

Д.36 24

# И Н С Т И Т У Т ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

препринт 315

Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский

## О ДЕМПФИРОВАНИИ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

### 1. БЕТАТРОННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ

НОВОСИБИРСК

1969

# ON THE DAMPING OF COHERENT OSCILLATIONS OF A BEAM IN A STORAGE RING.

## I. Betatron excitations.

Ya.S.Derbenev, N.S.Dikanskij

### ABSTRACT

In the work reported here the coherent radiation effects of a beam interacting with an element of a chamber which is doubly connected waveguide were studied. It is shown that onedimensional betatron excitations of an arbitrary multipole are always damping. For twodimensional excitations the radiation can lead to the redistribution of "phase space volume" over the degrees of freedom.

The method have considered of damping of coherent excitations rules out the main deficiency of the traditional methods of supressions of coherent excitations ( feedback parasitic resonators)-the selectivity relative to the various modes of excitations.

## В в е д е н и е

Как известно, взаимодействие интенсивных пучков с элементами камеры накопителя может приводить к неустойчивости когерентных возбуждений, накладывая тем самым ограничение на величину накопленного тока. Эти ограничения могут быть особенно сильными для накопителей тяжелых частиц, где синхротронное излучение отсутствует. Поэтому поиск способов подавления когерентных неустойчивостей представляется весьма важным в настоящее время.

Большинство исследованных к настоящему времени неустойчивостей связано с конечной добротностью элементов камеры / 1-9 / (так называемые диссипативные неустойчивости), хотя возможны также динамические неустойчивости /7/, не связанные с диссипацией и возникающие при резонансном взаимодействии пучка с камерой. Характер и интенсивность этих неустойчивостей существенно зависят от частотных характеристик пучка и камеры.

Традиционные способы борьбы с этими неустойчивостями заключаются либо в соответствующем выборе бетатронных частот, либо во введении специальных устройств типа обратных связей или паразитных резонаторов. Однако эти методы имеют общий недостаток, так как подавляют только отдельные моды колебаний.

Достаточно общим и простым способом подавления когерентных неустойчивостей является использование затухания Ландау. Однако введение большого разброса по частотам не всегда желательно ввиду опасности приближения к "машинным" резонансам. Кроме того, появление разброса может само приводить к неустойчивости когерентных возбуждений ("многогорбые" функции распределения; смотри также /7/).

По-видимому, наиболее универсальным методом подавления явился бы метод, использующий излучение энергии когерентных возбуждений в широком диапазоне частот. В обычных условиях когерентное излучение заперто в объеме камеры, к тому же в камере с односвязным сечением возбуждение волн с частотами ниже  $\omega_{кр} \sim c/v_1$  вообще невозможно. В то же время

практически интересен именно этот диапазон частот, так как обычно длина сгустка  $\ell_0 > \ell_1$ . Для того, чтобы "открыть" излучение на этих частотах, необходимо сделать участок камеры в виде двухсвязного волновода, а выход излучения можно обеспечить, нагрузив концы волновода на сопротивление, равное волновому (см.рис.1). Эта идея впервые была высказана в работе [8] для объяснения так называемого "быстрого затухания", наблюдающегося в установке ВЭПП-2.

В настоящей работе исследована динамика малых когерентных бетатронных возбуждений пучка, движущегося в такой камере. При этом учитывалось только взаимодействие с "главной волной". Показано, что одномерные возбуждения любой мультипольности затухают, получены выражения декрементов затухания для однородного и сбунчированных пучков. Оценка времени затухания дипольных колебаний хорошо согласуется с экспериментально измеренным временем "быстрого затухания" (ВЭПП-2); также сделаны оценки для строящихся накопителей ИЯФ СО АН СССР.

Обнаружено, что двумерные возбуждения  $(\sqrt{\quad}, z)$  при определенных соотношениях поперечных размеров и бетатронных частот оказываются неустойчивыми. Развитие неустойчивости приводит к перераспределению фазовых объемов между степенями свободы и прекращается, когда перестает выполняться условие неустойчивости. Обратим внимание на то, что обнаруженная неустойчивость в отличие от рассматривавшихся ранее, не связана с наличием "памяти" в системе (излученная волна уходит из камеры за время  $\sim \ell/c$ ,  $\ell$  - длина пластины). Из общего выражения инкремента неустойчивости можно также заключить, что такого рода эффект не является специфическим свойством взаимодействия с данной системой.

### 1. Электромагнитное поле

Рассмотрим сначала задачу о возбуждении воли в бесконечном двусвязном волноводе пучком, колеблющимся в поперечном направлении. Будем исходить из уравнений Максвелла для потенциалов  $\vec{A}$  и  $\varphi$  с калибровкой

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \varphi$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho \quad (1)$$

и граничными условиями на поверхности

$$\vec{A}_t|_r = 0 \quad (1a)$$

$$\varphi|_r = 0 \quad (1b)$$

Общее решение системы (1) есть

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = c \sum_{\alpha} \vec{A}_{\alpha} \int \frac{d\kappa}{\sqrt{2\pi}} Q_{\alpha\kappa}(t) e^{i\kappa y}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(\vec{r}) \int \frac{d\kappa}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho_{\alpha\kappa}(t)}{\kappa^2 + \alpha^2} e^{i\kappa y}$$

где  $Q_{\alpha\kappa}$  удовлетворяет уравнению

$$\ddot{Q}_{\alpha\kappa} + c^2(\alpha^2 + \kappa^2) Q_{\alpha\kappa} = j_{\alpha\kappa} = \int \frac{d^3\vec{r}}{\sqrt{2\pi}} \vec{A}_{\alpha}^* \cdot \vec{j} e^{-i\kappa y}, \quad (2)$$

$$\rho_{\alpha\kappa} = \int \frac{d^3\vec{r}}{\sqrt{2\pi}} \varphi_{\alpha}^* \rho e^{-i\kappa y}$$

а  $\vec{A}_{\alpha} = \vec{A}_{\alpha}(\vec{r}_1)$  и  $\varphi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(\vec{r}_1)$  являются нормированными собственными решениями уравнений

$$(\Delta_1 + \alpha^2) \vec{A}_{\alpha} = 0$$

$$\int \vec{A}_{\alpha}^2 dS = 4\pi$$

$$(\Delta_1 + \alpha^2) \varphi_{\alpha} = 0$$

с граничными условиями (1a),  $S$  - площадь сечения волновода.

Поле излучения представимо в виде суперпозиции решений однородного уравнения:

$$\vec{A}_{\text{эк}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{A}_{\text{э}}(\vec{r}_1) e^{iky - i\omega_k t}$$

где:  $\omega_k^2 = c^2(\chi^2 + \kappa^2)$

Таким образом для того, чтобы излучение было возможно, необходимо, чтобы в спектре тока были частоты  $\omega^2 > \chi_{\text{min}}^2 c^2$ . В односвязном волноводе  $\chi_{\text{min}}^2 \sim 1/l_1^2$ , поэтому излучение возможно только для очень высоких мод, так как  $l_1 \ll R$ .

В случае же многосвязного волновода  $\chi_{\text{min}}^2 = 0$ , в системе возможно распространение волн с любыми частотами. Решение с  $\chi = 0$  соответствует так называемой "главной волне" с поперечными электрическим и магнитным полем (ТЕМ) [10]. В самом деле, из граничного условия (1а) и уравнения  $\Delta A_y = 0$  следует, что  $A_y \equiv 0$ . Существование нетривиального решения для  $A_x$  очевидно из аналогии с электростатикой системы несвязанных проводников. Отсюда же видно, что такое решение невозможно в односвязном волноводе.

Мы будем рассматривать низкочастотные возбуждения пучка  $\omega < c/L_1$ ; тогда, очевидно, излучается только главная волна:

$$\vec{A}_{\text{изл}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \vec{A}(\vec{r}_1) e^{\pm i\frac{\omega}{c}y - i\omega t} \quad (3)$$

Остальная часть электромагнитного поля ( $\chi \neq 0$ ) при этом имеет квазистатический (в системе покоя пучка) характер. Её роль, в основном, сводится к изменению частоты когерентного колебания пучка. В дальнейшем, чтобы не загромождать вычислений, мы будем учитывать взаимодействие пучка только с "главной волной". В реальных условиях волновод имеет конечную длину, поэтому возможны отражения от концов. Чтобы избежать этого, необходимо согласовать волновод, тогда поле "главной волны" будет такое же, как и в бесконечном волноводе.

