

40
И Н С Т И Т У Т
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р

ПРЕПРИНТ 354

Б.Н.Брейзман, В.Ц.Гурович, В.П.Соколов

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ
КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Новосибирск

1969

Б.Н.Брейзман, В.Ц.Гурович, В.П.Соколов

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается однородная и изотропная космологическая модель. Исследуется возможность построения регулярных решений уравнений гравитации при наличии нелинейной добавки по четырехкривизне к лагранжевой плотности гравитационного поля.

В случае, когда лагранжева плотность имеет вид:

$$L = A(R + \alpha R^{4/3})$$

, найдено точное решение, не содержащее особенности. При соответствующем выборе постоянных интегрирования указанное решение асимптотически переходит в решение Фридмана.

1. Введение

Характерной чертой существующих космологических моделей является их ограниченность во времени, обусловленная наличием сингулярности в пространственно-временной метрике. Первоначально происхождение этой сингулярности связывалось с предположением об однородности и изотропии рассматриваемых моделей. Однако последние работы /1-3/ приводят к выводу о том, что не исключено наличие особенности даже в общем решении уравнений Эйнштейна, т.е. в метрике произвольной /неоднородной и анизотропной/ модели вселенной.

В связи с этим интересные возможности открывает работа А.Д.Сахарова /4/, где приведены физические доводы в пользу существования нелинейных по четырехкривизне добавок к лагранжевой плотности гравитационного поля. Соответствующие уравнения гравитации имеют более высокий порядок, чем уравнения Эйнштейна, и могли бы содержать космологические решения с регулярным переходом от сжатия к расширению. Такая возможность была отмечена Я.Б.Зельдовичем и И.Д.Новиковым /5/ и детально исследована Т.В. и А.А.Рузмайкиными в работе /6/ для конкретного вида лагранжевой плотности гравитационного поля, предложенного в /4/.

$$L(R) = L(0) + AR + BR^2 + CR_{ik}R^{ik} + DR_{ikem}R^{ikem} + ER_{ikem}R^{ikem} \quad (1)$$

Было показано, что в случае однородной и изотропной модели вселенной с плоским сопутствующим пространством квадратичная добавка в L позволяет устранить сингулярность в момент максимального сжатия /при $t = 0$ /. Однако решение, регулярное в точке $t = 0$, приводит к расходимости R либо при $t \rightarrow +\infty$, либо при $t \rightarrow -\infty$. Таким образом в рамках сделанных в /6/ предположений не существует регулярного при всех значениях t решения уравнений гравитации, соответствующих лагранжевой плотности (1). Вместе с тем остаётся открытым вопрос о возможности построения такого L , при котором уравнения гравитации допускают регулярное космологическое решение, переходящее во фридмановское при $t \rightarrow \infty$.

В настоящей работе приводится пример лагранжевой плотности с указанными свойствами и получены точные решения, отвечающие однородной и изотропной модели вселенной.

2. Основные уравнения

Рассмотрим действие для гравитационного поля в виде:

$$S_g = A \int [R + e^{-2} f(R)] \sqrt{-g} d\Omega \quad (2)$$

где $f(R)$ — некоторая функция от скалярной кривизны, e — характерная длина. Варьирование выражения (2) совместно с действием для материи даёт следующие уравнения гравитации, переходящие в уравнения Эйнштейна в случае $f \equiv 0$:

$$R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R + e^{-2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial R} R_i^k - \frac{1}{2} f \delta_i^k + (\delta_i^m g^{mn} - \delta_i^m g^{kn}) \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)_{;m;n} \right\} = \kappa T_i^k \quad (3)$$

Используя тождество Бианки и правило перестановки значков ковариантного дифференцирования, нетрудно показать, что соотношения (3) содержат уравнения движения для материи

$$T_{i;k}^k = 0 \quad (4)$$

Мы исследуем уравнения (3) для случая однородной и изотропной модели вселенной с плоским сопутствующим пространством

$$ds^2 = d\tau^2 - b^2(\tau) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5)$$

где $\tau = ct$. Вещество будем описывать уравнением состояния

$$p = \epsilon/3 \quad (6)$$

При выбранной метрике в системе (3) имеется всего два независимых уравнения ($i = k = 1, i = k = 0$). Вместо первого из них удобно воспользоваться известным интегралом уравнений движения

$$\kappa \epsilon = 3b^{-4} e_1^{-2} \quad (7)$$

(e_1 — постоянная интегрирования). Тогда второе ($i = k = 0$) определяет зависимость $b(\tau)$

