ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

препринт 333

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

КИНЕТИКА РАДИАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

НОВОСИБИРСК

1969

В.Н.Байер, В.М.Катков, В.М.Страховенко

КИНЕТИКА РАДИАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

А Н Н О Т А Ц И Я

В квазиклассическом приближении получено уравнение, описывающее поведение спина во внешнем электромагнитном поле с учетом эффектов излучения. С помощью этого уравнения исследован процесс радиационной поляризации.

1. В в е д е н и е

Магнитнотормозное излучение приводит к поляризации движущихся в поле электронов и позитронов потому, что вероятность радиационного перехода с переворотом спина зависит от ориентации начального спина. Преимущества такого механизма поляризации состоят в следующем:

1) Это единственный способ непосредственного получения поляризованных пучков высокой энергии, что снимает весьма сложную задачу ускорения поляризованных частиц (фактически он эффективен начиная с энергий в несколько сот Мэв).

2) Процесс поляризации не вносит добавочных изменений в характеристики пучка (интенсивность, разброс параметров), что выгодно отличает его от, скажем, способа получения поляризованных пучков с помощью рассеяния. Таким образом открывается возможность постановки опытов с участием поляризованных электронов и позитронов, позволяющая расширить пути экспериментального изучения электромагнитных взаимодействий при высоких энергиях.

На существование механизма радиационной поляризации в однородном магнитном поле впервые указали Соколов и Тернов [1], вычислившие вероятность радиационного перехода с переворотом спина, исходя из точных решений уравнения Дирака в однородном магнитном поле. Анализ кинетики радиационной поляризации проводился ими с помощью элементарного уравнения баланса для числа электронов с заданной проекцией спина на направление магнитного поля.

Байер и Катков [2,3] вычислили вероятность радиационного перехода с переворотом спина в особенно интересном для приложений случае неоднородного магнитного поля x). В этих работах был применен метод, существенно использующий квазиклассический характер движения электронов большой энергии во внешнем поле (см. [4]). Полученная вероятность поворота спина при излу-

---

x) Степень неоднородности ограничена следующим условием: внешнее поле должно мало меняться на длине формирования излучения, что практически всегда выполняется.

чении зависит от знака проекции вектора спина на направление $\vec{v} \times \dot{\vec{v}}$, что указывает на возможность поляризации частиц вдоль этого направления.

Заметный интерес представляет детальное изучение кинетики радиационной поляризации, для чего нужно вывести и исследовать уравнение для поляризационной матрицы плотности с учётом вклада излучения. Этому вопросу и посвящена настоящая работа. Учитывая квазиклассический характер движения электронов большой энергии во внешнем поле, уравнение для поляризационной матрицы плотности удобно представить в виде уравнения для ветора спина $\vec{\zeta}$ (среднего значения оператора спина в системе покоя электрона). В работе получено уравнение движения для вектора спина с учетом взаимодействия с полем излучения, которое является обобщением хорошо известного уравнения Баргмана-Мишеля-Телегди (БМТ). (См., напр., [5]). Затем с помощью этого уравнения проводится анализ кинетики радиационной поляризации.

II. Вывод уравнения

Введем гейзенберовский оператор спина электрона в системе покоя $\vec{\sigma}(t)$ ($\vec{\sigma}^+(t) = \vec{\sigma}(t)$), среднее значение которого

$$\vec{\zeta}_0(t) = \langle t_0 | \vec{\sigma}(t) | t_0 \rangle \tag{1}$$

есть вектор спина в системе покоя частицы. Без учёта взаимодействия с полем излучения изменение этого вектора во времени для частиц с заданным аномальным магнитным моментом определяется уравнением БМТ. (В квазиклассическом пределе, т.е. для полей, слабо меняющихся на длинах $\sim \hbar/mc$, и узких волновых пакетов).