## II. Кинетическое уравнение

Запишем самосогласованную систему уравнений для электромагнитного поля и одночастичной функции распределения

$f(\vec{p}, \vec{r}, t)$ , оставляя в электромагнитном поле только главную волну:

$$\ddot{Q}_k + c^2 k^2 Q_k = e \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{2\pi}} (\vec{v} \vec{A}) e^{-i k R \theta} g(\theta) f(\vec{p}, \vec{r}, t) \quad (4a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + (\vec{F}_\varphi + \vec{F}_z) \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (4b)$$

где:  $d\Gamma$  - элемент фазового объёма,

$$g(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \frac{\ell}{2R} \\ 0 & |\theta| > \frac{\ell}{2R} \end{cases}$$

$\theta$  - азимут частицы,  $2\pi R$  - периметр орбиты,

$\vec{F}_\varphi$  - фокусирующие силы,  $\vec{F}_z$  - сила взаимодействия частицы с полем главной волны.

Представим функцию распределения в виде:

$$f(\vec{p}, \vec{r}, t) = f_0 + \tilde{f}$$

где  $f_0$  - "равновесная" функция распределения, а  $\tilde{f}$  описывает малые когерентные возбуждения колебательных степеней свободы. По определению

$$\int d\Gamma f(\vec{p}, \vec{r}, t) = \int d\Gamma f_0 = N$$

где  $N$  число частиц в пучке,

$$\int d\Gamma \tilde{f} = 0$$

Если представить функцию распределения рядом Фурье по фазам колебаний

$$f = \sum_m f_m e^{i(m\psi)} = \bar{f} + \sum_{m \neq 0} f_m e^{i(m\psi)} \quad (5)$$

где  $m$  - совокупность целых чисел  $m_i$ ,  $(m\psi) = \sum_1^S m_i \psi_i = m_z \psi_z + m_r \psi_r + m_c \psi_c$  ( $S$  - число колебательных степеней свободы), то можно ото -

ждествить:  $\bar{f} = f_0 + \sum_{m \neq 0} f_m e^{i(m\psi)} = \tilde{f}$

Полевые переменные  $Q_k$  также разделим на две части:

$$Q_k = Q_k(f_0) + \tilde{Q}_k(\tilde{f})$$

где  $Q_k$  - вынужденное решение уравнения (4а) при  $f \equiv f_0$ . Соответственно разделяя силу взаимодействия

$$\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_0(f_0)$$

и пренебрегая в (4б) членами  $\sim \tilde{f}^2$  получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \{ \mathcal{H}_0, \tilde{f} \} + \vec{F}_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \vec{p}} + \vec{F} \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} = - \vec{F}_0 \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \quad (6a)$$

$$\ddot{\tilde{Q}}_k + c^2 k^2 \tilde{Q}_k = e \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{2\pi}} \vec{V} \vec{A}(\vec{r}_1) e^{i k \vec{r}_0} \tilde{y}(\theta) \tilde{f} \quad (6b)$$

Правая часть уравнения (6а) является вынуждающей "силой" по отношению к однородной системе, свойства которой определяют характер решения при  $t \rightarrow \infty$ . Если решение однородной системы затухает, то при  $t \rightarrow \infty$  движение системы будет описываться вынужденным решением, в случае неустойчивого решения роль правой части уравнения сводится к переопределению начального условия для  $\tilde{f}$ . Таким образом, для выяснения характера решения можно ограничиться исследованием решений однородной системы. Силу  $\vec{F}_0$  в левой части уравнения (6а) можно рассматривать, как добавку к фокусирующей силе  $\vec{F}_{фок}$ .

Для дальнейшего удобно перейти к переменным действие  $J_i$  и фаза  $\psi_i$ , тогда в линейном приближении выражение для поперечных отклонений частицы от равновесной орбиты имеет вид:

$$p_r = \frac{p_s}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta_s}, \quad p_z = \frac{p_s}{R} \frac{\partial r}{\partial \theta_s}$$



$$r = a_r \cos(\nu_r \theta_s + \varphi_r) = a_r \cos \varphi_r$$

$$z = a_z \cos(\nu_z \theta_s + \varphi_z) = a_z \cos \varphi_z \quad (7)$$

$$\theta = \omega_0 t + \varphi, \quad p_s = \gamma m_0 \beta c, \quad \theta_s = \omega_0 t$$

В отсутствие продольного ВЧ поля  $\Delta P = \text{const}$

$\dot{\varphi} = \text{const} = \frac{\partial \omega_0}{\partial P} \Delta P$ , в режиме синхротронных колебаний

$$\Delta P = \mu_c \omega_c \varphi_0 \cos(\omega_c t + \varphi_c) = \mu_c \omega_c \varphi_0 \cos \varphi_c,$$

$$\mu_c = -\frac{1}{\varepsilon_s \beta^2} \left( \left\langle \frac{R \psi(\theta)}{R(\theta)} \right\rangle - \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad \varphi = \varphi_0 \sin \varphi_c$$

В настоящей работе мы пренебрегаем связью радиального и продольного движения в ускорителе. Детальное исследование связанных с этим эффектов будет сделано в выпуске II.

Чтобы не загромождать изложение, мы будем пренебрегать также азимутальной неоднородностью фокусировки на длине пластины.

Используя разложение (5) мы перейдем от уравнения (6а) к системе уравнений для  $f_m$

Сначала рассмотрим случай без ВЧ поля. При этом с учетом разброса по продольным импульсам можно считать  $f_m$  не зависящей от азимута:

$$f = f_0(J_L, p_{||}) + \sum_m f_m(J_L, p_{||}, \varphi, t) e^{i(m\varphi)} \quad (8)$$

Уравнение (6а) в новых переменных принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + [\omega_i + \Delta \omega_i(\gamma, \psi)] \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_i} + \dot{\varphi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \tilde{\omega}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J_i} + \tilde{\omega}_{0i} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J_i} = 0 \quad (9)$$

где:  $\Delta \omega(J, \psi) = \left( \vec{F}_0 \frac{\partial \psi}{\partial \vec{p}} \right)$  мгновенный сдвиг частоты,

$W(J, \psi) = \left( \vec{F}_0 \frac{\partial J}{\partial \vec{p}} \right)$  мгновенная мощность.

Поскольку  $\vec{F}_0$  - периодическая функция азимута  $\theta$  и  $\psi$ , поэтому  $\Delta \omega$  и  $W$  представим в виде:

$$\Delta \omega(J, \psi) = \sum_{m, n} \Delta \omega_{mn} e^{in\theta + i(m\psi)} \quad (10a)$$

$$W(J, \psi) = \sum_{m, n} W_{m, n}(t) e^{in\theta + i(m\psi)}$$

Подставляя (8) в уравнения (9,65), получаем систему уравнений для  $f_m$ :

$$\frac{\partial f_m}{\partial t} + \sum_{m'} (\omega_i + \Delta \omega_i)_{m-m'} \cdot m' f_{m'} + \tilde{W}_{im} \frac{\partial f_0}{\partial J_i} + W_i{}_{m-m'} \frac{\partial f_{m'}}{\partial J_i} = 0$$

$$\ddot{Q}_k + c^2 k^2 Q_k = e \sum_m \int \frac{d\Gamma}{\sqrt{2\pi}} (\vec{V} \vec{A})_m^* f_m e^{-ikR\theta} g(\theta) \quad (11)$$

Система (11) представляет собой цепочку однородных линейных уравнений с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Общим решением её является суперпозиция нормальных решений, имеющих вид

$$f_m = \chi_m(t) e^{-i\omega t}, \quad Q_k = q_k(t) e^{-i\omega t}$$

где  $\chi_m(t)$ ,  $q_k(t)$  - периодические функции времени:

$$\chi_m(t) = \sum_e \chi_{me}(\psi) e^{i\psi e \omega t}, \quad q_k(t) = \sum_e q_{ke}(\psi) e^{i\psi e \omega t}$$

Поскольку взаимодействие мало, то спектр нормальных возбуждений должен быть близок к невозмущенному, т.е.

$$\omega = (m_i \omega_i) + \Delta, \quad |\Delta| \ll |\omega|$$

Очевидно, основной вклад в нормальное решение

$\omega \simeq (m; \omega_i)$  даёт гармоника  $\chi_{m,0}$ , а вклад остальных гармоник порядка

$$\chi_{m'l} \sim \frac{\Delta}{(m_i - m'_i)\omega_i - l\omega_0}$$

Если разность частот невозмущенного спектра велика по сравнению со сдвигом  $\Delta$ , то вкладом этих гармоник можно пренебречь, оставив в суммах  $\sum_{m'}$  только член  $m' = m$