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R + e^{-2} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial R} R_0^0 - \frac{1}{2} f \right) + \frac{3\dot{b}}{b} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \right\} = 3b^{-4} e_1^{-2} \quad (8)$$

$$R_0^0 = -3\ddot{b}/b, \quad R = -6 \left(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} \right), \quad \dot{b} = \frac{db}{d\tau} \quad (9)$$

Уравнение (8) допускает понижение порядка, если ввести вместо $b(\tau)$ новую неизвестную функцию

$$y = e_1^2 b^2 \dot{b}^2, \quad (10)$$

а в качестве независимой переменной выбрать b . Замечая, что в новых переменных

$$R = e_1^{-2} \rho = e_1^{-2} (-3b^{-3} y'), \quad (11)$$

где $y' = \frac{dy}{db}$, из (8) получим

$$y + \left(\frac{e_1}{e} \right)^2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \rho} \left(y - \frac{b}{2} y' \right) - \frac{b^4}{6} f + y b \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \right\} = 1 \quad (12)$$

Последнее соотношение может быть записано также в виде уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{db} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \left(\frac{e_1}{e} \right)^2 b^4 y^{-1/2} f + b (y^{1/2} + y^{-1/2}), \quad (14)$$

где:

$$f = f(-3b^{-3} y') = f(\rho)$$

В соответствии со сказанным во введении будем искать решения системы (10), (12), описывающие непрерывный переход от

сжатия к расширению в момент $\tau = 0$. Другими словами, функция $b(\tau)$ должна в указанной точке иметь регулярный минимум:

$$b(\tau) = b_0 + \ddot{b}_0 \frac{\tau^2}{2} + \dddot{b}_0 \frac{\tau^3}{6} + \dots \quad (15)$$

Это позволяет сформулировать граничные условия для уравнения (12) в точке $b = b_0$. Предварительно заметим, что из-за немонотонности функции $b(\tau)$ однозначной зависимости $y(\tau)$ соответствует двузначная зависимость $y(b)$.

$$y[b(\tau)] = \begin{cases} y_+(b) & \tau > 0 \\ y_-(b) & \tau < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Граничные условия для y_+ и y_- в точке $b = b_0$ вытекают из уравнения (10) и формулы (15) и имеют вид:

$$y_+(b_0) = y_-(b_0) = 0$$

$$(y'_+)'_{b=b_0} = (y'_-)'_{b=b_0} = 2l_1^2 b_0^2 \ddot{b}_0$$

$$\lim_{b \rightarrow b_0} (y_+^{1/2} y_+''') = - \lim_{b \rightarrow b_0} (y_-^{1/2} y_-''') = 2l_1^3 b_0^3 \dddot{b}_0 \quad (17)$$

Согласно формулам (17) в точке $b = b_0$ член, содержащий старшую производную в уравнении (12) обращается в нуль, т.е. имеется однозначная связь между y'_\pm и b_0 или, что то же самое, между \dot{b}_0 и b_0 .

$$\left(\frac{1}{2} b y'_\pm \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{b^4}{6} f + l_1^2 l_1^{-2} \right)_{b=b_0} = 0 \quad (18)$$

Именно этим обстоятельством вызвана необходимость задания третьей производной \ddot{b}_0 в точке $\tau = 0$ для уравнения третьего порядка (8).

Задача теперь состоит в определении вида функции f , при

котором существует решение уравнения (12) с граничными условиями (17), не приводящее к особенностям в физических величинах при всех значениях τ (включая $\tau = \pm \infty$).

3. Регулярное космологическое решение

В этом разделе остановимся подробнее на исследовании уравнения (12) со степенной зависимостью $f(R)$.