После включения взаимодействия с полем излучения эволюция вектора состояния во времени определяется матрицей $U(t,t_0)$

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle \tag{2}$$

Изменение среднего значения спина во времени с учётом взаимодействия с полем излучения есть:

$$\langle t|\vec{\sigma}(t)|t\rangle - \langle t_0|\vec{\sigma}(t_0)|t_0\rangle = \langle t_0|U^+(t,t_0)\vec{\sigma}(t)U(t,t_0)|t_0\rangle - \langle t_0|\vec{\sigma}(t_0)|t_0\rangle =$$
$$= \langle t_0|U^+(t,t_0)[\vec{\sigma}(t), U(t,t_0)]|t_0\rangle + \langle t_0|\vec{\sigma}(t)-\vec{\sigma}(t_0)|t_0\rangle \tag{3}$$

Здесь последний член определяет изменение среднего спина в отсутствие поля излучения. Представим матрицу $U(t,t_0)$ в виде разложения теории возмущений по электромагнитной константе связи e:

$$U(t,t_0) = I + iT(t,t_0) = I + i\left[T_1(t,t_0) + T_2(t,t_0) + \ldots\right] \tag{4}$$

Из условия унитарности матрицы рассеяния получаем x)

$$T_1 - T_1^+ = 0\,; \quad i(T_2^+ - T_2) = T_1^+ T_1 = 2\,\mathrm{Im}\,T_2 \tag{5}$$

С учётом этих соотношений и (1) можно переписать (3) в виде:

$$\vec{\zeta}(t) - \vec{\zeta}(t_0) = \langle t_0 | \Big\{ T_1^+ \vec{\sigma}(t) T_1 - \frac{1}{2}\left(\vec{\sigma}(t) T_1^+ T_1 + T_1^+ T_1 \vec{\sigma}(t)\right) +$$
$$+ i\left[\vec{\sigma}(t), \mathrm{Re}\,T_2\right] \Big\} | t_0 \rangle + \vec{\zeta}_0(t) - \vec{\zeta}_0(t_0) \tag{6}$$

Причём здесь $\vec{\zeta}_0(t_0) = \vec{\zeta}(t_0)$, поскольку взаимодействие с полем излучения включается в момент времени t_0.

Перейдём к вычислению отдельных членов в (6). В матрицу T_1 входит оператор рождения или уничтожения фотона, поэтому матричный элемент

$$\langle t_0 | T_1 | t_0 \rangle = 0 \tag{7}$$

поскольку вектор состояния $|t_0\rangle$ описывает состояния электрона во внешнем поле в отсутствие поля излучения. Это обстоятельство учтено в (6). При вычислении членов, содержащих комбинацию $T_1^+ T_1$, следует учесть, что отличны от нуля только матричные элементы T_1 для перехода в однофотонные состояния

$$\langle t_0|T_1^+ T_1|t_0\rangle = \sum_n \langle t_0|T_1^+|n\rangle\langle n|T_1|t_0\rangle = \int d^3k \sum \langle t_0|T_1^+|t_0,k\rangle\langle k,t_0|T_1|t_0\rangle \tag{8}$$

---

x) Отметим, что введенный вектор состояния является двухкомпонентным спинором, а $U(t,t_0)$ – матрица 2x2, действующая в пространстве этих спиноров. $\mathrm{Re}\,T_2$ и $\mathrm{Im}\,T_2$ означают соответственно эрмитову и деленную на i антиэрмитову часть оператора T_2.

где интегрирование ведется по импульсам фотона, а суммирование по спинам электрона (S) и поляризациям фотона (λ). $\langle k, t_0 | T_1 | t_0 \rangle$ – матричный элемент перехода в однофотонное состояние с фотоном (k, λ). В соответствии с результатами работы [4] он имеет вид:

$$\langle k, t_0 | T_1 | t_0 \rangle = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\hbar\omega}} \varphi_n^+ \left[\int_{t_0}^{t} dt_1 Q(t_1) e^{-i \, \varepsilon/\varepsilon' (\omega t_1 - \vec{\kappa}\vec{z}(t_1))} \right] \varphi_i \tag{9}$$

где

$$Q(t) = A(t) + i(\vec{\sigma}\vec{B}(t)); \quad A = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2\varepsilon'}(\vec{e}^{\,*}\vec{v}); \quad \vec{B} = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon'} \vec{e}^{\,*} \times \left(\vec{n} - \vec{v} + \vec{v}\frac{m}{\varepsilon}\right)$$

здесь $\varepsilon' = \varepsilon - \hbar\omega$, $\vec{n} = \vec{\kappa}/\omega$, ω – частота фотона,