и заменив  $\chi_m(t) \rightarrow \chi_{m,0} = \overline{\chi}_m(t)$ . Такой приём, очевидно, эквивалентен методу усреднения. Таким образом, для нормального возбуждения  $\omega \simeq (m; \omega_i)$  получаем приближенные уравнения:

$$i(m_i\omega_i + m_i\overline{\Delta\omega_i} - \omega)\chi_{m,0} + \overline{\Psi} \frac{\partial \chi_{m,0}}{\partial \varphi} + \overline{W}_{im} \frac{\partial f_0}{\partial J_i} + \overline{F}_i \frac{\partial f_0}{\partial P_{ii}} + \overline{W}_i^0 \frac{\partial \chi_{m,0}}{\partial J_i} + \overline{F}_i \frac{\partial \chi_{m,0}}{\partial P_{ii}} = 0$$

$$g_{kln} = e \frac{\int \frac{d\Gamma}{\sqrt{2\pi}} (e^{+ikR\theta} g(\theta))_n^* (\vec{V}\vec{A})_m^* \chi_{m,0} e^{-in\varphi}}{c^2 k^2 - (\omega + n\omega_0)^2} \quad (12)$$

где:  $\overline{\Delta\omega_i} \equiv \Delta\omega_{00}(J_r, J_z, P_{ii})$  — поправка к частоте, учитывающая влияние "неидеальностей" магнитной системы, пространственного заряда и т.п.,

$$\overline{W}_{im} = \left( \frac{\partial J_i}{\partial \vec{p}} \vec{F}_i \right)_m$$

$$\vec{F}_i = -e \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{A}_i$$

Член  $\overline{W_i^0}$  в (12) отличен от нуля только при учёте некогерентного излучения; последний член, кроме этих эффектов, учитывает также внешние продольные силы (например, ВЧ-поле).

### III. Однородный пучок

В этом случае  $\vec{F} = 0$ ,  $\frac{\partial f_0}{\partial \varphi} = 0$  из системы (12), полагая  $\overline{\chi}_m \sim \overline{\chi}_{mn} e^{in\varphi}$  получаем уравнение

$$\overline{\chi}_{mn} = \frac{e^2 \mathcal{L}_n(\omega, \beta) (\vec{A}_\perp \frac{\partial f_0}{\partial p_\perp})_{mn}}{m_i \omega_i + m_i \Delta \omega_i + n\overline{\varphi} - \omega} \int d\Gamma (\frac{\vec{v}}{c} \vec{A})_{mn}^* \overline{\chi}_{mn} \quad (13)$$

где

$$\mathcal{L}_n(\omega) = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\kappa v - n\omega_0 - \omega}{\kappa^2 c^2 - (n\omega_0 + \omega)^2} \frac{1}{|v_{kn}|^2} = \mathcal{L}_n^+ + \mathcal{L}_n^- \quad (14)$$

$$\mathcal{L}_n^+ = \frac{1}{8\pi^2 R} \left\{ l - i \frac{1 - e^{i[\frac{\omega}{c} - \kappa_n(1-\beta)]l}}{\frac{\omega}{c} - \kappa_n(1-\beta)} \right\} \frac{1-\beta}{\frac{\omega}{c} - \kappa_n(1-\beta)},$$

$$v_{kn} = \int_0^{l/n} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(\kappa - \kappa_n)R\theta}, \quad \mathcal{L}_n^- = \mathcal{L}_n^+(\omega, -\beta); \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\kappa_n = h/R$$

Частное  $\text{Im} \mathcal{L}_n^+ / \text{Im} \mathcal{L}_n^-$  равно отношению сил взаимодействия частиц с волнами, излучаемыми "вперед" и "назад".

Из (13) видно, что решение для  $\overline{\chi}_{mn}$  пропорционально множителю перед интегралом в правой части уравнения. Таким образом получаем дисперсионное уравнение

$$I = -e^2 \mathcal{L}_n \int \frac{d\Gamma}{c} \frac{(\vec{\nabla} \vec{A}_1)_m^* \left( \frac{\partial f_0}{\partial \vec{p}} \vec{A}_1 \right)_m}{\omega - m_i \omega_i - n \frac{\partial \omega_0}{\partial p} \Delta p} \quad (15)$$

При выполнении интегрирования в (14) и (15) нужно полагать  $\text{Im } \omega > 0$ , в соответствии с обычным правилом обхода полюсов. Для  $\text{Im } \omega < 0$  интегралы определяются как аналитические продолжения из верхней полуплоскости.

Чтобы выяснить характер взаимодействия различных мод с главной волной, пренебрежём временно разбросом по частотам. Тогда

$$\omega - m_i \omega_i \equiv \Omega_n = \Omega_n^+ + \Omega_n^-$$

$$\Omega_n = \Omega_n^+ + \Omega_n^- = \frac{Ne^2}{c} (\mathcal{L}_n^+ + \mathcal{L}_n^-) (m_z \omega_z + m_r \omega_r) \left\langle m_z \frac{\partial |V_m|^2}{\partial \mathcal{J}_z} + m_r \frac{\partial |V_m|^2}{\partial \mathcal{J}_r} \right\rangle \quad (16)$$

где величины  $V_m = \frac{1}{(2\pi)^2} \int V(r, z) e^{i(m_z \psi_z + m_r \psi_r)} d\psi_r d\psi_z$

являются бетатронными гармониками "потенциала" электрического поля главной волны  $\vec{A}_1 = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_1}$  с нормировкой

$\int \vec{A}_1^2 dS = 4\pi$ .  $\vec{A}_1$  может быть выражено через экспериментально измеряемые величины:

$$\vec{A}_1 = \sqrt{c Z} \frac{\vec{E}_1}{U} \quad (17)$$

где  $Z$  - волновое сопротивление,  $\vec{E}_1$  - электростатическое поле, создаваемое разностью потенциалов  $U$ .

Как видно из (16), одномерные возбуждения всегда затухают, так как  $\text{Im } \mathcal{L}_n < 0$ . Для двумерных возбуждений при  $m_z m_r < 0$ , знак  $\text{Im } \Omega_n$  зависит от соотношений бетатронных частот и размеров пучка. Характерной чертой низкочастотных возбуждений  $(m_z \nu_z + m_r \nu_r + n) \frac{c}{R} \ll 1$

является квадратичная зависимость декремента и кубичная - сдвига частоты от длины пластины.

Рассмотрим частные случаи возбуждений, предполагая для простоты малость поперечных размеров пучка по сравнению с расстоянием до пластины.

1. Одномерные возбуждения (например,  $m_r = 0, m_z = m$ ).

Тогда

$$\Omega_n = \frac{Ne^2}{c} \mathcal{L}_n m^2 \omega_z^2 \left\langle \frac{\partial |V_m|^2}{\partial Z} \right\rangle \approx$$

$$\approx 2 \frac{Nr_0 c}{\gamma} \mathcal{L}_n \left[ \frac{1}{2^m (m-1)!} \frac{\partial^m V}{\partial Z^m} \right]^2 \langle a_z^{2m-2} \rangle; \quad v_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \quad (18)$$

В наиболее важном случае дипольных колебаний ( $m_z = 1$ ) декремент равен

$$-\mathcal{I}_m \Omega_n = \frac{Nr_0 c}{8\gamma} (cZ) \left( \frac{E_z}{U} \right)^2 \left( \frac{\ell}{2\pi R} \right)^2 \left[ (1-\beta) \frac{\rho_{in^2} v_+}{\gamma_+^2} + (1+\beta) \frac{\rho_{in^2} v_-}{\gamma_-^2} \right] \quad (19)$$

где 
$$v_{\pm} = \frac{\ell}{2R} [\pm v_z \beta - n(1 \mp \beta)]$$

Для низкочастотных возбуждений выражение в квадратных скобках приближенно равно 2. Для оценки по порядку величины можно положить  $(E_z/U)^2 \sim 1/h^2$ :

$$-\mathcal{I}_m \omega \sim \frac{Nr_0 c}{4\gamma h^2} (cZ) \left( \frac{\ell}{2\pi R} \right)^2 \quad (20)$$

Как обычно, для дипольных возбуждений декремент не зависит от поперечных размеров пучка, в то время как для мультипольных возбуждений декремент