$$f(R) = \lambda R^n, \quad \lambda = l^{2n} \quad (19)$$

Мы выбираем здесь $\lambda > 0$, т.к. в противном случае не удастся удовлетворить граничным условиям (17) на функцию y_\pm в точке $b = b_0$. Выпишем лагранжиан (14) и следующее из него уравнение (13), воспользовавшись формулой (19) для f :

$$\mathcal{L} = \gamma b^{4-3n} y^{-1/2} (y')^n - 2(y^{1/2} + y^{-1/2}) \quad (20)$$

$$y + \frac{\gamma}{6^2} \left(\frac{y'}{6^3} \right)^{n-2} \left\{ n(n-1) y y'' + \frac{(1-n)}{2} (y')^2 + n(4-3n) \frac{y y'}{6} \right\} = 1 \quad (21)$$

$$\gamma = (-3)^{n-1} \left(\frac{l}{l_1} \right)^{2n-2} \quad (22)$$

При $n = 4/3$ удастся найти точное решение этого уравнения и построить космологическую модель с указанными во введении свойствами. Действительно, в случае $n = 4/3$ лагранжиан (20) не зависит явно от "времени" b и, следовательно, у уравнения (21) имеется интеграл "энергии", который запишем в виде

$$(y'_+)^{4/3} = (8\beta)^{4/3} (y_+ + 2c_+ y_+^{1/2} + 1), \quad \beta^2 = \frac{3\sqrt{2}}{32} \frac{l_1}{l} \quad (23)$$

x) Такая нелинейная добавка к лагранжевой плотности гравитационного поля в пустоте рассматривалась ранее в работе [7] с целью выяснения возможности предельного перехода к закону Ньютона.

Входящая сюда постоянная C_+ согласно граничным условиям (17) определяется величинами b_0 и \dot{b}_0 :

$$C_+ = \frac{1}{24\beta^2} (\dot{b}_0)^3 \ddot{b}_0 \quad (24)$$

Решения уравнения (23), отвечающие различным значениям константы C_+ , изображены на рис.1. График функции y_- при тех же "начальных" условиях получается путем замены C_+ на $C_- = -C_+$ в формуле (23). Как видно из рисунка, в зависимости от значения C_+ имеется три качественно различных вида решений y_+ , выходящих из точки $b = b_0, y = 0$ с совпадающими производными.

1. При $C_+ > -1$ решения неограниченно растут с ростом b согласно асимптотике

$$y_+ = (2\beta b)^4 \{1 - O(b^{-2})\} \quad (b \rightarrow \infty) \quad (25)$$

Это соответствует (см. формулу (11)) стремлению скалярной кривизны R к постоянному отрицательному значению

$$R = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 \ell^{-2} \quad (26)$$

2. При $C_+ = -1$ функция асимптотически приближается к единице, т.е. решение с ростом b переходит во фридмановское

$$y = \ell_1^2 b^2 \dot{b}^2 = 1, \quad b = \sqrt{2\ell_1^{-1}\tau} \quad |8|.$$

3. Если $C_+ < -1$, то, решение, пройдя через максимум ($y_{\max} < 1$) вновь обращается в нуль при некотором $b = b_2$

4. Наконец, в случае, когда корни квадратного трехчлена в (23) действительны, уравнение (23) имеет особые решения

$$y_+ = (-C_+ \pm \sqrt{C_+^2 - 1})^2, \quad |C_+| > 1 \quad (27)$$

Рассмотрим в первую очередь космологическую модель, переходящую во фридмановскую при $\tau \rightarrow \infty$. Такое решение существует (см. пункт 2) при $C_+ = -1$. Проследим качественно за поведением этой модели на всем промежутке изменения τ от $-\infty$ до $+\infty$. При $\tau < 0$ решение определяется константой $C_- = -C_+ = 1$, т.е. описывается кривой типа 1. Это решение при

$\tau \rightarrow -\infty$ ($b \rightarrow \infty$) согласно формуле (26) эквивалентно решению Фридмана с космологической постоянной $\Lambda = -2(3/4)^3 \ell^{-2}$. С ростом τ от $-\infty$ до $\tau = 0$ решение y_- подходит к точке максимального сжатия (см. рис.1). Затем при изменении τ от 0 до $+\infty$ решение y_+ выходит из этой точки по кривой типа 2, асимптотически приближаясь к единице

$$y_+ = 1 - (2\beta^2 b^2)^{-1} \quad (b \rightarrow \infty) \quad (28)$$

Не представляет труда также получить из уравнений (23) и (7) точный вид зависимостей $y_{\pm}(b)$ и $b(\tau)$.