ε – энергия электрона, $\vec{v}$ – скорость электрона. $\vec{e}$ – вектор поляризации фотона. Характерное время изменения матричных элементов оператора T_1 , есть время излучения $\tau \sim T_0/\gamma$, в то время как характерное время изменения $\vec{\sigma}(t)$ ($\vec{\xi}(t)$) есть T_0 (T_0, например, период обращения частицы в поле), поэтому мы можем с точностью до членов $\sim 1/\gamma$ пренебречь изменением $\vec{\sigma}(t)$ за время формирования излучения. С учетом этого обстоятельства имеем:

$$\Delta\vec{\xi}_1 = \langle t_0 | T_1^+ \vec{\sigma}(t) T_1 - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}(t) T_1^+ T_1 + T_1^+ T_1 \vec{\sigma}(t)) | t_0 \rangle =$$

$$= e^2/4\pi\hbar \int \frac{d^3\kappa}{2\pi\omega} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \sum_{\lambda} \vec{N} \tag{10}$$

$$\vec{N} = Sp\left\{ \left[Q_2^+ \vec{\sigma}(t) Q_1 - \frac{1}{2}(\vec{\sigma}(t) Q_2^+ Q_1 + Q_2^+ Q_1 \vec{\sigma}(t)) \right] \frac{(1 + \vec{\xi}\vec{\sigma})}{2} \right\}$$

Воспользовавшись соотношением $Q\vec{\sigma} = \vec{\sigma}Q + 2\vec{B} \times \vec{\xi}$, нетрудно вычислить след в (10); $\vec{N} = \vec{N}_A + \vec{N}_B$

$$\vec{N}_A = -(A_2\vec{B}_1 + A_1\vec{B}_2) \times \vec{\xi}$$

$$\vec{N}_B = -2i\,\vec{B}_2 \times \vec{B}_1 + \vec{B}_2(\vec{\xi}\vec{B}_1) + \vec{B}_1(\vec{\xi}\vec{B}_2) - 2\vec{\xi}(\vec{B}_1\vec{B}_2) \tag{11}$$

Полученное выражение для $\vec{N}$ содержит члены двух типов: квадратичные по $\vec{B}$ ($N_B \sim \hbar^2$) и линейные по $\vec{B}$ ($N_A \sim \hbar$) эти члены приводят к разным физическим следствиям, поэтому мы рассмотрим их отдельно. Умножим $\vec{N}$ (10) на $\vec{\xi}$

$$(\vec{N}\vec{\xi}) = (\vec{N}_B\vec{\xi}) = 2\left\{ (\vec{B}_1\vec{\xi})(\vec{B}_2\vec{\xi}) - \vec{\xi}^{\,2}(\vec{B}_1\vec{B}_2) + i(\vec{\xi}, \vec{B}_2 \times \vec{B}_1) \right\} \tag{12}$$

Видно (см. [3]), что член $(\vec{N}_B\vec{\xi})$ выражается через квадрат матричного элемента радиационного перехода с переворотом спина. Заметим, что здесь мы ведем рассмотрение для ансамбля электронов (на языке одного из представлений матрицы плотности) так что, вообще говоря $|\vec{\xi}| \neq 1$. Дальнейшее вычисление интеграла (10) совпадает с проделанным в [3]x), поскольку члены при заданных структурах с $\vec{\xi}$ выделяются однозначно. Таким образом ответ следует прямо из последней формулы в [3]

$$\frac{\Delta\vec{\xi}_{1,B}}{\Delta t} = -\frac{1}{T}\left\{ \vec{\xi} - \frac{2}{9}\vec{v}(\vec{\xi}\vec{v}) + \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{|\dot{\vec{v}}|} \right\} \tag{13}$$

где

$$\frac{1}{T} = \frac{5\sqrt{3}}{8} \alpha \frac{\hbar^2}{m^2} \gamma^5 |\dot{\vec{v}}|^3; \quad \alpha = e^2/4\pi\hbar = 1/137$$

Непосредственное вычисление $\Delta\vec{\xi}_{1,A}/\Delta t$ не представляет труда, однако следует иметь в виду следующие обстоятельства: а) структура этого члена $\vec{F} \times \vec{\xi}$, где $\vec{F}$ – аксиальный вектор, построенный из векторов задачи. Члены такого типа приводят к вращению вектора $\vec{\xi}$ (вокруг $\vec{F}$), но не к изменению его модуля; б) член $\Delta\vec{\xi}_{1,A}/\Delta t$ пропорционален постоянной Планка $\hbar$, поскольку он линеен по $\vec{B}$, в то время как будет видно ниже, имеются члены вращения, не содержащие $\hbar$. В этом смысле член $\Delta\vec{\xi}_{1,A}/\Delta t$ является поправочным к описанию вращения.

