_e}{T_i + T_e} e \pi^{1/2} \frac{r_{ci}}{2|\theta|} \frac{d\ln n_{0i}}{dr} \sin\vartheta ; \quad b_r^i = 0 \tag{30}$$

Т.Стрингер учитывает лишь средний дрейф ионов и электронов в электрическом поле и приходит к выводу, что поправка в поток ионов и электронов поперек магнитной поверхности из-за электрического поля оказывается одинаковой для обеих компонент плазмы и гораздо больше найденного нами электронного потока. На самом деле вклады в поток от электрического и тороидального дрейфов (за вычетом учтенного нами диамагнитного дрейфа резонансных частиц со скоростями $v_\parallel = v_E/\theta$) сокращаются, как это следует из следующей простой формулы

$$\langle n v_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \, n_{0j}(r) \, e^{-\frac{e_j \phi_1(r,\vartheta)}{T_i} + 2\frac{r}{R}\cos\vartheta}$$

$$\cdot \left\{ -\frac{2cT_j}{e_j H_0 R} \sin\vartheta - \frac{c}{H_0} \frac{\partial \phi_1(r,\vartheta)}{r\,\partial\vartheta} \right\}$$

Таким образом поправка в поток от самосогласованного электрического поля оказывается малой порядка $\sim O[r_{ci}/\theta r]$ по сравнению с вычисленным выше.

Литература

/1/ Л.Спитцер. Физика полностью иониз ованного газа, изд. "Мир", г.Москва, 1965.

/2/ A.A.Galeev, R.Z.Sagdeev, H.P.Furth, M.N.Rosenbluth. Phys.Rev.Lett.22,511(1969).

/3/ А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев. ЖЭТФ,53, 348, (1967).

/4/ А.А.Галеев, Р.З.Сагдеев и Г.П.Фюрс . ПМТФ, № 6, 3 (1968).

/5/ Г.И.Будкер. Сб.Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 1, изд. АН СССР, 1958, стр. 66.

/6/ D.Pfirsch, and A.Schlüter. Report of the Max-Planck-Institute, Münich, MPI/PA/7/62, 1962.

/7/ Л.Коврижных. ЖЭТФ, 56, 877 (1969).

/8/ P.Rutherford. in Programm Summary of Princeton univ., March 19-20(1969).

/9/ T.Stringer. Phys.Rev.Lett.22,770(1969).

/10/ H.Berk, and A.Galeev. Phys.Fluids,10,441(1967).