$$(1 \mp y_{\pm}^{1/2})^{1/2} + (1 \mp y_{\pm}^{1/2})^{-1/2} = 2\beta(b - b_0) + 2, \quad (29)$$

$$\pm (b^2 - b_0^2) + \beta^{-2} \{ [\beta(b - b_0) - 1] [\beta^2(b - b_0)^2 + 2\beta(b - b_0)]^{1/2} +$$

$$\text{Arch} [\beta(b - b_0) + 1] \} = 4\tau \ell_1^{-1} \quad (30)$$

Здесь для положительных и отрицательных τ выбираются верхний и нижний знаки соответственно. График $b(\tau)$ изображен на рис.2а. Константы b_0 и ℓ_1 в формулах (29) и (30) связаны с плотностью энергии в точке максимального сжатия ϵ_0 соотношением (7). Таким образом при заданной величине ϵ_0 решение $b(\tau)$ определено с точностью до произвольной постоянной, которая, как и в решении Фридмана, соответствует произволу в выборе масштаба b и поэтому не входит в соотношения между наблюдаемыми величинами²⁾.

Заметим, что решение, переходящее во фридмановское при $\tau \rightarrow \infty$, как видно из рисунка, не симметрично относительно изменения знака времени. Космологическая модель, обладающая такой симметрией, получается, если выбрать $C_+ = -C_- = 0$, соответственно $\dot{b}_0 = 0$.

2) В отличие от решения Фридмана, где плотность энергии определяется лишь мировыми константами и временем $\xi = 3(\lambda\tau^2)^{-1}$ в рассматриваемом решении она зависит также и от ϵ_0 , влияние которого на $\xi(\tau)$ исчезает лишь асимптотически при $\tau \rightarrow \infty$.

$$y = [2\beta(b-b_0) + 1]^4 - 1 \quad (31)$$

Соответствующий вид зависимости $b(\tau)$ качественно приведен на рис.26. При $|\tau| \rightarrow \infty$ это решение переходит в решение Фридмана с Λ -членом, совпадающим по величине с вычисленным ранее.

Оба исследованные выше решения непрерывны вместе со всеми своими производными по τ . Помимо них имеется еще целый ряд регулярных космологических решений с $C_+ > -1$. Все эти решения, несмотря на более сложную зависимость $y_{\pm}(b)$, качественно подобны рассмотренным и поэтому здесь не приводятся.

Пусть теперь начальные условия таковы, что функция y_+ относится к типу 3. Тогда не существует регулярного при всех значениях τ решения, поскольку аналитическое продолжение решения за точку $b = b_2$ (см.рис.3а) при некотором $\tau = \tau_0$ неминуемо приведет к особенности ($b(\tau) \sim \sqrt{\tau - \tau_0}$). Однако в рассматриваемом случае удаётся построить физически разумное решение, если отказаться от непрерывности высоких производных $b(\tau)$. Используем для этого функцию y_+ "сшивку" из решений типа 3 и 4 в максимуме кривой 3, как это показано на рис.3б. В точке сшивки согласно формуле (23) равны нулю три первые производные по b , а $d^4 y_+ / db^4$ испытывает конечный скачок. Как следует из определения (10), это эквивалентно скачку лишь пятой производной $b^{(5)}$. Поскольку исходная система для $b(\tau)$ четвертого порядка, то речь идёт о точном решении уравнений гравитации. Такие решения существуют для всех случаев типа 3 и означают выход на решение Фридмана при конечном τ . При $\tau < 0$ эти решения описываются решениями типа 1,3)

Таким образом, нелинейная добавка $f = \alpha R^{4/3}$ в лагранжиане плотности гравитационного поля позволяет построить космологические модели без особенности при всех значениях τ . Покажем, что приведенное выражение для f в этом смысле не является единственным. Действительно, даже при степенном виде нелинейной добавки: $f = \alpha R^n$ существует интервал значений n . Укажем, что построение указанных решений возможно благодаря тому, что точка сшивки является точкой ветвления решений уравнения. Последняя возникает вследствие неаналитичности нелинейной добавки $f = \alpha R^{4/3}$ при $R = 0$.

чений n , для которых уравнение (21) допускает решения качественно подобные разобранным выше.

