

П.54

26

**И Н С Т И Т У Т  
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН С С С Р**

**И Я Ф 50 - 70**

**В.Л.Поляченко, А.М.Фридман**

**МНОГОРУКАВНЫЕ СПИРАЛИ В ДИСКОВОЙ  
МОДЕЛИ ГАЛАКТИКИ**

**Новосибирск**

**1970**



# МНОГОРУКАВНЫЕ СПИРАЛИ В ДИСКОВОЙ МОДЕЛИ ГАЛАКТИКИ

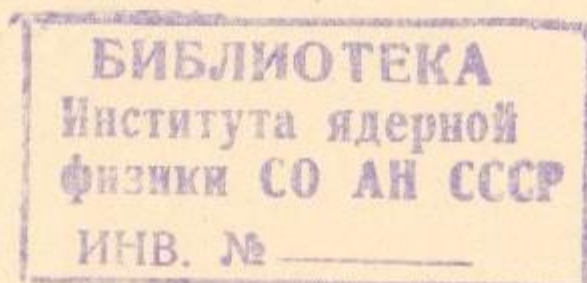
В.Л.Поляченко, А.М.Фридман

## А Н Н О Т А Ц И Я

Предлагается модель плоской галактики в виде моногенного вращающегося тонкого диска с тепловым разбросом частиц в плоскости вращения. По-видимому, эта модель соответствует случаю, когда относительная масса сферической и эллиптической подсистем мала.

Найдены точные решения (при наблюдаемых условиях вращения) интегрального уравнения, описывающего стационарное состояние диска в случае отсутствия теплового разброса. С учётом последнего исследуется устойчивость стационарных состояний. Показано, что имеет место неустойчивость Джинсовского типа, инкремент которой растёт с ростом азимутального числа  $m$ . Этот результат качественно отличается от известного результата Тоотце /10/, ошибка которого явилась следствием игнорирования функциональной зависимости от радиуса плотности системы и угловой скорости её вращения.

Не исключено, что полученный здесь результат поясняет наблюдательный факт наличия у некоторых плоских подсистем галактик сильно расчлененной спиральной структуры /11/.





MULTIPLE-ARMED SPIRALS IN DISK GALACTIC  
MODEL.

V. L. POLYACHENKO, A. M. FRIDMAN.

ABSTRACT.

The monogenic, rotating, thin disk with thermal motions of particles in the plane of rotation as a model of flat galactics is proposed. Apparently this model is valid, when the masses of the spherical and elliptical subsystems are comparatively small.

The exact solutions ( for the observed conditions of rotation) of the integral equation, describing the stationary state of the galactic disk at the absence of thermal motions, is obtained. With account the latter the stability of stationary states is investigated. It is shown that the unstability of Jeans take place, with a growth rate, which increases with an azimuthal number  $m$ . This result differs from the



known result of Toomre /10/ qualitatively. Toomre was mistakenly ignoring the functional dependence of the system's density and angular velocity on the radius. It is possible that the result, obtained here, make clear the observed fact of the existence of galactics with a very divided spiral structure/11/.

1. Как уже отмечалось в работе /1/, корректный учёт стационарного состояния в задачах устойчивости гравитирующих систем, как правило, приводит к стабилизации Джинсовской неустойчивости, развивающейся при отсутствии равновесия /2-7/.

Знание равновесного состояния для вращающихся систем сводится к определению функциональной зависимости между плотностью системы  $\rho$  и угловой скоростью вращения  $\Omega$ , т.е.

$\rho = \rho(\Omega)$ . Если для цилиндра эта зависимость определяется элементарно, то для плоских систем определение  $\rho(\Omega)$  связано (даже в простейшем случае) с решением интегрального уравнения Шлёмилха /8, 9/.

В следующем пункте приведены некоторые решения уравнения равновесия вращающегося гравитирующего диска. Используя одно из них, в п.3 получена неустойчивость вращающегося газового диска, инкремент которой растет с ростом азимутального числа  $m$  (возмущения выбираются в виде  $\sim \exp(im\psi)$ ). Этот результат качественно отличается от результата, полученного Тоомре /10/, где инкремент не зависел от  $m$ . Ошибка Тоомре состояла в игнорировании явного вида функционала  $\rho(\Omega)$ , знание которого в данном случае оказывается определяющим.