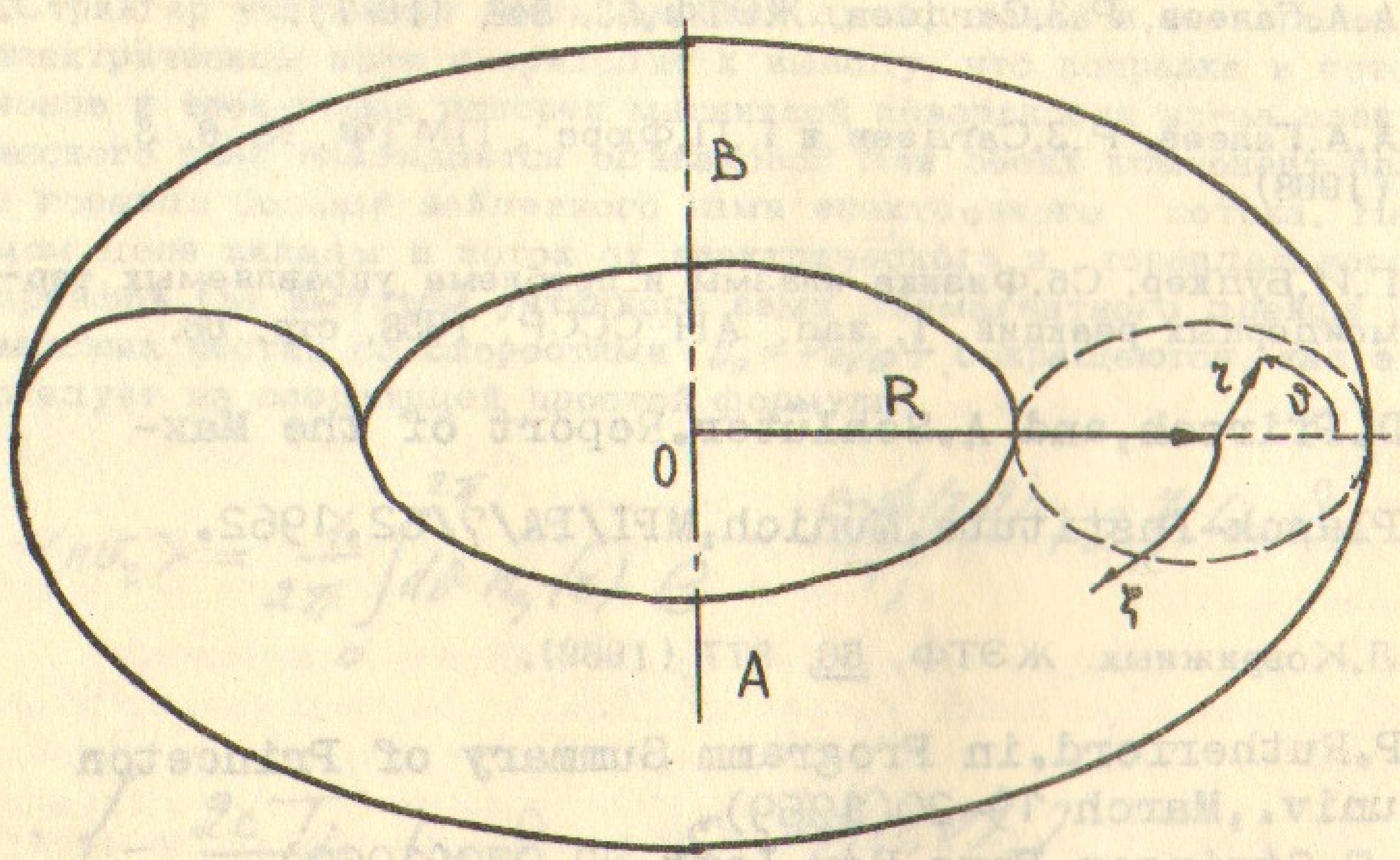

Рис.1. Общий вид тороида

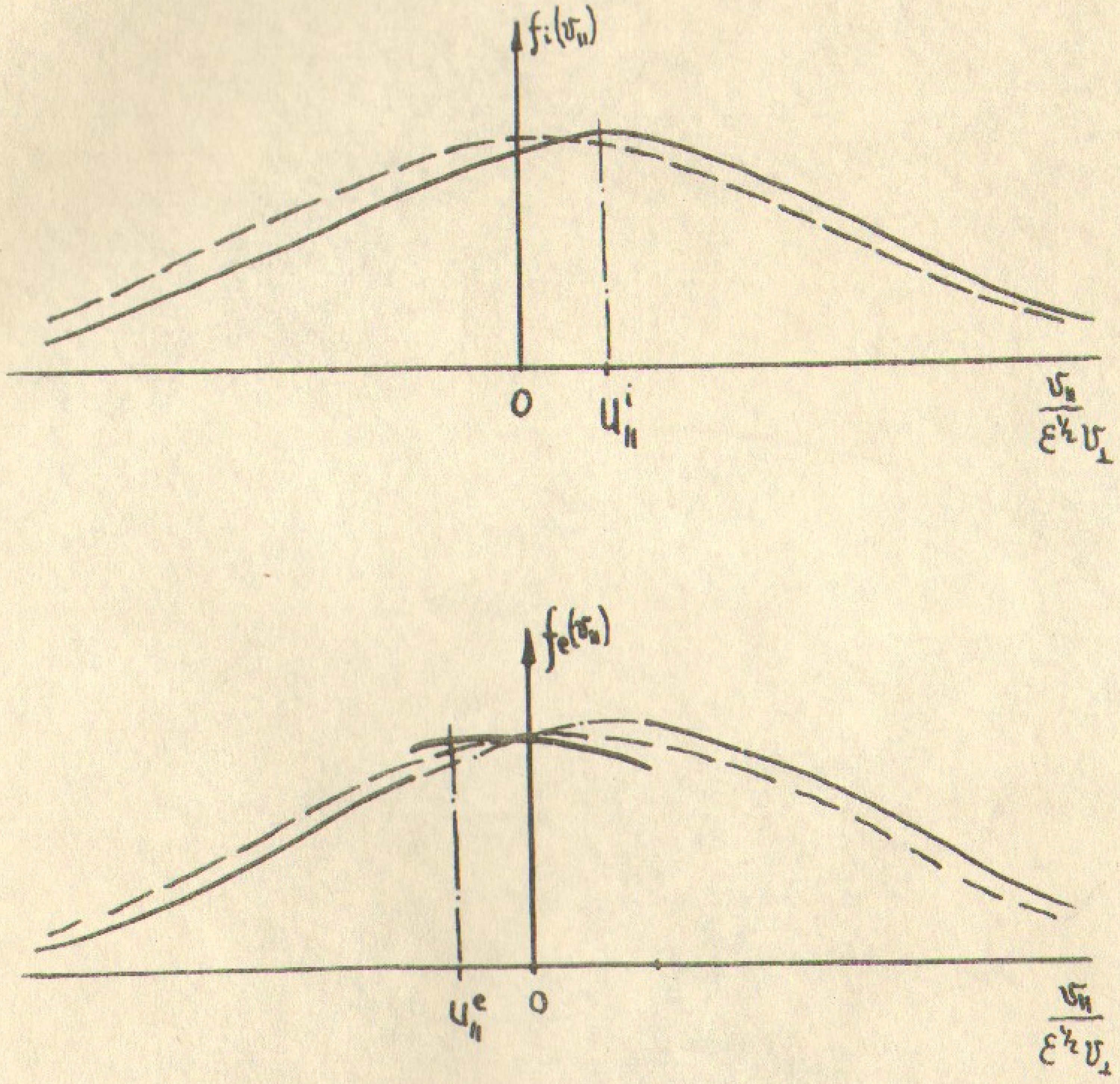

Рис.2. Стационарное распределение частиц по скоростям в отсутствие электрического поля.

Ответственный за выпуск А.А.ГАЛЕЕВ
Подписано к печати 28.5.60
Усл. 1.   , тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ 311

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР. вг