Для определения этого интервала потребуем, чтобы уравнение (21) допускало решения, растущие при $b \rightarrow \infty$ не быстрее, чем асимптотика (25) для $n = 4/3$. (В противном случае согласно формуле будет расходиться скалярная кривизна R). Это приводит к ограничению сверху на степень n в (19): $n < 2$. Нижняя граница может быть найдена из условия, чтобы уравнение допускало решения, асимптотически стремящиеся к фридмановскому по степенному закону, аналогичному случаю для $n = 4/3$

$$y = 1 - Ab^{-a} \quad (32)$$

Здесь a и A имеют вид:

$$a = 4 \frac{n-1}{2-n}, \quad A = \left[\frac{2-n}{(5n-6)na^{n-1}|y|} \right]^{\frac{1}{n-2}} \quad (33)$$

что даёт необходимые условия существования указанных асимптотик

$$6/5 < n < 2 \quad (34)$$

Расчеты на ЭВМ показали качественное сходство решений в интервале (34) с рассмотренными выше решениями, а верхняя граница для n подтверждается результатом работы [6], где расходящееся при $b \rightarrow \infty$ решение растёт быстрее, чем b^4 и приводит к расходимости R .

Авторы благодарны Р.З.Сагдееву, А.Д.Сахарову, Я.Б.Зельдовичу за внимание к работе, А.Г.Дорошкевичу, И.Д.Новикову, Т.В. и А.А.Рузмайкиным за обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. R. Penrose Phys. Rev. Lett. - 14, 57, 1965
2. В.А.Белинский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 56, 1700, 1969.
3. В.А.Белинский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 57, 2163, 1969.
4. А.Д.Сахаров, ДАН СССР 177, 1, 1967.
5. Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Релятивистская астрофизика. Изд.Наука. 1967, Дополнение 1.
6. Т.В.Рузмайкина, А.А.Рузмайкин. ЖЭТФ, 57, 681, 1969.
7. Н.М.Полиевктов-Николадзе. ЖЭТФ, 52, 1360, 1967.
8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля, Изд.Наука, 1967.