Перейдем теперь к члену в (6) с $Re\,T_2$. Для его вычисления необходимо знать функцию Грина электрона во внешнем электромагнитном поле. Мы воспользовались функцией Грина, вычисленной Швингером [6]. В последней работе приведено формаль-

x) Необходимо, чтобы разность времен $t - t_0 \gg \tau$

ное выражение для функции Грина, справедливое во всех порядках по $\hbar$ и явно вычислена функция Грина в линейном по полю приближении (фактически члены $\sim \hbar^0$). Как показано в приложении A, исходя из этой функции Грина, можно получить

$$\langle t_0 | Re T_2 | t_0 \rangle = \int_{t_0}^{t} \langle t_0 | a - \frac{\mu e}{2\varepsilon} (\vec{H}_R \vec{\sigma}) | t_0 \rangle dt \tag{14}$$

Величина "a" содержит расходящийся интеграл, связанный с перенормировкой массы, в дальнейшем она нам не понадобится.

$\mu = \frac{\alpha}{2\pi}$; $\vec{H}_R = \gamma \left\{ \vec{H} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\vec{H})}{1+1/\gamma} - \vec{v} \times \vec{E} \right\}$ – магнитное поле в системе покоя электрона, если $\vec{H}$ и $\vec{E}$ – поля в лабораторной системе. Проводя простые вычисления и используя соображения, относительно зависимости $\vec{\sigma}(t)$ от времени, аналогичные приведенным выше, получаем

$$\langle t_0 | i [\vec{\sigma}(t), Re T_2] | t_0 \rangle = \int_{t_0}^{t} \frac{\mu e}{\varepsilon} \vec{\xi} \times \vec{H}_R \, dt \tag{15}$$

Итак, мы получили, что

$$\frac{\Delta \vec{\xi}_2}{\Delta t} = \frac{\mu e}{\varepsilon} \vec{\xi} \times \vec{H}_R \tag{16}$$

т.е. получен член вращения, пропорциональный аномальному магнитному моменту электрона.

Наконец, входящая в (6) разность $\vec{\xi}_0(t) - \vec{\xi}_0(t_0) = \frac{\Delta \vec{\xi}_0}{\Delta t} \Delta t$ описывает изменение вектора спина электрона во внешнем поле в отсутствие взаимодействия с полем излучения. В квазиклассическом пределе можно получить непосредственно из уравнения для спинового оператора уравнения Дирака (см., напр., [5]).

$$\frac{\Delta \vec{\xi}_0}{\Delta t} = \frac{e}{\varepsilon} \vec{\xi} \times \vec{H}_E \; ; \quad \vec{H}_E = \vec{H} + \frac{\vec{E} \times \vec{v}}{1 + 1/\gamma} \tag{17}$$

Таким образом картина рассматриваемого явления следующая. В отсутствие взаимодействия с полем излучения спин прецессирует согласно уравнению (17). Включение взаимодействия с полем излучения приводит к эффектам двух типов. 1) Появляются новые виды членов вращения, связанные с появлением у электрона, вследствие взаимодействия с полем излучения, аномального магнитного момента (16). Сумма (16) и (17) даёт уравнение изменения вектора $\vec{\xi}$ для электрона с аномальным магнитным моментом во внешнем поле (уравнение БМТ)[x]. Кроме того, появляются члены нового типа – меняющие $|\vec{\xi}|$. В итоге мы получаем следующее уравнение движения спина ансамбля электронов во внешнем поле с учётом эффектов излучения (13), (16), (17).

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \frac{e}{\varepsilon} \vec{\xi} \times (\mu \vec{H}_R + \vec{H}_E) - \frac{1}{T} \left(\vec{\xi} - \frac{2}{9} \vec{v}(\vec{\xi}\vec{v}) + \frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\vec{v} \times \dot{\vec{v}}}{|\dot{\vec{v}}|} \right) \tag{18}$$

причем $\vec{H}_R$ определено в (14), $\vec{H}_E$ – в (17), $1/T$ – в (13). Следует иметь в виду, что вращательные члены в (18) порядка $\hbar^0$ (мы не учитываем высших поправок по $\hbar$ к вращательным членам, поскольку они ничтожно малы и не приводят к новым качественным эффектам). Члены, меняющие $|\vec{\xi}|, \sim \hbar^2$, однако их следует сохранять, т.к. они приводят к новым качественным эффектам – изменению $|\vec{\xi}|$. Тем не менее такое различие в порядках величин упрощает решение кинетического уравнения (18) и позволяет во многих случаях рассматривать эффекты вращения и изменения $|\vec{\xi}|$ раздельно.