В заключение обсуждается связь полученного результата с наблюдательными данными плоских галактик /11/.

2. Гидродинамическое условие равновесия гравитирующего диска, вращающегося с угловой скоростью  $\Omega_0$ , может быть в общем случае записано следующим образом:

$$\Omega_0^2 z = \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} \quad (1)$$

где  $\Psi_0$ ,  $P_0$ ,  $\rho_0$  - соответственно, невозмущенные гравитационный потенциал, давление и объемная плотность. В случае  $T_0 \equiv T_{\perp} = \text{const}$ ,  $T_{\parallel} = 0$  мы имеем вместо (1) уравнение ( $\sigma_0$  - поверхностная плотность):

$$\Omega_0^2 z = \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} + \frac{\kappa T_0}{m} \cdot \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} \quad (2)$$



В этом уравнении мы можем исключить  $\Psi_0$ , используя выражение для потенциала простого слоя

$$\Psi_0(z) = -G \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0(z') z' dz' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \varphi'}} \quad (3)$$

где  $R$  - радиус диска.

Если считать функцию  $\sigma_0(z)$  - известной, то соответствующая угловая скорость  $\Omega_0(z)$  находится из (2) элементарным вычислением. Если же, наоборот, рассматривать  $\Omega_0(z)$  как известную функцию, то уравнение (2) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно невозмущенной плотности  $\sigma_0(z)$ . Оно может быть один раз проинтегрировано по  $z$  (от 0 до  $z$ ), в результате получается следующее уравнение:

$$-G \int_0^z \int_0^{2\pi} \frac{\sigma_0(z') z' dz' d\varphi'}{\sqrt{z^2 + z'^2 - 2zz' \cos \varphi'}} + \frac{\kappa T_0}{m} \ln \frac{\sigma_0(z)}{\sigma_0(0)} = f, \quad (4)$$

где

$$f = \Psi_0(0) + f_1; \quad f_1 = \int_0^z \Omega_0^2 z dz \quad (5)$$

В случае малого градиента плотности ( $\partial \rho_0 / \partial z \ll \rho_0 \partial \Psi_0 / \partial z$ )

равновесие осуществляется в результате баланса гравитационного притяжения частиц диска и центробежной силы. Пренебрегая градиентом плотности в уравнении равновесия (2), мы приближаем условия задачи к экспериментальным оценкам параметров плоской подсистемы галактики /12/. Это не значит, однако, что градиент давления в дальнейшем вообще не будет играть никакой роли. Как мы увидим ниже (П.3), величина градиента давления входит в уравнения для возмущенных величин, умноженная на большой параметр  $\kappa$  (радиальную компоненту волнового вектора).

Интегральное уравнение, получающееся из (4) при  $T_0 \rightarrow 0$  (что соответствует  $\partial \rho_0 / \partial z \rightarrow 0$ ), может быть решено в общем виде /9/, для произвольной функции  $f(z)$ . Решение имеет вид:

$$\sigma(z) = -\frac{1}{\pi^2 G z} \cdot \frac{d}{dz} \int_z^R \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - z^2}} \cdot \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{f_1(t) t dt}{\sqrt{s^2 - t^2}} - \frac{\Psi_0(0)}{\pi^2 G \sqrt{R^2 - z^2}} \quad (6)$$

Для каждой конкретной функции  $f_1$  константа  $\Psi_0(0)$  определяется, после вычисления интеграла в (6), из условия отсутствия в  $\sigma(z)$  особенности при  $R=z$  (и соображений размерности). Проиллюстрируем это на примере твердотельного вращения, когда

$$f_1(z) = \frac{\Omega_0^2 z^2}{2}$$

Вычисление интеграла в (6) приводит здесь к следующему выражению для поверхностной плотности:

$$\sigma_0(z) = \frac{1}{\pi^2 G} \left[ \Omega_0^2 \sqrt{R^2 - z^2} - \frac{\Psi_0(0) + \frac{\Omega_0^2 z^2}{2}}{\sqrt{R^2 - z^2}} \right] \quad (7)$$

Отсюда ясно, что  $\Psi(0) = -\Omega_0^2 R^2$ , и мы получаем тогда следующий результат:

$$\sigma_0(z) = + \frac{2\Omega_0^2}{\pi^2 G} \sqrt{R^2 - z^2} \quad (8)$$

Приведем несколько примеров функций  $\sigma_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$ . Если  $\sigma_0 = \text{const}$ , то

$$\Omega_0^2(z) = -\frac{4G}{z} \sigma_0 \cdot E'(z/R) \quad (9)$$

где  $E(x)$  - полный эллиптический интеграл. Из факта наличия (логарифмической) особенности у функции  $E'(z/R)$  при  $z \rightarrow R$  нужно заключить, что невозмущенное распределение плотности  $\sigma_0(z)$  должно достаточно плавно обращаться в нуль при  $z \rightarrow R$  (см. также /12/). Для  $\sigma_0(z) =$

$\sigma_0(0) \sqrt{1 - z^2/R^2}$  получается твердотельный закон вращения с угловой скоростью:

$$\Omega_0^2 = \frac{\pi^2 G \sigma_0(0)}{2R} \quad (10)$$

Выпишем еще закон изменения  $\Omega_0(z)$  для плотности

$\sigma_0(z) = \sigma_0(0) (1 - z^2/R^2)^{3/2}$ ; он имеет следующий вид:



$$\Omega_0^2(z) = \frac{3\pi^2}{4R} G \sigma_0(z) \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{z^2}{R^2}\right) \quad (11)$$

Профиль скорости  $V_0(z) = \Omega_0(z) \cdot z$ , описываемый формулой (11), соответствует твердотельному характеру вращения при малых  $z$  и достигает максимума при  $z = R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,81R$ .

Он сравнительно хорошо описывает, например, наблюдаемое распределение скоростей звезд в Галактике (см. для сравнения /12/).

3. Итак, рассмотрим устойчивость вращающегося диска. Линеаризованные уравнения движения Эйлера в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial V_{z1}}{\partial t} + \frac{V_{\varphi 0}}{z} \cdot \frac{\partial V_{z1}}{\partial \varphi} - 2 \frac{V_{\varphi 0} V_{\varphi 1}}{z} = - \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \frac{P_1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial t} + \frac{V_{\varphi 0}}{z} \cdot \frac{\partial V_{\varphi 1}}{\partial \varphi} + \left( \frac{\partial V_{\varphi 0}}{\partial z} + \frac{V_{\varphi 0}}{z} \right) V_{z1} = - \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho_0 z} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} \quad (12)$$

Здесь невозмущенные величины отличаются от возмущенных индексом "0".

Поскольку равновесная система находится в стационарном состоянии и равновесные величины не зависят от угла, возмущенные величины  $A_1 = A_1(z, \varphi, t)$  можно представить в виде Фурье-гармоник по углу  $\varphi$  и времени  $t$ :

$$A_1(z, \varphi, t) = \tilde{A}_1(z, m, \omega) e^{-i\omega t + im\varphi} \quad (13)$$

Тогда возмущенные компоненты скорости из (12) оказываются

равными:

$$\tilde{V}_{z1} = i \frac{\xi \chi' - \frac{2m}{z} \Omega_0 \chi}{4\Omega_0^2 - \xi^2}; \quad \tilde{V}_{\varphi 1} = \frac{2\Omega_0 \chi' - \frac{m}{z} \xi \chi}{4\Omega_0^2 - \xi^2} \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\chi(z) = \tilde{\Psi}_1 + \mathcal{D}^2 \frac{\tilde{P}_1}{\rho_0}; \quad \mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad \xi = \omega - m\Omega_0 \quad (15)$$

"Штрих" означает дифференцирование по  $z$ . Подставляя (14) в уравнение непрерывности

$$-i(\omega - m\Omega_0) \rho_1 + \rho_0 \frac{\partial V_{z1}}{\partial z} + V_{z1} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_0}{z} \right) + \frac{im\rho_0 V_{\varphi 1}}{z} = 0 \quad (16)$$

найдем возмущенную величину плотности:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{4\Omega_0^2 - \xi^2} \cdot \left[ \Delta \chi + \frac{\rho_0'}{\rho_0} \left( \chi' - \frac{2m}{z} \cdot \frac{\Omega_0}{\xi} \cdot \chi \right) \right] \quad (17)$$

Дисперсионное уравнение для  $\omega = \omega(k)$  мы получим, решая уравнение (18) совместно с уравнением Пуассона

$$\Delta \Psi_1 + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} = 4\pi G \sigma_1 \cdot \delta(z) \quad (18)$$

Здесь, как и в (17),  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{m^2}{z^2}$ , однако,

$\Psi_1$  в отличие от  $\chi$  в (15), есть функция также и координаты  $z$ ;  $\delta(z)$  - дельта-функция Дирака.



Как известно, уравнение (18) вне плоскости  $Z=0$  легко решается методом разделения переменных. В результате имеем:

$$\Psi_1 = \tilde{\Psi}_1 e^{-\lambda|z|} \quad (19)$$

где  $\lambda$  — константа разделения, смысл которой определяется в дальнейшем.

Найдем теперь решение в плоскости  $Z=0$ . Для этого подставим в правую часть уравнения Пуассона выражение возмущенной плотности из (17), предварительно заменив объемную плотность на поверхностную:  $\rho_c \rightarrow \sigma_0$ ,  $\rho_1 \rightarrow \sigma_1$ .

Для случая  $\mathcal{B}=0$  получим следующее уравнение:

$$\Delta \tilde{\Psi}_1 e^{-\lambda|z|} + [\lambda^2 - 2\lambda\delta(z)] \tilde{\Psi}_1 e^{-\lambda|z|} = \frac{4\pi G \sigma_0(z) \delta(z)}{4\Omega_0^2 - \xi^2} \left[ \Delta \tilde{\Psi}_1 + \frac{\sigma_0^i}{\sigma_0} (\tilde{\Psi}_1' - \frac{2m}{z} \cdot \frac{\Omega_0}{\xi} \cdot \tilde{\Psi}_1) \right] \quad (20)$$

При написании (20) мы воспользовались тем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-\lambda|z|} = -2\delta(z)\lambda \cdot e^{-\lambda|z|} + \lambda^2 e^{-\lambda|z|} \quad (21)$$

Интегрируем (20) по  $Z$  от  $-z_0$  до  $z_0(z_0 \rightarrow 0)$ . В результате интегрирования члены, не содержащие  $\delta(z)$ , обратятся в нуль. Окончательно получим для  $\tilde{\Psi}_1$  уравнение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_1}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{z} + \frac{\sigma_0^i}{\sigma_0} \right) \tilde{\Psi}_1' + \left[ \frac{\lambda(4\Omega_0^2 - \xi^2)}{2\pi G \sigma_0(z)} - \frac{m^2}{z^2} - \frac{2m}{z} \frac{\Omega_0}{\xi} \frac{\sigma_0^i}{\sigma_0} \right] \tilde{\Psi}_1 = 0 \quad (22)$$

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Уже при написании уравнения (20) мы воспользовались зависимостью  $\Psi_1$  от  $Z$  в форме (19). Однако, в общем случае решение неоднородной системы уравнений (18), (17) не обязано иметь зависимость от  $Z$ , аналогичную (19). Посмотрим, когда (19) является решением неоднородной системы уравнений.

Как уже отмечалось выше, (19) есть решение уравнения Лапласа, полученное методом разделения переменных

$$\Psi_1(r, z) = R(r) \cdot Z(z) \quad \text{где } Z(z) = e^{-\lambda|z|}, \text{ а } R(r) \text{ находится из уравнения}$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left( \lambda^2 - \frac{m^2}{z^2} \right) R = 0 \quad (23)$$

Решениями этого уравнения, как известно, служат цилиндрические функции; однако, функцию Неймана, как расходящуюся в точке  $z=0$ , мы должны отбросить. Интересуясь в дальнейшем большими значениями  $\lambda z \gg 1$ , следует отбросить также функцию Бесселя от мнимого аргумента, как экспоненциально растущую с ростом  $\lambda z$ . Таким образом, окончательно имеем решение уравнения Лапласа в виде

$$\Psi_1(r, z) = C \operatorname{Im}(J_m(\lambda r)) \cdot e^{-\lambda|z|} \quad (24)$$

где  $C = \text{const}$

Если теперь постулировать, что  $\tilde{\sigma}_1(r) = C_1 \tilde{\Psi}_1$ ,

где  $C_1 = \text{const}$ , и при этом уравнение (22) действительно окажется уравнением типа (23), то выбор решения неоднородной системы уравнений (17,18) в виде (24) является законным.

Полагая в (22)  $\sigma_0^i/\sigma_0 = 0$ , видим, что (11) действительно есть уравнение Бесселя, откуда находим  $\lambda$ , как функцию от  $\omega$ :



$$(\omega - m\Omega_0)^2 = 4\Omega_0^2 - 2\pi G \sigma_0 \cdot \lambda \quad (25)$$

Уравнение (25) было получено в работе /10/. Как видно из (25), неустойчивость получается в случае

$$4\Omega_0^2 < 2\pi G \sigma_0 \lambda \quad (26)$$

что при условии  $\lambda z \gg 1$  всегда выполняется (как это следует из определения  $\Omega_0$  в (2)). Неустойчивость (25) характеризуется расслоением материала диска на отдельные спиральные ветви. Азимутальное число  $m$ , как мы видим, в инкремент неустойчивости /10/ не входит. Сейчас, как нам кажется, следует определить роль  $\lambda$ .

При выводе дисперсионного уравнения (25) предполагалось  $\Omega_0 = \text{const}$ . В соответствии с результатами предыдущего параграфа это означает, что  $\sigma_0(z) = \sigma_0(0) \sqrt{1 - z^2/R^2}$ , где  $R$  - радиус диска. Тогда очевидно, что  $\sigma_0'/\sigma_0 \neq 0$ , поэтому пренебрежение членами  $\sim \sigma_0'/\sigma_0$  возможно только в окрестности точки  $z=0$  при рассмотрении узко локализованных возмущений. Тогда в определенных случаях /13/ решение можно искать в виде плоской волны  $\sim \exp(ikz)$ , где  $K$  - радиальная компонента волнового вектора<sup>x)</sup>.

х) Прежде, однако, следует убедиться, что решение в виде плоской волны финитно. Для уравнения второго порядка, которое всегда может быть сведено к уравнению типа Шредингера, условие финитности эквивалентно наличию "ямы" потенциала. Тогда дисперсионное уравнение соответствует правилу квантования Бора-Зоммерфельда  $\int_{z_1}^{z_2} K(z) dz = 2\pi(n + 1/2)$ , где

$z_1, z_2$  - точки поворота. Поскольку выше уже доказано, что функции  $J_m(\lambda z)$  являются собственными функциями уравнения (22) при  $\sigma_0'/\sigma_0 = 0$ , то  $K(z)$  в (27) определено не в точках поворота, а в любой точке  $z$ , где с требуемой точностью можно считать  $\sigma_0'/\sigma_0 \approx 0$ .

Таким образом становится ясно, что константа разделения  $\lambda$  в случае коротковолновых возмущений оказывается тождественно равной радиальной компоненте волнового вектора  $K$ . Окончательно имеем [10]:

$$(\omega - m\Omega_0)^2 = -2\pi G \sigma_0 K; \quad Kz \gg 1 \quad (27)$$

Итак, в старшем порядке по малому параметру  $1/Kz$ , в котором получено уравнение (27), зависимость инкремента от азимутального числа  $m$  отсутствует. Посмотрим теперь следующий порядок малости при  $\vartheta^2 \neq 0$ .