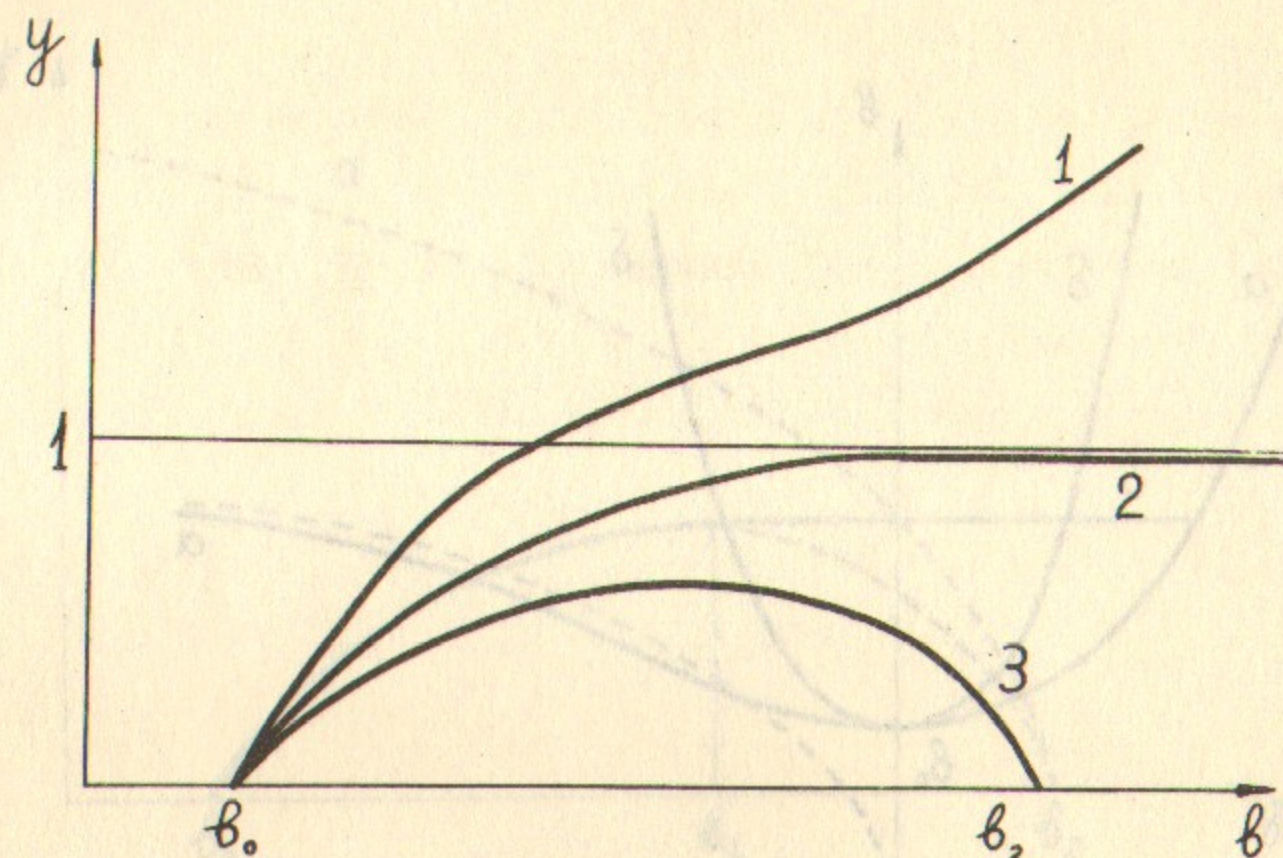


Рис.1. Типы решений $y_+(b)$ в зависимости от константы C_+ : 1 - $C_+ > -1$, 2 - $C_+ = -1$, 3 - $C_+ < -1$.

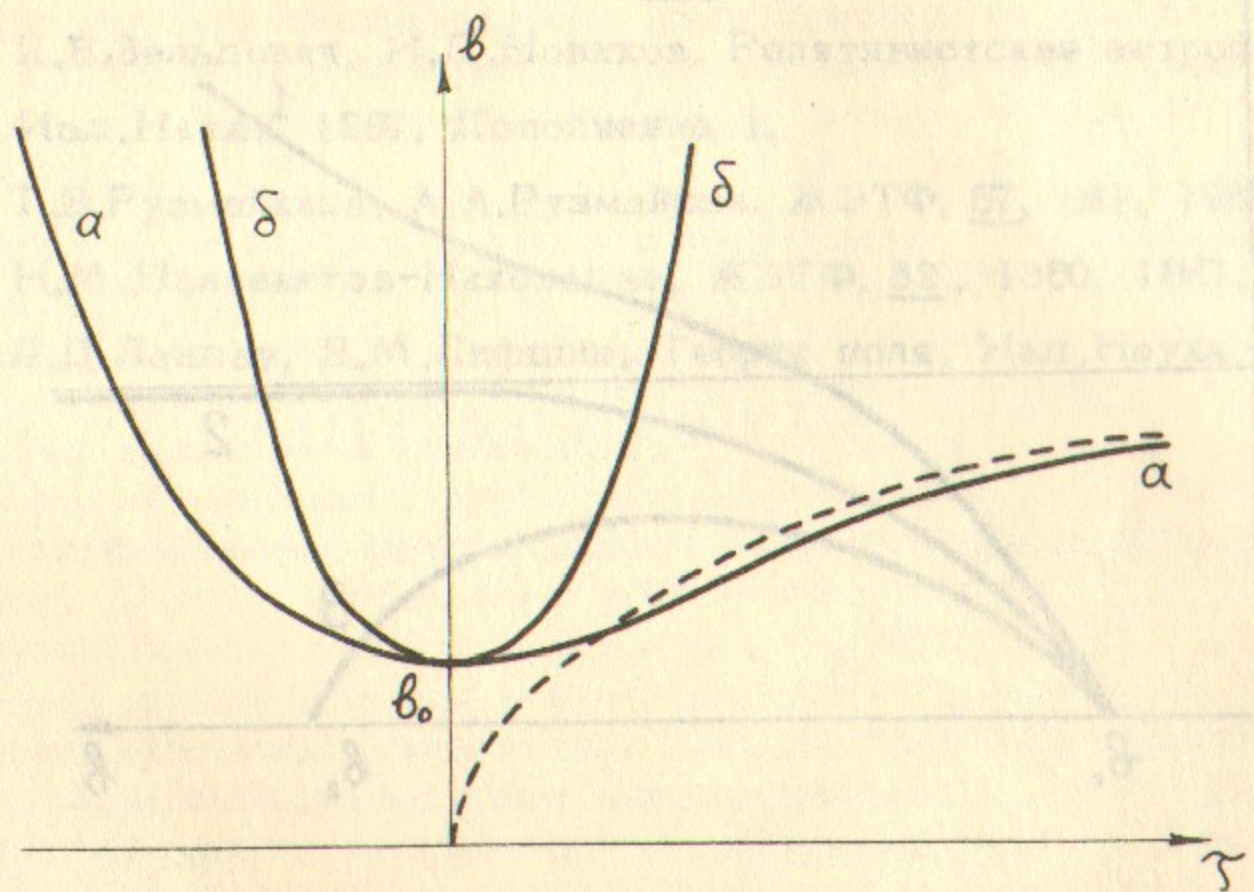


Рис.2. Зависимость $b(\tau)$: а - решение, переходящее во фридмановское при $\tau \rightarrow +\infty$, б - симметричное по времени космологическое решение. (Пунктиром показано решение Фридмана).

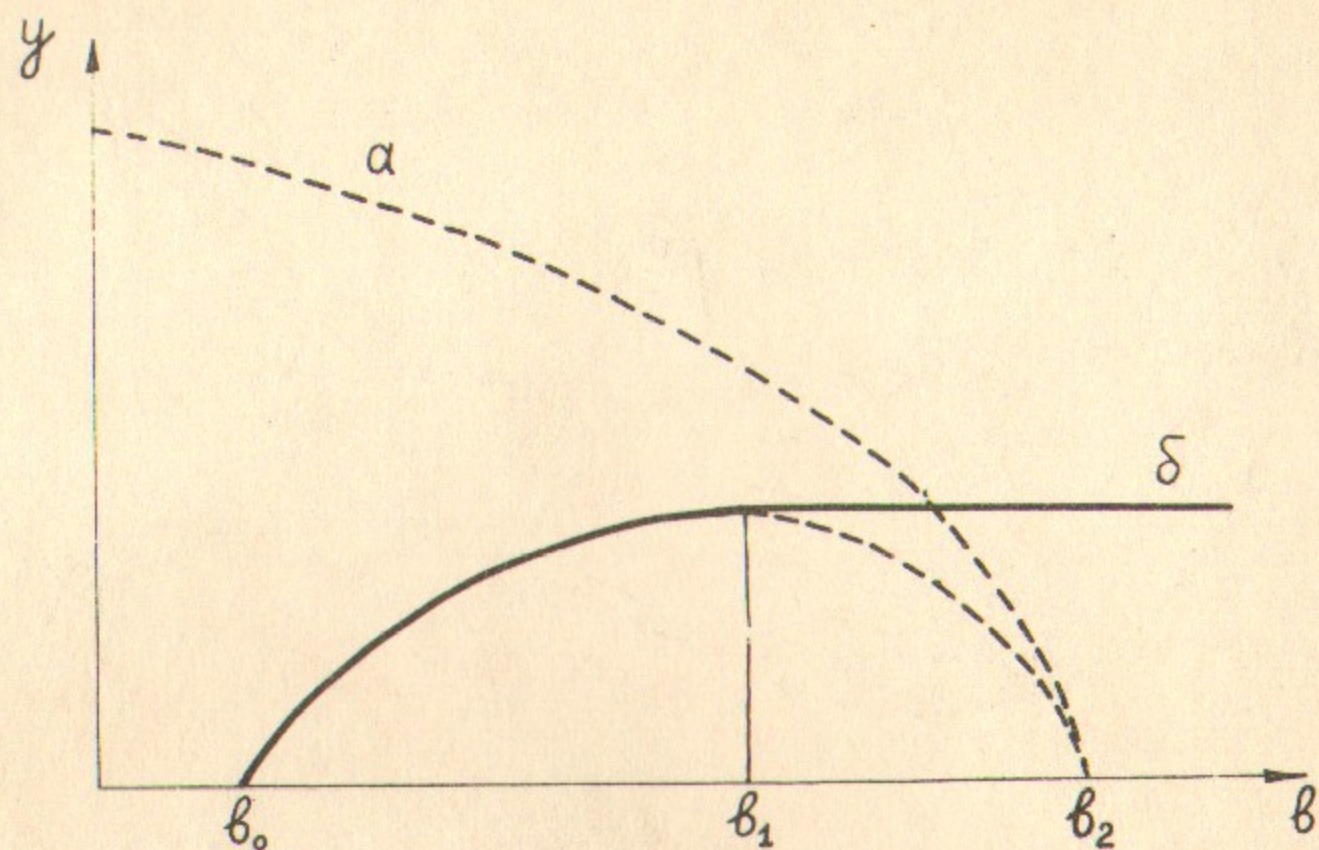


Рис.3. Решение $y_+(b)$, полученное сшивкой решений типа 3 и 4 в точке b_1 . (Пунктиром показано решение типа 3, аналитически продолженное за точку b_2).

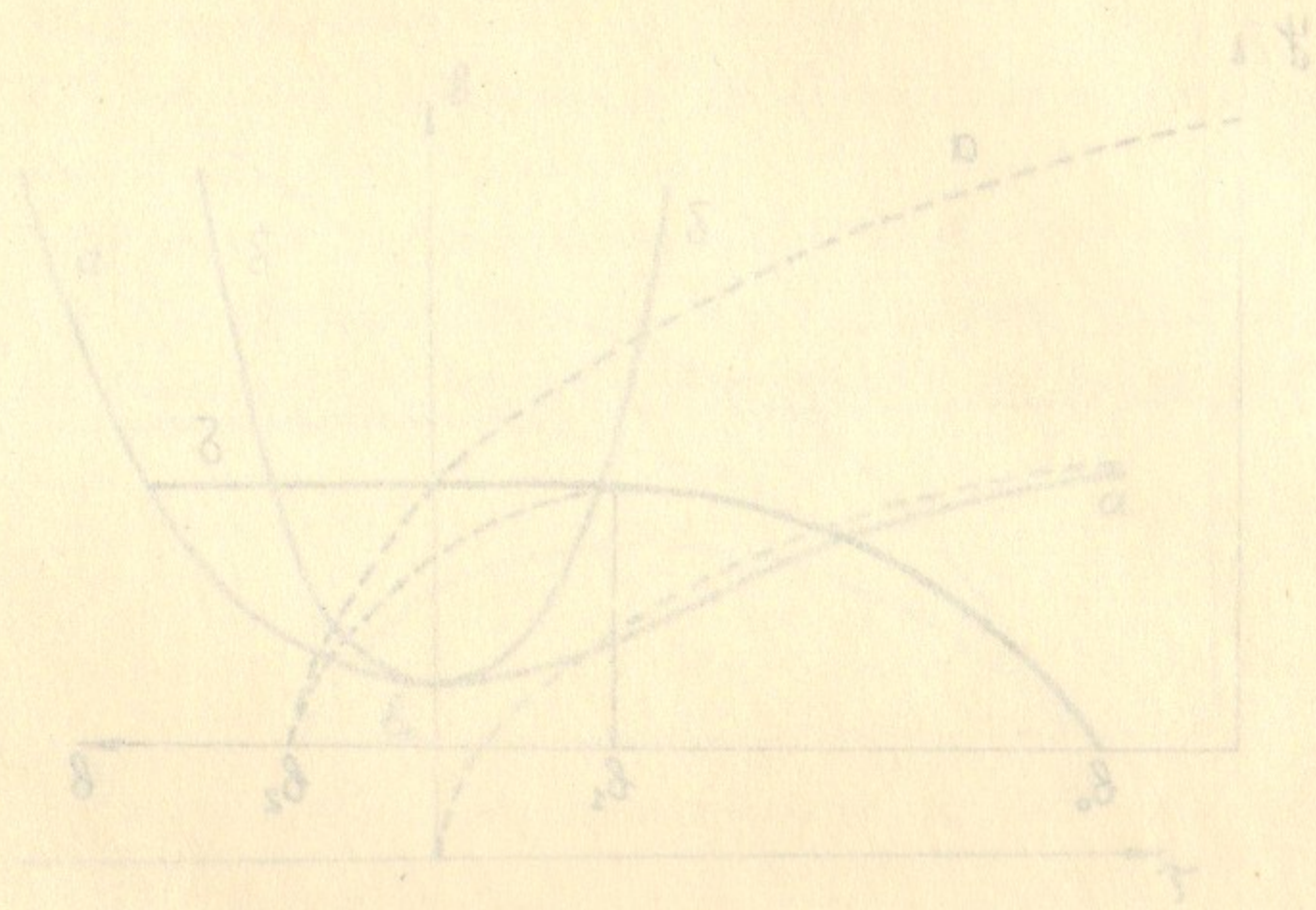


Рис. 3. Решение задачи (3) методом Фурье. (3) - решение задачи (3) методом Фурье. (4) - решение задачи (3) методом Фурье. (5) - решение задачи (3) методом Фурье. (6) - решение задачи (3) методом Фурье.

Ответственный за выпуск В.П.Соколов

Подписано к печати 4.1.70.

Усл. 0,7 печ.л., тираж 250 экз.

Заказ № 354, бесплатно

Отпечатано на ротапинтере в ИЯФ СО АН СССР.