III. Анализ кинетического уравнения

Для простоты рассмотрим случай чисто магнитного поля, т.е. положим в (18) $\vec{E} = 0$. (18) можно переписать в виде системы уравнений для проекций вектора $\vec{\xi}$ на оси $\vec{e}_1 = \vec{v}/|\vec{v}|$; $\vec{e}_2 = \dot{\vec{v}}/|\dot{\vec{v}}|$; $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$:

---

[x] В этом смысле проведенный расчёт представляет прямой вывод уравнения БМТ. Можно было рассуждать и в обратном порядке: исходя из общего представления для $Re T_2$ (14), независимо от коэффициентов, легко видеть, что это член вращательного типа, но тогда он может быть равен только члену с аномальным магнитным моментом в уравнении БМТ.

$$\dot{\zeta}_1 = -\frac{7}{9}\frac{\zeta_1}{T} - \Omega\zeta_2$$

$$\dot{\zeta}_2 = -\frac{\zeta_2}{T} + \Omega\zeta_1 + \omega\zeta_3 \qquad (19)$$

$$\dot{\zeta}_3 = -\frac{1}{T}\left(\zeta_3 + {}^{8}/_{5\sqrt{3}}\right) - \omega\zeta_2$$

здесь: $\Omega = \gamma\mu|\vec{v}|$; $\omega = \mu e\frac{H_\parallel}{\varepsilon} + \frac{e}{\varepsilon}\frac{(\vec{v}\vec{H})}{|\vec{v}|^2}$;

$H_\parallel = (\vec{v}\vec{H})$; $\vec{H} = (\vec{v}\vec{v})\vec{H}$ (считается, что $\vec{H}$ не зависит от времени явно). Если частицы движутся в однородном поле по круговой траектории, то $\omega = 0$; коэффициенты Ω и T не зависят от времени. Выпишем получающееся решение (см. также [7]):

$$\zeta_1(t) = \zeta_\perp(0)\cos(\Omega t + \beta)\,e^{-\frac{8}{9}t/T}$$

$$\zeta_2(t) = \zeta_\perp(0)\sin(\Omega t + \beta)\,e^{-\frac{8}{9}t/T} \qquad (20)$$

$$\zeta_3(t) = -{}^{8}/_{5\sqrt{3}} + \left(\zeta_3(0) + {}^{8}/_{5\sqrt{3}}\right)e^{-t/T}$$

где $\zeta_\perp(t) = \sqrt{\zeta_1^2(t) + \zeta_2^2(t)}$

Видно, что спин вращается вокруг оси $\vec{e}_3$, причём компоненты ζ_1 и ζ_2 затухают за время $\sim T$, а незатухающий член $-{}^{8}/_{5\sqrt{3}}$ в ζ_3 даёт конечную поляризацию, которая не зависит от начального значения вектора $\vec{\zeta}$. Таким образом асимптотически (т.е. через время $t \gg T$) получается вектор спина, длиной ${}^{8}/_{5\sqrt{3}}$, направленный по $\dot{\vec{v}} \times \vec{v}$, т.е. против поля для электронов и по полю для позитронов.

Пусть теперь частица совершает в однородном поле движение по винтовой линии, тогда второй член в ω, зависящий от градиентов поля, естественно, обращается в нуль и для ω имеем: $\omega = \mu e\, {}^{H_\parallel}/_{\varepsilon}$. В выражении для $\vec{\zeta}(t)$ существенно новое по сравнению с (20) состоит в том, что незатухающая часть появляется и в компоненте ζ_1, так что асимптотически получается вектор, расположенный в плоскости 1,3 и повернутый от оси $\vec{e}_3$ на угол $\sim {}^{\omega}/_{\Omega} = {}^{H_\parallel}/_{\gamma H_\perp}$. Движение по винтовой линии можно получить из кругового преобразованием Лоренца вдоль магнитного поля. Так как $-\vec{\zeta}^2 = S^2$ — квадрат 4-х вектора спина, то степень поляризации частиц (измеряемая $|\vec{\zeta}|$) должна быть одинаковой в обоих этих случаях. Этот же результат следует, естественно, и из решения системы (19), если учесть, что при выводе уравнения (18) в части его, перед которой стоит множитель ${}^{1}/_{T}$ были опущены члены $\sim {}^{1}/_{\gamma^2}$ по сравнению с удержанными; роль этих членов сводится только к изменению $\zeta_3^{as.}$ и, следовательно, степени поляризации на величину $\sim {}^{1}/_{\gamma^2}$.