Разлагая  $\sigma_0(z)$  в ряд и ограничиваясь старшими членами по  $z^2/R^2$ , получим

$$K^2 = \frac{1}{R^2} \left[ 1 + \frac{2m\Omega_0}{\xi} \left( 1 - \frac{K^2 \vartheta^2}{2\pi G \sigma_0(0) K} \right) \right] + \frac{K^2 (4\Omega_0^2 + K^2 \vartheta^2 - \xi^2)}{2\pi G \sigma_0(0) K} \quad (28)$$

Откуда, вводя новую переменную  $\chi = \xi/2\Omega_0$ , получим следующее кубическое уравнение

$$\chi^3 + \chi \left( \frac{KR}{\pi} - \beta^2 \right) - \frac{m}{\pi KR} (1 - c^2) = 0 \quad (29)$$

Здесь введены обозначения:  $\beta = K\vartheta/2\Omega_0$ ;  $c = K\vartheta/(2\pi G \sigma_0 K)^{1/2}$

Уравнение (28) переходит в уравнение Тоомте /10/ при условиях  $\vartheta^2 = 0$  и

$$\left[ \frac{m^2}{(KR)^5} \right]^{1/3} \ll 1 \quad (30)$$

При условии, обратном (30), из (28) находим, что инкремент неустойчивости  $\gamma$  растёт с ростом  $m$ :

$$\gamma \approx 2\Omega_0 \left[ \frac{m}{\pi KR} (1 - c^2) \right]^{1/3} \quad (31)$$



4. Этот результат, возможно, поясняет факт наличия у некоторых плоских подсистем галактик сильно расчлененной спиральной структуры (в виде сетки /11/). Как мы видим, результат (31) соответствует модели гомогенной системы - влияние сферической и эллиптической подсистем галактики пренебрежимо мало. Противоположный случай, когда влиянием последних пренебречь нельзя, в гидродинамическом приближении рассмотрен в /14, 15/. Как нам кажется, в /14/, удалось объяснить зависимость различных морфологических форм строения спиральных галактик от основных характеристик системы.

## Л и т е р а т у р а

- /1/ Г.С.Бисноватый-Коган, Я.Б.Зельдович, Р.З.Сагдеев, А.М.Фридман. ПМТФ, № 3, 3, 1969.
- /2/ Sweet P., *Monthly Notices of R.A.S.*, 124, 279, (1962).
- /3/ М.Н.Максумов, Л.С.Марочник, ДАН СССР, 164, 1019, 1965.
- /4/ В.И.Лебедев, М.Н.Максумов, Л.С.Марочник. *Астрономический журнал*, 42, 709, 1965.
- /5/ М.Н.Максумов, Л.С.Марочник. *Астрономический журнал*, 42, 1261, 1965.
- /6/ Л.С.Марочник, Н.Т.Птицына. *Астрономический журнал*, 45, 516, 1968.
- /7/ Lynden-Bell D., *Monthly Notices of R.A.S.*, 125, 285, 1963.
- /8/ Э.Т.Уиттекер, Дж.Н.Батсон. *Курс современного анализа*, т.1, М., 1962.
- /9/ Н.Н.Лебедев и др. *Сборник задач по уравнениям математической физики*, М., 1965.
- /10/ A. Toomre, *Astrophysical Journ.*, 139, 1217, 1964.
- /11/ В.А.Воронцов-Вельяминов. *Астрономический журнал*, 41, № 5, 1964.
- /12/ H. V. Sauer. *Handbuch der Physik*, Band LIII, *Astrophysik IV: Sternsysteme*, Berlin, 1959.
- /13/ А.А.Галеев. *ЖЭТФ*, 44, 1920 (1963).
- /14/ В.Л.Поляченко, В.Сынах, А.М.Фридман. *Астрономический журнал*, 1970, в печати.
- /15/ С.А.Пустильник. *Дипломная работа*, Новосибирский Государственный Университет, 1970.