2. Двумерные возбуждения. Как отмечалось выше, при  $m_z m_r < 0$  такие возбуждения могут быть неустойчивыми. Для примера рассмотрим возбуждение  $m_z = 1$ ,  $m_r = -1$ , тогда формула (16) даёт:

$$\Omega_n = -(\chi_n^+ + \chi_n^-) \frac{N v_0 c}{8 \gamma} (\gamma_z - \gamma_r) \left[ \frac{\langle a_z^2 \rangle}{\gamma_z} - \frac{\langle a_r^2 \rangle}{\gamma_r} \right] \left| \frac{\partial A_z}{\partial r} \right|^2 \quad (21)$$

Таким образом возбуждение неустойчиво, если

$$\left( \frac{\gamma_z}{\gamma_r} - 1 \right) \left( \frac{\gamma_z}{\gamma_r} - \frac{\langle a_r^2 \rangle}{\langle a_z^2 \rangle} \right) > 0 \quad (22)$$

Рисунок (3) иллюстрирует это условие. Обнаруженная неустойчивость не означает, что поперечные степени свободы увеличивают энергию. Можно показать, что суммарная мощность по обеим степеням свободы отрицательна. Таким образом эта неустойчивость связана с перераспределением энергии между степенями свободы при излучении волны. Из формулы (21) видно, что можно избежать неустойчивости, обеспечив малость градиента

#### 1У. Короткий пучок с синхротронными колебаниями

В этом случае использование переменных  $\rho$ ,  $\psi$  для продольной степени неудобно, так как невозмущенная функция распределения зависит от  $\psi$ . При наличии автофазировки частица пучка представляет собой осциллятор по всем степеням свободы. Поэтому, если рассматриваются малые когерентные возбуждения, удобно перейти к переменным действие - фаза  $\mathcal{I}_c$ ,  $\psi_c$  и в продольном направлении:

$$f = f_0(\mathcal{I}_z, \mathcal{I}_c) + \sum_m f_m(t) e^{i(m_z \psi_z + m_r \psi_r + m_c \psi_c)}$$

$$\psi_c = \Omega_c t + \psi_c \quad \psi = \psi_0 \sin \psi_c$$

Уравнения для гармоник  $f_m$  можно получить непосредственно из уравнения (12), записав его в переменных  $\mathcal{J}_c, \Psi_c$ :

$$i(m_1\omega_1 - \omega)\chi_{m_1} + \Omega_c \frac{\partial \chi_{m_1}}{\partial \Psi_c} + \bar{\omega}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathcal{J}_1} = 0$$

Представляя

$$\chi_{m_1} = \sum_{m_c} \chi_m e^{im_c \Psi_c}, \quad e^{in\varphi} = \sum_{m_c} J_{m_c}(n\varphi_0) e^{im_c \Psi_c}$$

где  $J_{m_c}(n\varphi_0)$  - функции Бесселя, получаем, пренебрегая, как и ранее, связью между гармониками:

$$\chi_m = e^2 \sum_n \frac{\mathcal{L}_n(\bar{A}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \bar{\mathcal{J}}} e^{in\varphi})_m}{m_1\omega_1 + m_c\Omega_c - \omega} \int d\Gamma (\frac{\bar{\mathcal{V}}}{c} \bar{A}_1 e^{in\varphi})_m^* \chi_m$$

Мы рассмотрим только случай  $m_c = 0$ , что соответствует чисто бетатронным возбуждениям с учетом некогерентного синхротронного движения. Для момента

$$\chi_{m_1} = \int d\Gamma_1 (\frac{\bar{\mathcal{V}}}{c} \bar{A}_1)_{m_1, 0} \chi_{m_1, 0}$$

получаем уравнение (см. (16)):

$$(\omega - m_1\omega_1)\chi_{m_1} = \sum_n \Omega_n \rho(\varphi_0) J_0(n\varphi_0) \int_0^\infty J_0(n\varphi_0) \chi_{m_1} \varphi_0 d\varphi_0 \quad (23)$$

где для простоты предположено, что

$$f_0 = f_1(\mathcal{J}_1) \rho(\varphi_0), \quad \int_0^\infty \rho(\varphi_0) \varphi_0 d\varphi_0 = 1$$

Уравнение (23) можно свести к системе алгебраических уравнений для гармоник

$$\chi_n = \int_0^\infty \chi_{m_1}(\varphi_0) J_0(n\varphi_0) \varphi_0 d\varphi_0$$



$$(\omega - m_1 \omega_1) X_n = \sum_{n'} \rho_{nn'} \Omega_{n'} X_{n'} \quad (24)$$

где

$$\rho_{nn'} = \int_0^{2\pi} \varphi_0 d\varphi_0 J_0(n\varphi_0) J_0(n'\varphi_0) \rho(\varphi_0)$$

Вследствие неоднородности пучка по азимуту, нормальное возбуждение  $\sim e^{-i\omega t}$  является суперпозицией гармоник  $\sim e^{in\varphi}$ , усредненных по синхротронным колебаниям ( $m_c = 0$ ). Оценить спектр собственных значений  $\omega$  можно в двух предельных случаях.

1.  $l_0 \gg l$

В области коротковолновых возбуждений  $nl_0 \gg R$

$$\rho_{nn'} \approx \rho(0) \frac{1}{n} \delta(n-n')$$

переходя в (24) от суммирования к интегрированию, получаем:

$$\omega - m_1 \omega_1 \approx \frac{\Omega_n}{n} \rho(0) \quad (25)$$

По порядку величины

$$\omega - m_1 \omega_1 \sim \frac{\Omega_n}{n \langle \varphi_0^2 \rangle} = \frac{\Omega_n}{n} \frac{R^2}{l_0^2}$$

Для длинноволновых возбуждений  $nl_0 \ll R$ ,

$$\rho_{nn'} \approx 1 \quad (n' \leq n) \quad X_n = \text{const}$$

Тогда

$$\omega - m_1 \omega_1 \sim \sum_{n'=0}^{n \sim \frac{R}{l_0}} \Omega_{n'} \approx \frac{R}{l_0} \Omega_{n=0} \quad (26)$$

Появление множителя  $\sim R/l_0$  по сравнению с формулой (16) для непрерывного пучка связана с увеличением плотности.

Из (25) видно, что величина декремента при  $n l_0 \gg R$  меньше, чем в случае длинноволновых возбуждений. Физический смысл этого заключается в том, что при  $n \psi_0 \gg 1$  коротковолновые возбуждения "замазываются" быстрым фазовым движением частиц.

2.  $l \gg l_0$ . Здесь физически различны два предельных случая:

а)  $(1+\beta) \gamma^2 l_0 \ll l$  "слабо релятивистский" случай. При этом условии в уравнении (23)  $\sum$  сходится в области  $n \ll \frac{1}{\beta_0}$ , поэтому аргумент функций Бесселя можно положить равным нулю. Тогда  $X_- \sim \rho(\varphi)$ , что означает колебание сгустка как целого. Для  $\omega$  получаем:

$$\begin{aligned} \omega - m_\perp \omega_\perp &= \sum_n \Omega_n^+ + \Omega_n^- = \sum_n \Omega_n = \\ &= -i \frac{N e^2}{2c} \frac{l}{2\pi R} (m_z \omega_z + m_r \omega_r) \left\langle m_z \frac{\partial |V_m|^2}{\partial J_z} + m_r \frac{\partial |V_m|^2}{\partial J_r} \right\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

(см. (14) и (16)).

Обратим внимание на то, что когерентный сдвиг частоты равен нулю. Для дипольных колебаний декремент затухания следующий:

$$-J_m \omega = \frac{N r_0 c}{4\gamma} (c Z) \left( \frac{E}{U_0} \right)^2 \frac{l}{2\pi R} \quad (28)$$

Эта величина является максимальной, так как по существу, представляет собой декремент затухания точечного заряда.

б) Ультрарелятивистский случай  $(1+\beta) \gamma^2 l_0 \gg l$   
 При этом, вплоть до  $n \sim \frac{1}{\beta_0}$   $|\Omega_n^+| \ll |\Omega_n^-|$   
 поэтому

$$\omega - m_1 \omega_1 = \sum_n' \Omega_n^- = \frac{1}{2} \sum_n' \Omega_n \quad (29)$$

То есть декремент уменьшается вдвое по сравнению со случаем а). Это объясняется тем, что излучение "вперед" будет когерентно, если волна, излученная частицами, движущимися в "хвосте" сгустка, успевает догнать головную его часть за время пролета сгустка над пластиной, то есть

$$\frac{v_0}{c-v} < \frac{l}{c} \quad (30)$$

При сильном нарушении этого условия пучок излучает когерентно только "назад" (сравни с (16)).