В неоднородном поле обычно можно пренебречь первым членом в ω по сравнению со вторым; степень поляризации, вообще говоря, меняется (по сравнению со случаем однородного поля), т.к. в игру вступает конкретный физический механизм — наличие реальных градиентов поля. Это изменение может быть найдено, если ${}^{\omega}/_{\Omega} \gg {}^{1}/_{\gamma}$; в противном случае коэффициенты в (18) при ${}^{1}/_{T}$ имеют недостаточную точность (впрочем тогда поправки к степени поляризации пренебрежимо малы: $\sim {}^{1}/_{\gamma^2}$).

Рассмотрим далее практически интересный случай неоднородного поля, когда орбита частицы незначительно отличается от плоской круговой. Тогда отношение частот ${}^{\omega}/_{\Omega}$ оказывается малым, именно: порядка размеров отклонения от плоской круговой орбиты к её среднему радиусу. Система (19) решалась приближениями по этому малому параметру. В линейном приближении для компонент спина получаются следующие выражения:

$$\zeta_+(t) = e^{g(t)}\left[\zeta_+(0) + i\int_0^t \omega(\tau)\zeta_3^{(0)}(\tau)\,e^{-g(\tau)}\,d\tau\right]$$

$$\zeta_3(t) = \zeta_3^{(0)}(t) - e^{-\int_0^t \frac{d\tau}{T}}\,\mathrm{Im}\,\zeta_+(0)\int_0^t \omega(\tau)\,e^{f(\tau)}\,d\tau \qquad (21)$$

здесь

$$\zeta_+(t) = \zeta_1(t) + i\zeta_2(t); \quad \zeta_3^{(0)}(t) = -{}^{8}/_{5\sqrt{3}} + \left(\zeta_3(0) + \frac{8}{5\sqrt{3}}\right)e^{-\int_0^t \frac{d\tau}{T}}$$

$$g(t)=\int_0^t\left(-\frac{8}{9}\frac{1}{T}+i\Omega\right)d\tau\ ;\quad f(t)=g(t)+\int_0^t\frac{d\tau}{T}$$

Отличие от случая однородного поля состоит в том, что в ζ_1 и ζ_2 появляются незатухающие члены малой ($\sim\omega/\Omega$) амплитуды; в ζ_3 есть затухающий член, линейный по ω/Ω. Незатухающая поправка к ζ_3 появляется только в следующем приближении, она имеет вид:

$$\Delta\zeta_3 = {}^{8}/_{5\sqrt{3}}\, e^{-\int_0^t\frac{d\tau}{T}}\,\mathrm{Re}\int_0^t d\tau\,\omega(\tau)e^{f(\tau)}\int_0^\tau d\tau_1\,\omega(\tau_1)e^{-g(\tau_1)} \tag{22}$$

В конкретном случае конфигурация поля определяет закон движения частицы, который и задаёт зависимость от времени функций $\Omega(t)$, $\omega(t)$ и $T(t)$. После вычисления интегралов, входящих в (21), (22), находим искомое поведение спина.

Выпишем для иллюстрации асимптотический вид решения для вектора спина в случае, когда частица совершает малые колебания в аксиально-симметричном магнитном поле с показателем неоднородности n.

$$\zeta_1^{as} = -\frac{8}{5\sqrt{3}}\frac{z_0}{R}\gamma\mu\,\frac{n^{3/2}}{n-(\gamma\mu)^2}\sin\sqrt{n}\,\omega_0 t$$

$$\zeta_2^{as} = \frac{8}{5\sqrt{3}}\frac{z_0}{R}\,\frac{n^2}{n-(\gamma\mu)^2}\cos\sqrt{n}\,\omega_0 t \tag{23}$$

$$\zeta_3^{as} = -\,{}^{8}/_{5\sqrt{3}} + {}^{2}/_{5\sqrt{3}}\left(\frac{z_0}{R}\right)^2\frac{n^3}{n-(\gamma\mu)^2}\cos 2\sqrt{n}\,\omega_0 t$$

Здесь $\omega_0 = 1/R$; R – равновесный радиус; z_0 – амплитуда вертикальных колебаний.