### У. Короткий пучок без синхротронных колебаний

Если частота фазовых колебаний значительно меньше величины декремента затухания, то, очевидно, синхротронным движением можно пренебречь, считая невозмущенную функцию  $f_0$  неоднородной функцией по  $\psi$ :

$$f_0 = f_0(J_\perp) \rho(\psi) \delta(p_\parallel - \bar{p}_s)$$

Для решения этой задачи можно исходить из уравнений (12), опуская в  $n$  и  $x$  члены, пропорциональные  $\dot{\psi}$  и  $\overline{H^T}$ .

Тогда для момента  $X_{-m_1}(\psi) = \int d\Gamma dP_\parallel \bar{X}_{m_1}(\vec{V}_1, \vec{A}_1)_{m_1}^*$  получаем уравнение:

$$X_{-m_1}(\psi)(\omega - m_1 \omega_1) = \sum_n \Omega_n \rho(\psi) e^{in\psi} \int d\psi' X_{-m_1}(\psi') e^{-in\psi'} \quad (31)$$

Сводя это уравнение к алгебраической системе, получаем:

$$X_{-m_1, n} = \sum_{n'} \Omega_{n'} \rho_{n-n'} X_{-m_1, n'} \quad (32)$$

где:

$$\rho_{n-n'} = \int_0^{2\pi} \rho(\psi) e^{-i(n-n')\psi} d\psi$$

Приближенное решение (36) возможно в двух предельных случаях:

1.  $l_0 \gg l$

Тогда, как видно из  $Z_n$ ,  $\Omega_n$  медленная функция  $n$ , поэтому получаем:

$$(\omega - m\omega_L) \approx \rho(\psi) \Omega_0 \quad (33)$$

Откуда видно, что декремент затухания зависит от локальной плотности частиц в сгустке.

2.  $l_0 \ll l$

Как нетрудно видеть из уравнения (32) этот случай ничем не отличается от аналогичного случая в разделе 1У.

### У1. О разбросе

Разброс по частотам бетатронных колебаний обычно рассматривается в связи с подавлением когерентных неустойчивостей и здесь он, как правило, играет положительную роль, увеличивая порог неустойчивости по току. Но если же существуют другие способы подавления неустойчивости, то разброс играет отрицательную роль. Хотя с учётом разброса скорость затухания когерентных колебаний увеличивается, с точки зрения отвода энергии когерентных возбуждений большой разброс не выгоден, так как при этом часть когерентной энергии переходит в тепловую. Таким образом, если синхротронное излучение отсутствует, когерентные флуктуации могут приводить к разогреву пучка. Следует отметить, что в этом смысле опасными могут быть не только случайные, но и редкие периодические когерентные "толчки", приводящие к стохастической раскачке некогерентного движения при:

$$\frac{\partial \omega_s}{\partial J} \sqrt{(\Delta J)^2} T \gg 1$$

где:  $\Delta J$  - средняя величина толчков, а  $T$  - период между ними.

В связи со сказанным можно заключить, что введение пластин, подавляющих когерентные колебания, может оказаться полезным даже в отсутствии неустойчивостей, а для того, чтобы предотвратить вредное влияние разброса, необходимо обеспечить малость его вклада в декремент затухания когерентного движения.

Разброс по частотам бетатронных колебаний, как известно, может возникать по двум причинам: либо из-за нелинейности ведущего поля, либо из-за энергетического разброса в пучке.

Мы же ограничимся обсуждением влияния разброса по продольным импульсам, так как исследования влияния нелинейности ведущего поля, особенно в случае  $Y-Z$  неустойчивости представляет самостоятельный интерес.

Очевидно необходимо рассмотреть влияние разброса как на затухающие, так и на нарастающие моды. Действительно, как видно из вышеизложенного (см., например (18)) интенсивность излучения быстро падает с ростом мультипольности возбуждения, поэтому не всегда возможно подавление высших мультипольных возбуждений.

Сначала рассмотрим действие разброса на неустойчивые моды возбуждений. Дисперсионное уравнение (15) удобно записать в виде:

$$1 = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\omega - \bar{\omega} - \varepsilon} \quad (34)$$

где:  $\bar{\omega} = \langle \omega_{mn} \rangle = \langle n\omega_0 + m_r\omega_r + m_z\omega_z \rangle$ ,  $\omega_{mn} = \bar{\omega} + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{\partial \omega_{mn}}{\partial \Delta p_{||}} \Delta p_{||}$ ; через  $\Omega$  обозначено решение дисперсионного уравнения (16) без разброса  $f(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$

Как обычно, влияние разброса на инкремент когерентных возбуждений существенно зависит от соотношения когерентного сдвига частоты  $\text{Re } \Omega$  и величины разброса  $\Delta = \sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle}$  частотам колебаний частиц, а также от вида функции распределения.

В общем виде граница области устойчивости дается следующими уравнениями:

$$\pi f(\Omega_{th}) = \frac{\text{Im } \Omega}{|\Omega|^2} \quad (35)$$

где пороговое значение сдвига частоты  $\Omega_{th} = \omega_{th} - \bar{\omega}_{mn}$  определяется из уравнения:

$$\mathcal{P}(\Omega_{th}) = \mathcal{P} \int \frac{d\varepsilon f(\varepsilon)}{\omega_{th} - \bar{\omega}_{mn} - \varepsilon} = \frac{\text{Re } \Omega}{|\Omega|^2} \quad (36)$$

Положение области устойчивости относительно граничной кривой определяется условием:

$$\left( -\pi f(\omega_{th} - \bar{\omega}_{mn}) + \frac{\text{Im } \Omega}{|\Omega|^2} \right) \frac{\partial}{\partial \Omega_{th}} \left( \mathcal{P} \int \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\Omega_{th} - \varepsilon} \right) > 0 \quad (37)$$

На рисунке 3 изображена область устойчивости для случая гауссова распределения.

Для монотонно убывающих функций можно получить условие устойчивости в двух предельных случаях:

1.  $|\text{Re } \Omega| \gg |\text{Im } \Omega|$  . При этом из (35, 36)

следует  $\mathcal{P}(\Omega_{th}) \gg f(\Omega_{th})$ , что возможно лишь при

$\Omega_{th} \gg \Delta$  , тогда  $\mathcal{P}(\Omega_{th}) \approx \frac{1}{\Omega_{th}} \approx \frac{1}{\text{Re } \Omega}$

и условие (37) принимает вид:

$$\text{Im } \Omega \ll (\text{Re } \Omega)^2 \pi f(\text{Re } \Omega) \quad (38)$$

2.  $|\operatorname{Re} \Omega| \ll |\operatorname{Im} \Omega|$ . Тогда  $P(\Omega_{th}) \ll f(\Omega_{th})$

для чего необходимо  $\Omega_{th} \ll \Delta$ . Главное значение

$P(\Omega_{th}) \sim \frac{\Omega_{th}}{\Delta^2}$ , то есть  $\frac{\partial P}{\partial \Omega_{th}} > 0$  и условие устойчивости есть:

$$\operatorname{Im} \Omega < \frac{1}{\pi f(0)} \sim \Delta \quad (39)$$

Затухающие моды. В этом случае основной интерес представляет оценка доли когерентной энергии, перешедшей в тепловую, которую обозначим через  $(1 - \zeta)$ , где  $\zeta$  — коэффициент полезного действия демпфирующего устройства. Влияние разброса на когерентное затухание проявляется существенно по-разному в двух предельных случаях:

1.  $|\operatorname{Re} \Omega| \gg |\operatorname{Im} \Omega|$ . Так же, как и для неустойчивых мод вклад разброса может быть мал, если

$$|\operatorname{Re} \Omega| \gg \Delta$$

Тогда дисперсионное уравнение для  $\operatorname{Im} \omega < 0$  может быть получено обычным аналитическим продолжением уравнения (34) ( $\operatorname{Im} \omega \ll \operatorname{Re} \omega$ ):

$$1 = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{\omega - \bar{\omega}_{th} - \varepsilon} - 2\pi i \Omega f(\omega) \quad (40)$$

Теория возмущений даёт:

$$\operatorname{Im} \omega = \operatorname{Im} \Omega - \pi (\operatorname{Re} \Omega)^2 f(\operatorname{Re} \Omega)$$

Как видно действие разброса сводится к поправке в декремент невозмущенного решения, то есть условие малости вклада разброса:

$$1 - \zeta = \frac{\pi (\operatorname{Re} \Omega)^2 f(\operatorname{Re} \Omega)}{|\operatorname{Im} \Omega|} \ll 1 \quad (41)$$

2.  $|\operatorname{Re} \Omega| \ll |\operatorname{Im} \Omega|$ . Вклад разброса будет подавляться, если  $|\operatorname{Im} \Omega| \gg \Delta$ . В этом случае дисперсионный подход неудобен, так как возникает вопрос о продолжении функции распределения  $f(\varepsilon)$  в комплексную плоскость. Даже, если функция  $f(\varepsilon)$  целая, оказывается невозможным применение теории возмущений к дисперсионному уравнению по параметру  $\Delta / \operatorname{Im} \Omega$ , так как из-за особенности на бесконечности, при  $\Delta \rightarrow 0$  не существует предельного перехода к решению без разброса.

Например, для гауссова распределения по частотам при  $|\operatorname{Re} \Omega| \ll |\operatorname{Im} \Omega|$  значение функции в полюсе  $\omega = \Omega$  становится бесконечно большим при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Однако оценка доли когерентной энергии, перешедшей в тепловую, может быть получена в общем виде приближенным решением временной задачи, на временах  $t \lesssim 1/\Delta$ . Так как

$\Delta \ll \operatorname{Im} \Omega$ , то очевидно когерентное движение за это время почти полностью затухнет.

Для любой функции с шириной  $\sqrt{\langle \varepsilon^2 \rangle} = \Delta$  решение уравнения для "момента"  $X_{mn}$  имеет вид:

$$X_{mn} = X_0 \left\{ \left[ 1 + \left( \frac{\Delta}{\operatorname{Im} \Omega} \right)^2 + \frac{\Delta^2 t}{|\operatorname{Im} \Omega|} \right] e^{-|\operatorname{Im} \Omega| t} - \left( \frac{\Delta}{\operatorname{Im} \Omega} \right)^2 \right\} e^{i(\omega_{mn} + \operatorname{Re} \Omega) t} \quad (42)$$

откуда интегрируя  $|X_{mn}|^2 / X_0^2$  до  $t \lesssim \frac{1}{\Delta}$  получаем:

$$1 - \eta = \left( \frac{\Delta}{\operatorname{Im} \Omega} \right)^2 \quad (43)$$

Отметим, что времена  $t > \frac{1}{\Delta}$  дают вклад  $\sim \left( \frac{\Delta}{\operatorname{Im} \Omega} \right)^4$

Для модельного решения с функцией распределения

$$f(\varepsilon) = 2\Delta^3 / \sqrt{\pi} (\varepsilon^2 + \Delta^2)^2 \quad \text{получается следующее:}$$



$$f - \eta = \frac{2\Delta^2}{(2|J_m \Omega| + \Delta)(|J_m \Omega| + 2\Delta)} \quad (44)$$

Как нетрудно видеть, для  $(\Delta/|J_m \Omega|) \ll 1$  это выражение совпадает с (43).

Авторы признательны А.Н.Скринскому и М.М.Карлинеру за весьма полезные обсуждения и критику в ходе выполнения работы.

31 мая 1968 г.

УП. П р и м е р ы

1. ВЭПП-2.

Длина орбиты	$\Pi = 1200$ см.
Энергия накопления электронов	$E = 200$ эв.
Кратность	1
Частота фазовых колебаний	$\Omega_c = 100$ кгц
Число согласованных пластин	7
Волновое сопротивление пластин	$Z = 25$
Длина пластины	$l = 233$ см.
Длина сгустка	$l_s = 10 + 100$ см. $h = 10$ см.
Напряженность поля на равновесной орбите	$E_z = 0,88 \frac{U}{h}$ (Экспериментально измеренная величина)

$$1 \text{ ма} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ частиц.}$$

Экспериментально измеренная величина  $\tau T = 50 \text{ мксек}$ . Поскольку  $(1+v) \tau \gg l$  и период фазовых колебаний мал.

по сравнению с временем когерентного затухания, то мы находимся в пределах применимости формулы (29), которая даёт хорошо согласующуюся с экспериментально измеренной величиной  $\tau_J$ :

$$\tau_J \sim 100 \text{ } \mu\text{msec}$$

## 2. ВЭПП-3.

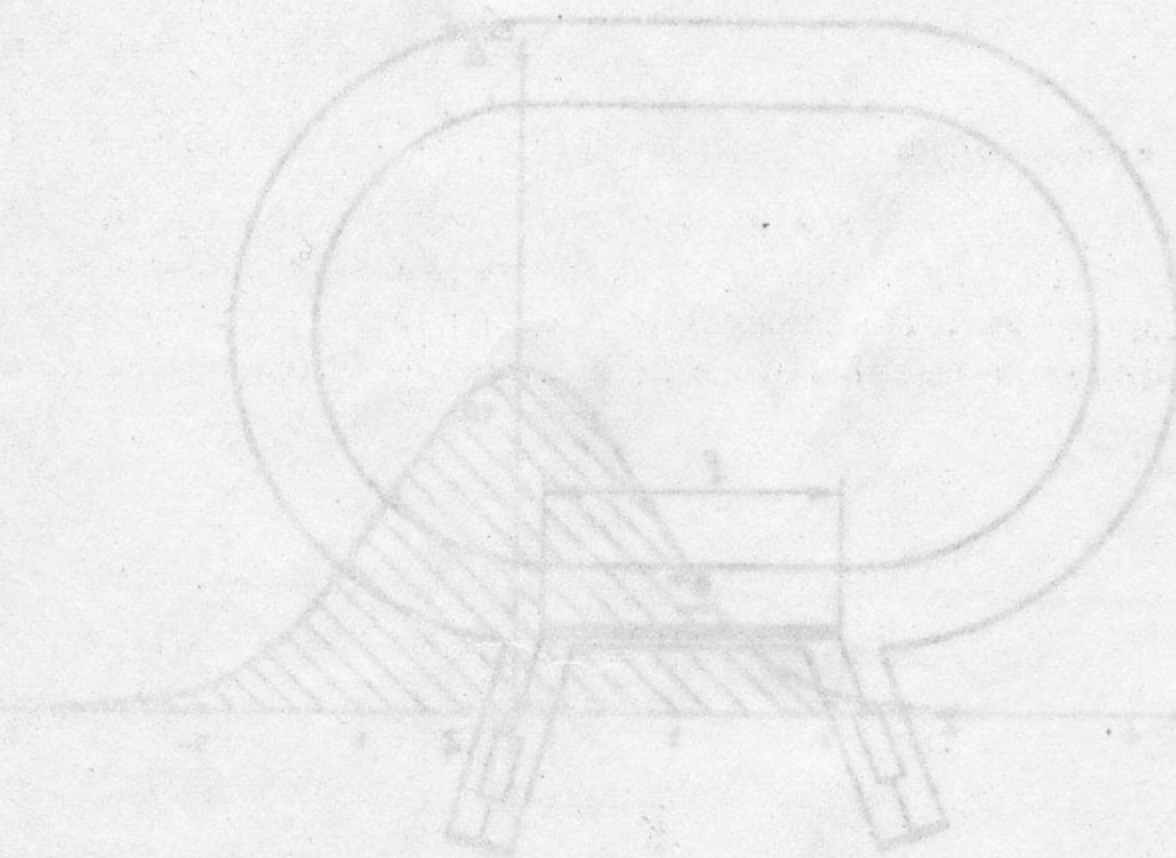
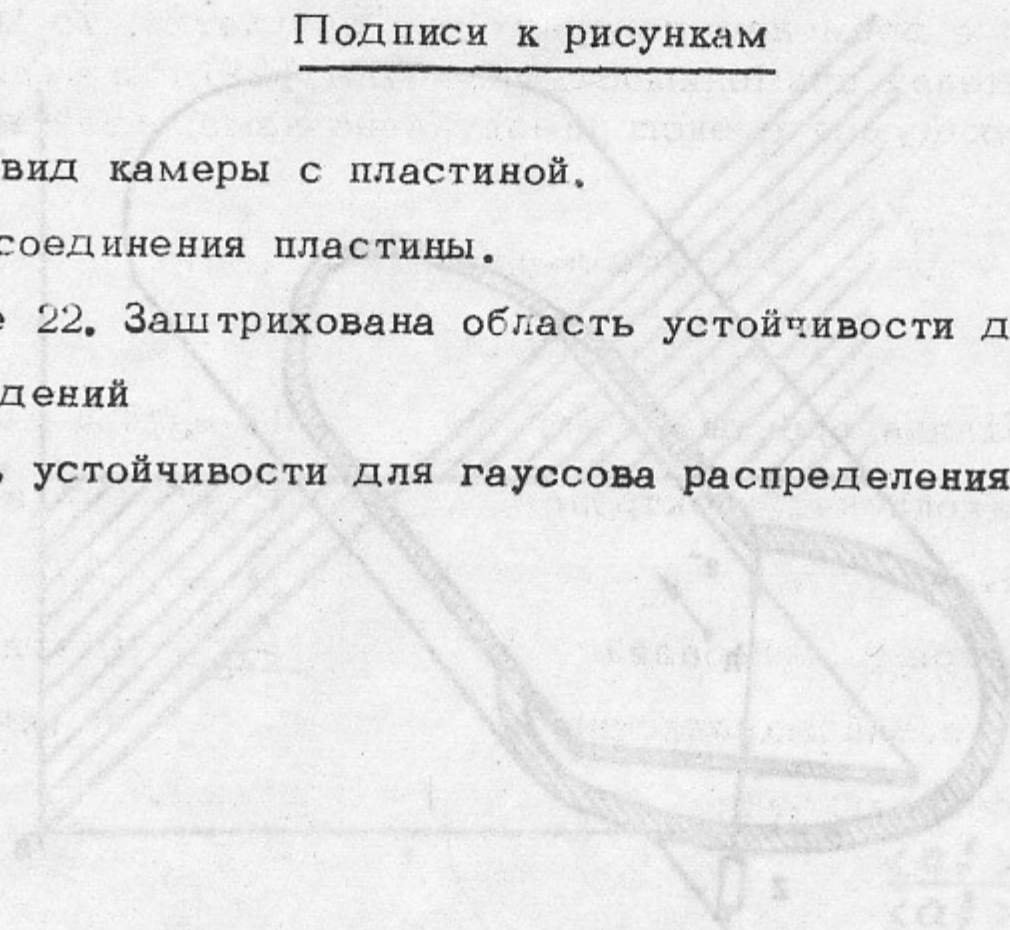
Длина орбиты	$\Pi = 7424 \text{ см.}$
Энергия накопления электронов	$E = 450 \text{ Мэв.}$
Кратность	$q = 19$
Частота фазовых колебаний	$\Omega_c = 10 \text{ кгц}$
Число согласованных пластин	8 (инфлекторы)
Волновое сопротивление	$Z = 50$ 4 пластины $Z = 35$ 4 пластины.
Длина пластины	$l = 60 \text{ см.}$ $h = 3 \text{ см.}$
	$I_{ma} = 155 \cdot 10^9 \text{ частиц.}$

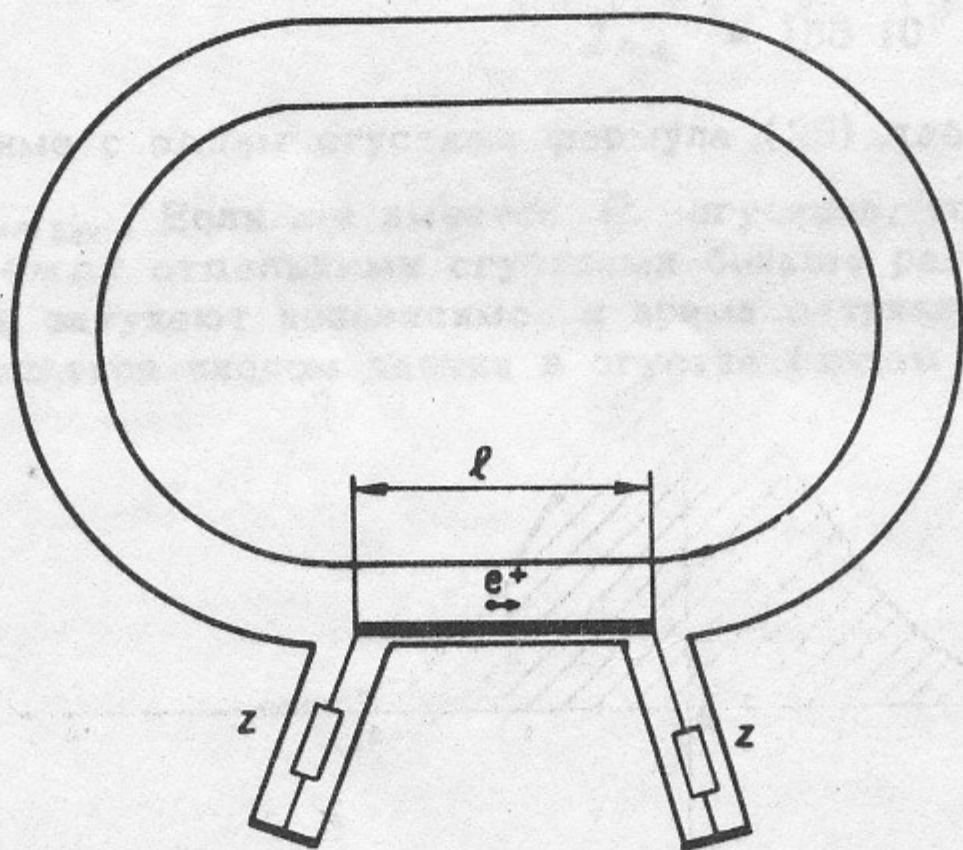
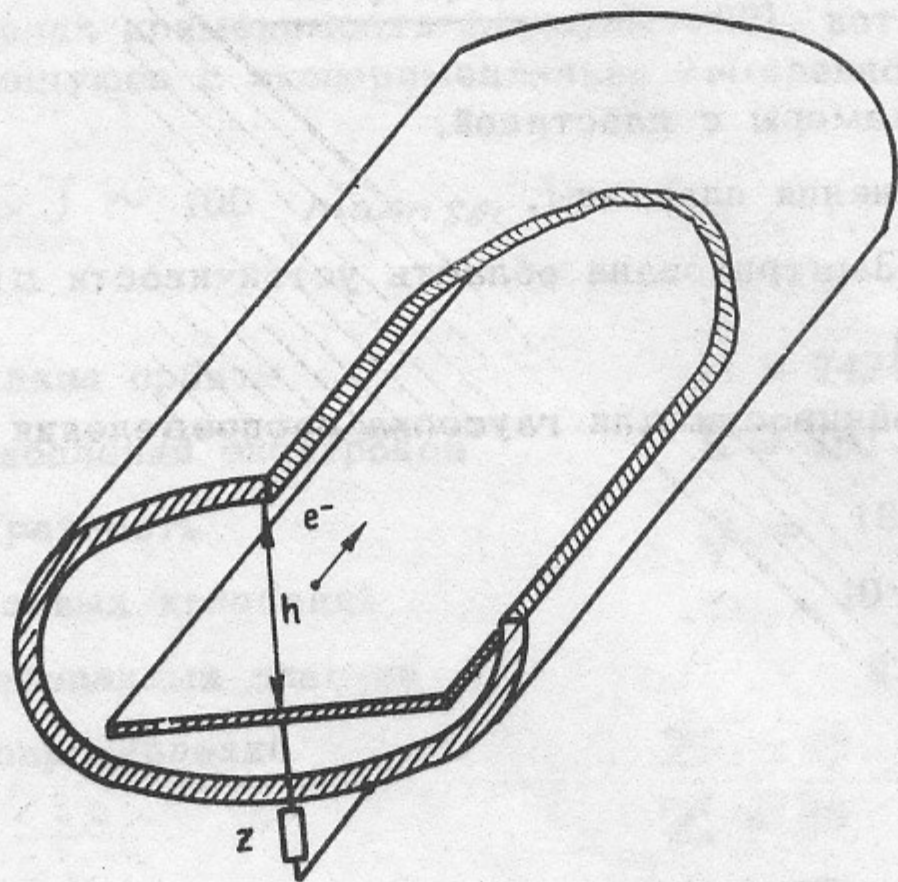
В режиме с одним сгустком формула (29) даёт:

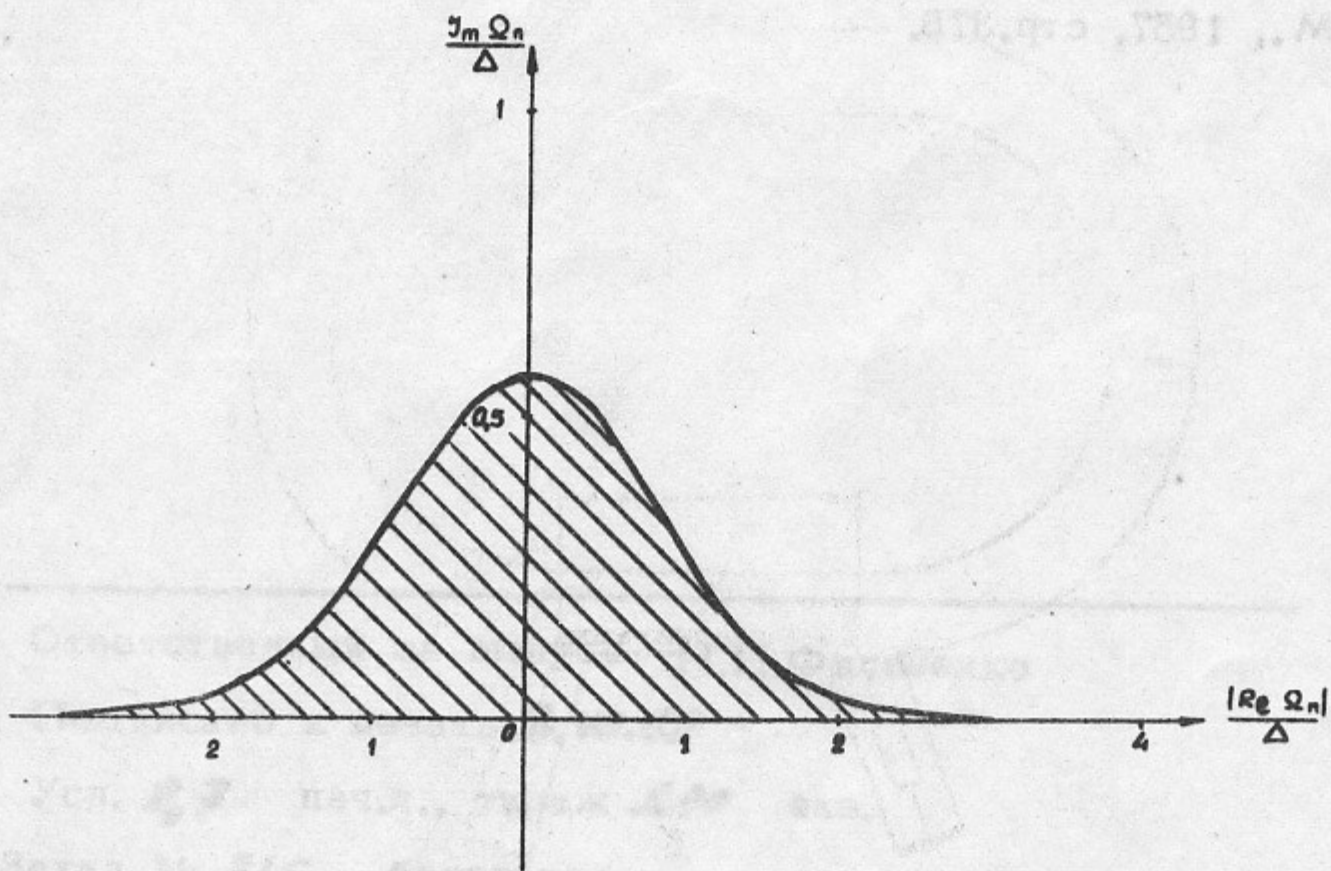
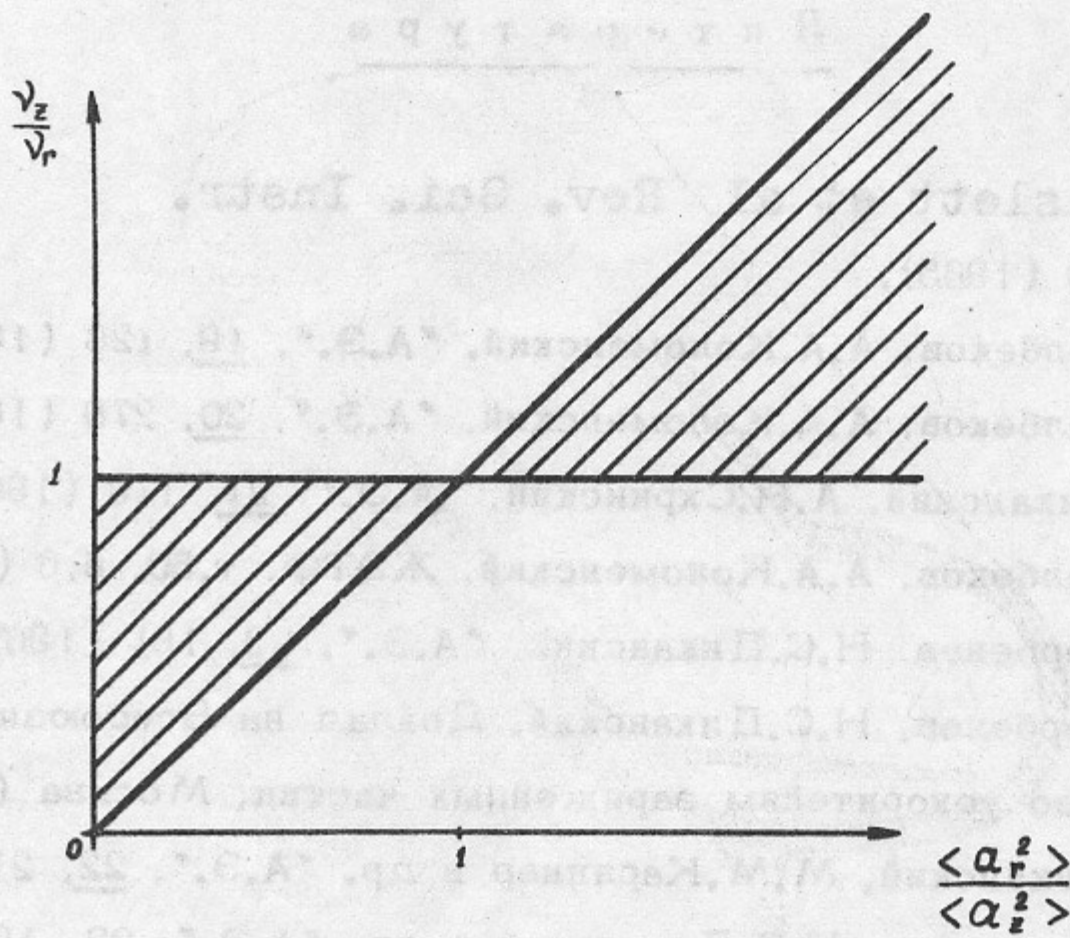
$\tau_J \sim 50 \text{ } \mu\text{msec}$ . Если же имеется  $q$  сгустков, то так как расстояние между отдельными сгустками больше размера пластины, сгустки затухают независимо и время затухания сгустка будет определяться числом частиц в сгустке (током данного сгустка).

Подписи к рисункам

1. Общий вид камеры с пластиной.
2. Схема соединения пластины.
3. Условие 22. Заштрихована область устойчивости двумерных возбуждений
4. Область устойчивости для гауссова распределения по частотам.







## Л и т е р а т у р а

1. L. Laslett et al. Rev. Sci. Instr. 36, 436 (1965).
2. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. "А.Э.", 19, 126 (1965).
3. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. "А.Э.", 20, 270 (1966).
4. Н.С.Диканский, А.Н.Скринский. "А.Э.", 21, 176 (1966).
5. В.И.Балбеков, А.А.Коломенский. ЖЭТФ. т.50, в.6 (1966).
6. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. "А.Э.", 22, 191 (1967).
7. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. Доклад на Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц, Москва (1968).
8. Н.С.Диканский, М.М.Карлинер и др. "А.Э.", 22, 210 (1967).
9. В.Л.Ауслендер, Н.С.Диканский и др. "А.Э.", 22, 198 (1967).
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., 1957, стр.375.

---

Ответственный за выпуск Н.Н.Филоненко

Подписано к печати 2. VII. 69

Усл. 2,7 печ.л., тираж 200 экз.

Заказ № 315 , бесплатно.

---

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР, нв.