Приложение А.

Вычисление $\langle t_0|\mathrm{Re}\,T_2|t_0\rangle$.

В представлении взаимодействия в картине Фарри матрица рассеяния формально имеет тот же вид, что и в квантовой электродинамике свободных частиц

$$R(t,t_0) = T\exp\left\{-ie\int_{t_0}^t dt\int d^3x\,\bar{\Psi}_F(x)\gamma^\mu\Psi_F(x)A_\mu(x)\right\} \tag{A.1}$$

где $\Psi_F(x)$ оператор электрон-позитронного поля в заданном внешнем поле. По-прежнему имеет место теорема Вика. Для разложения T произведений в сумму нормальных произведений, однако свертка фермионных операторов будет теперь функцией Грина в заданном поле. Поскольку мы вычисляем среднее от $\mathrm{Re}\,T_2$ между одноэлектронными состояниями, то ясно, что фотонные операторы должны быть свернуты, т.е. мы имеем дело с диаграммой собственной энергии. Выпишем среднее от $R_2(t,t_0)$ по одноэлектронным состояниям. Из сказанного выше следует

$$\langle p|R_2(t,t_0)|p\rangle = ie^2\int d^4x\int d^4x'\,\varphi_p^+(x)\bar{u}_s(p)\gamma^\mu G(x,x')\gamma^\nu D_{\mu\nu}(x-x')u_s(p)\varphi_p(x) \tag{A.2}$$

Здесь $G(x,x')$ – функция Грина электрона в электромагнитном поле, $D_{\mu\nu}(x-x')$ – пропагатор фотона. В формуле (А.2) мы воспользовались также квазиклассическим представлением для $|p\rangle$ (см. [4]).

Явный вид функции Грина $G(x,x')$ найден в [6] в линейном по полю приближении. Подставляя эту функцию Грина в (А.2) имеем

$$\langle p|R_2(t,t_0)|p\rangle = \frac{e^2}{(4\pi)^2}\int_{t_0}^t dt\int d^3x\,\varphi_p^+(x)\bar{u}_s(p)\left\{\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}\int_0^s dw\,e^{-im^2(s-w)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[2m\left(2-\frac{w}{s}\right)-2mw\left(1-\frac{w}{s}\right)\frac{ie}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\right\}u_s(p)\varphi_p(x) \tag{A.3}$$

Воспользовавшись явным видом $u(p)$ из [4], можно переписать это выражение в двухкомпонентном виде. Тогда с учётом того, что

$$\int d^3x\,(\Phi^+ \ldots \Phi) = \langle i | \ldots | i \rangle \ ; \ |t_0\rangle = \varphi | i \rangle \tag{A.4}$$

где φ – двухкомпонентный спинор имеем

$$\langle p | R_2(t,t_0) | p \rangle = \langle t_0 | T_2 | t_0 \rangle = \int_{t_0}^{t} dt \langle t_0 | a - \frac{\mu e}{2\varepsilon}(\vec{H}_R \vec{\sigma}) | t_0 \rangle \tag{A.5}$$

где [6]

$$a = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{m^2}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\int_0^1 du\,(1+u)\,e^{-m^2 us} \tag{A.6}$$

$$\mu = im^2\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\infty ds\int_0^s \frac{dw}{s}\cdot\frac{w}{s}\left(1-\frac{w}{s}\right)\exp\left[-im^2(s-w)\right] = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{A.7}$$

$\vec{H}_R$ определено в (14). Итак, в линейном по внешнему полю приближении, матрица T_2 является эрмитовой.

Литература

1. А.А.Соколов, И.М.Тернов. ДАН. СССР, 153, 1052, 1963.
2. V.N.Baier, V.M.Katkov Phys.Lett. 24A, 327, 1967.
3. В.Н.Байер, В.М.Катков, ЖЭТФ, 52, 1422, 1967.
4. В.Н.Байер, В.М.Катков. ЖЭТФ, 53, 1478, 1967.
5. D.Fradkin, R.Good. Rev.Mod.Phys. 33, 343, 1961
6. J.Schwinger. Phys.Rev. 82, 664, 1951.
7. E.Storck. Z.Naturforsch. 23a, 1914, 1968

Ответственный за выпуск В.С.Фадин
Подписано к печати 20 октября 1969г.
Усл. 0,7 печ.л., тираж 250 экз.
Заказ № 333 , бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР.