ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 33-70

Е.М.Крушкаль

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ АНГАРМОНИЧНЫХ РЕШЕТОК

Новосибирск

1970

Е.М.Крушкаль

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ АНГАРМОНИЧНЫХ РЕШЕТОК

АННОТАЦИЯ

В работе получен критерий стохастической неустойчивости для многомерных ангармонических решеток. Сравнение с экспериментальными данными работы /5/ показывает согласие аналитической оценки с экспериментом.

Рассмотрим среду, описываемую нелинейным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left[1+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1}$$

где $u \equiv u\ (t, x, y, z)$, x, y, z – пространственные координаты, t – время, λ – коэффициент нелинейности.

Соответствующая уравнению (1) модель ангармонической решетки имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{u}_{e,m,p} = {} & (u_{e+1,m,p} - 2u_{e,m,p} + u_{e-1,m,p}) \\ & + \beta\left[(u_{e+1,m,p} - u_{e,m,p})^3 - (u_{e,m,p} - u_{e-1,m,p})^3\right] \\ & + \mu\,(u_{e,m+1,p} - 2u_{e,m,p} + u_{e,m-1,p}) \\ & + \beta\mu\left[(u_{e,m+1,p} - u_{e,m,p})^3 - (u_{e,m,p} - u_{e,m-1,p})^3\right] \\ & + \gamma\,(u_{e,m,p+1} - 2u_{e,m,p} + u_{e,m,p-1}) \\ & + \beta\gamma\left[(u_{e,m,p+1} - u_{e,m,p})^3 - (u_{e,m,p} - u_{e,m,p-1})^3\right],\end{aligned} \tag{2}$$

где $\beta = \lambda/3$.

При значениях коэффициентов

$$\mu = \gamma = 0 \qquad (3)$$

уравнение (1) описывает нелинейную струну и исследованию его посвящено большое количество работ, в связи с известной проблемой установления термодинамического равновесия в системе нелинейно связанных осцилляторов (см., напр., /1/-/4/ и библиографию к ним).

Израйлевым и Чириковым /2/ была получена оценка границы стохастической неустойчивости, разделяющей область квазипериодического движения и область стохастичности для цепочки нелинейно связанных гармонических осцилляторов в одномерном случае.

В данной работе мы обобщим этот результат для многомерных ангармонических решеток (2 - мерной - § 1 и 3 - мерной - § 2). Принято, что границы решеток жестко закреплены.

В § 3 приведено сравнение аналитической оценки границы стохастической неустойчивости с численными данными работы Хироока и Саито /5/ для 2-мерной решетки.

§ 1. <u>2-мерная решетка</u>

Полагаем в (2) $\gamma = 0$ (третий индекс можно опустить). Пусть N_1, N_2 - числа осцилляторов соответственно в направлениях x, y.

Перейдем к нормальным координатам:

$$u_{\ell m} = \frac{2}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} Q_{kr} \sin\frac{\pi \ell k}{N_1} \sin\frac{\pi m r}{N_2} \qquad (1.1)$$

Для медленно меняющейся величины

$$Q_{kr}(t) = C_{kr}(t) \cos\theta_{kr}(t), \qquad (1.1а)$$

где C_{kr} - амплитуда нормального колебания и $\dot\theta_{kr}(t) = \omega'_{kr}(t)$ - его частота, из (2) получим уравнение

$$\ddot Q_{kr} + \omega^2_{kr} Q_{kr}\left(1 - A Q^2_{kr}\right) = \frac{\beta}{16 N_1 N_2} \sum_m \sum_n F_{km,rn} \cos\theta_{km,rn}. \qquad (1.2)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, N_1 - 1; \quad r = 1, 2, \dots, N_2 - 1;$

$$A \approx \frac{3\beta}{8 N_1 N_2 \omega^2_{kr}} \left[\omega^4_{k0}\left(2 - \omega^2_{k0}\right) + \mu\,\omega^4_{0r}\left(2 - \omega^2_{0r}\right)\right];$$

$$\omega_{kr} = 2\left(\sin^2\frac{\pi k}{2N_1} + \mu \sin^2\frac{\pi r}{2N_2}\right)^{1/2}; \qquad (1.3)$$

$$\omega_{k0} = 2\sin\frac{\pi k}{2N_1}; \qquad \omega_{0r} = 2\sin\frac{\pi r}{2N_2}; \qquad (1.4)$$

$\omega'_{km,rn} = \dot\theta_{km,rn}$ - частоты внешних сил, действующих на осциллятор kr с амплитудой $\beta F_{km,rn}/16 N_1 N_2$. Мы не станем выписывать правую часть (1.2) явно в силу её громоздкости, а проанализируем ниже ряд предельных случаев.

Критерий стохастичности, определяемый из условия перекрытия резонансов /2/, /3/, имеет вид

$$\varkappa \sim \frac{|\dot\Psi_{km,rn}|}{\Delta\omega} \sim 1 \qquad (1.5)$$

где

$$|\dot\Psi_{km,rn}| \approx \sqrt{\frac{\beta F_{km,rn}}{8 N_1 N_2 \omega'_{kr}} \frac{d\Omega_{km,rn}}{dC_{kr}}} \qquad (1.6)$$

– характеризует размер сепаратрисы на фазовой плоскости;

$\Omega_{km,rn} = \omega'_{km,rn} - \omega'_{kr}$; $\Delta\omega$ – расстояние между резонансами.

а) <u>Возбуждение низких мод</u> ($k \ll N_1$, $r \ll N_2$).

В этом случае частоты нормальных колебаний:

$$\omega_{kr} \approx \pi\left[\frac{k^2}{N_1^2} + \mu\frac{r^2}{N_2^2}\right]^{1/2} \qquad (1.7)$$

Пусть k, r – средние номера возбуждённых мод соответственно в интервалах Δk, Δr; $N_в$ – число возбужденных мод:

$$N_в \sim \Delta k \Delta r \qquad (1.7а)$$

Подсчитаем количество невырожденных резонансных соотношений N_p в правой части (1.2) типа

$$\sum_{i=1}^{4} n_i\,\omega_i = 0, \quad n_i \text{ – целые числа} \qquad (1.8)$$

(напомним, что член с кубической нелинейностью в (2) обуславливает 4-х кратное взаимодействие). При этом нужно учесть, что в рассматриваемом пределе для осцилляторов, лежащих на одной прямой, проходящей через начало координат, получаются линейные соотношения относительно их номеров согласно (1.7), (1.8), как в одномерном случае. Поэтому число независимых резонансных соотношений (1.8) уменьшается за счет вырождения по сравнению с числом возможных резонансов в системе.

В результате имеем:

$$N_p = 2^3 C^3_{N_в-1} - N_0 + N_л, \qquad (1.9)$$

где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m;

$$N_0 = 8\,C^3_{a-1}; \quad N_л = a/2; \qquad (1.10)$$

$$a = \min(\Delta k, \Delta r).$$

Множитель 1/2 у последнего выражения в (1.10) учитывает наличие симметрии взаимодействия при кубической нелинейности в вырожденном случае аналогично одномерному случаю /2/. Заметим также, что с учётом этого обстоятельства эффект вырождения нужно учитывать лишь, если $a \gg 8$, так как только в этом случае возможна соответствующая комбинация частот в (1.8).

Оценим величину средней силы $\langle F\rangle$, действующей на осциллятор kr со стороны ближайшего резонанса. Согласно (1.2) и с учётом случайности фаз /3/, имеем:

$$\langle F\rangle \sim \beta\frac{F_{km,rn}}{16\,N_1N_2} \sim \frac{\pi^4\left(8C^3_{N_в-1}\right)^{1/2}\beta\langle c^3\rangle}{N_1N_2\left(8C^3_{N_в-1} - N_0 + N_л\right)^{1/2}}\left(\frac{k^4}{N_1^4} + \mu\frac{r^4}{N_2^4}\right), \qquad (1.10а)$$

где $\langle c^3\rangle$ – средняя комбинация амплитуд в области возбужденных мод. Поправка к частоте ω_{kr} за счёт нелинейности равна

$$\Omega_{km,rn} \sim \frac{9\beta\left(\frac{k^4}{N_1^4} + \mu\frac{r^4}{N_2^4}\right)\langle c^2\rangle}{32\,N_1N_2\left(\frac{k^2}{N_1^2} + \mu\frac{r^2}{N_2^2}\right)^{1/2}} \qquad (1.10б)$$

Среднее расстояние между резонансами можно оценить как интервалы между векторами частот в области возбужденных мод $|\omega_{k-\Delta k/2,\, z-\Delta z/2}| \le |\omega_{kz}| \le |\omega_{k+\Delta k/2,\, z+\Delta z/2}|$, занимаемой N_p резонансами из (1.7) и (1.9):

$$\Delta\omega \sim \frac{\pi\left[\left(\frac{k\Delta k}{N_1^2}\right)^2 + \mu\left(\frac{z\Delta z}{N_2^2}\right)^2\right]^{1/2}}{\left(\frac{k^2}{N_1^2}+\mu\frac{z^2}{N_2^2}\right)^{1/2}\left(8C^3_{N_B-1}-N_0+N_\Lambda\right)} \qquad (1.11)$$

Из (1.1) с учётом (1.1а) получим оценку максимальной величины u_{max}:

$$u^2_{max} = 4\bar{u}^2 \sim \frac{2\langle C^2\rangle \Delta k\,\Delta z}{N_1 N_2} \qquad (1.12)$$

Введем обозначения:

$$\Phi_2 \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \pi^2\left(\frac{k^2}{N_1^2}+\mu\frac{z^2}{N_2^2}\right)u^2_{max}; \qquad (1.13)$$

$$\sigma_1 = \frac{z N_1}{k N_2}; \qquad \Delta\sigma_1 = \frac{z\,\Delta z\, N_1^2}{k\,\Delta k\, N_2^2}. \qquad (1.14)$$

Определяя $\beta_{кр}$ из (1.5) с учётом (1.6), (1.10а), (1_10б), (1.11), получим следующую оценку границы стохастичности:

$$3\beta_{кр}\Phi_2 \sim \frac{6(1+\mu\sigma_1^2)(1+\mu\Delta\sigma_1^2)^{1/2}\Delta k^2\Delta z}{k(1+\mu\sigma_1^4)\left[(8C^3_{N_B-1}-N_0+N_\Lambda)^3\, 8C^3_{N_B-1}\right]^{1/4}} \qquad (1.15)$$

При $\Delta k,\ \Delta z \gg 1$ имеем

$$8C^3_{N_B-1}\sim\Delta k^3\Delta z^3; \qquad 8C^3_{N_B-1}\gg N_0\gg N_\Lambda$$

и (1.15) примет вид

$$3\beta_{кр}\Phi_2 \sim \frac{4(1+\mu\sigma_1^2)(1+\mu\Delta\sigma_1^2)^{1/2}}{k(1+\mu\sigma_1^4)\,\Delta k\,\Delta z^2} \qquad (1.15а)$$

При $\mu\to 0$ область возбужденных мод стягивается к прямой на оси x. $8C^3_{N_B-1}\sim\Delta k^3$, $N_0\sim\Delta k^3$,

$$N_\Lambda\sim\Delta k/2, \qquad \Phi_2\to\Phi_1\equiv\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

так что (с учётом нормировки)

$$3\beta_{кр}\Phi_1\sim\frac{6\sqrt{\Delta k}}{k}. \qquad (1.15б)$$

соответственно оценке, полученной в /2/ для одномерного случая.

б) <u>Возбуждение высоких мод</u> ($k\approx N_1$, $z\approx N_2$).

В этом случае резонансные частоты равны

$$\omega_{km,zn}\approx 2\left[\cos^2\frac{\pi\sqrt{(k-N_1)^2+2m}}{2N_1}+\mu\cos^2\frac{\pi\sqrt{(z-N_2)^2+2n}}{2N_2}\right] \qquad (1.16)$$

где $m = 0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$

$n = 0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$

Среднее расстояние между ближайшими резонансами в 1-ом приближении равно

$$\Delta\omega_\pm = \omega_{k,m\pm1,z,n\mp1}-\omega_{km,zn}\approx\frac{\pi^2}{2(1+\mu)^{1/2}}\left|\frac{1}{N_1^2}\pm\frac{\mu}{N_2^2}\right| \qquad (1.17)$$

Поправка следующего порядка даёт расстояние между резонансами тонкой структуры

$$\Delta\omega_1\sim\pi^4/N^4 \quad (при\ N_1=N_2=N), \qquad (1.18)$$

но, как легко видеть, в рассматриваемом пределе ($\Delta k \ll N_1$, $\Delta r \ll N_2$) полного перекрытия этой системы резонансов не происходит, так что при $N_1 \sim N_2 \sim N, \ \mu \sim 1$ в (1.17) следует брать верхний знак в связи с дополнительным вырождением.

С учётом (1.2), (1.5), (1.12) - (1.14) получим оценку границы стохастичности (*при* $\Delta\omega_- \gg \Delta\omega_1$):

$$3\beta_{кр}\Phi_2 \sim \frac{6\pi^2 k^2 (1+\mu\sigma_1^2)\,\Delta k \Delta r}{(1+\mu)^{1/2} N_1^2} \left| \frac{1}{N_1^2} - \mu \frac{1}{N_2^2} \right| . \tag{1.19}$$

При $N_1 \sim N_2 \sim N, \ \mu \sim 1$ имеем: $\Delta\omega_+ \gg \Delta\omega_1 \sim \Delta\omega_-$;

$$3\beta_{кр}\Phi_2 \sim 8\pi^2 \Delta k \Delta r\,(k^2 + r^2)/N^4 \tag{1.20}$$

При $\mu \to 0$ (для одномерного случая) (1.19), (1.20) переходят (с учётом нормировки) в

$$3\beta_{кр}\Phi_1 \sim \frac{3\pi^2 k^2 \Delta k}{N^4}$$

в согласии с результатом работы /2/.

в) Смешанный случай ($k \approx N_1$, $r \ll N_2$).

Пусть возбуждены высшие моды по одному направлению и низшие по другому. Резонансные частоты равны

$$\omega_{km,rn} \approx 2\left[\cos^2 \frac{\pi\sqrt{(k-N_1)^2+2m}}{2N_1} + \mu \sin^2 \frac{\pi\sqrt{r^2+2n}}{2N_2}\right]^{1/2} \tag{1.21}$$

$m, n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Тогда оценка границы стохастичности совпадает с выражениями (1.19), (1.20), т.е. определяется наличием высоких мод.

§ 2. $3^{х}$- мерная решетка

Пользуясь результатами предыдущего параграфа, нетрудно получить оценки и для $3^{х}$-мерного случая.

Разложение по нормальным колебаниям теперь имеет вид

$$u_{\ell m p} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{N_1 N_2 N_3}} \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{r=1}^{N_2-1} \sum_{s=1}^{N_3-1} Q_{krs} \sin\frac{\pi \ell k}{N_1} \sin\frac{\pi m r}{N_2} \sin\frac{\pi p s}{N_3} , \tag{2.1}$$

где N_1 , N_2 , N_3 - числа осцилляторов решетки соответственно в направлениях x , y , z .

Число возбужденных мод в интервалах Δk , Δr , Δs :

$$N_б \sim \Delta k \Delta r \Delta s \tag{2.2}$$

Частоты нормальных колебаний:

$$\omega_{krs} = 2\left(\sin^2\frac{\pi k}{2N_1} + \mu \sin^2\frac{\pi r}{2N_2} + \gamma \sin^2\frac{\pi s}{2N_3}\right)^{1/2} \tag{2.3}$$

$k = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$; $r = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$; $s = 1, 2, \ldots, N_3 - 1$.

Для N_p можно по-прежнему использовать выражение (1.9) с учётом того, что теперь $a = \min(\Delta k, \Delta r, \Delta s)$, а область возбужденных мод определяется (2.2).

Введем обозначения:

$$\Phi_3 \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= \pi^2\left(\frac{k^2}{N_1^2} + \mu\frac{r^2}{N_2^2} + \gamma\frac{s^2}{N_3^2}\right) u^2_{max}, \qquad (2.4)$$

где

$$u^2_{max} \sim \frac{2\langle C^2\rangle \Delta k \Delta r \Delta s}{N_1 N_2 N_3}; \quad \sigma_1 = \frac{r N_1}{k N_2}; \quad \sigma_2 = \frac{s N_1}{k N_3};$$

$$\Delta\sigma_1 = \frac{r \Delta r N_1^2}{k \Delta k N_2^2}; \quad \Delta\sigma_2 = \frac{s \Delta s N_1^2}{k \Delta k N_3^2}.$$

Тогда оценки границ стохастичности мы получим в следующем виде:

а) Низшие моды ($k \ll N_1$, $r \ll N_2$, $s \ll N_3$)

$$3\beta_{кр}\Phi_3 \sim \frac{12(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)(1+\mu\Delta\sigma_1^2+\gamma\Delta\sigma_2^2)^{1/2}\Delta k^2 \Delta r \Delta s}{k(1+\mu\sigma_1^4+\gamma\sigma_2^4)\left[8C^3_{N_B-1}(8C^3_{N_B-1} - N_0 + N_\Lambda)^3\right]^{1/4}} \qquad (2.5)$$

При Δk , Δr , $\Delta s \gg 1$ (2.5) примет вид:

$$3\beta_{кр}\Phi_3 \sim \frac{9(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)(1+\mu\Delta\sigma_1^2+\gamma\Delta\sigma_2^2)^{1/2}}{k(1+\mu\sigma_1^4+\gamma\sigma_2^4)\,\Delta k\,\Delta r^2\,\Delta s^2} \qquad (2.6)$$

б) Высшие моды ($k \approx N_1$, $r \approx N_2$, $s \approx N_3$).

$$3\beta_{кр}\Phi_3 \sim 12\pi^2\frac{k^2(1+\mu\sigma_1^2+\gamma\sigma_2^2)\Delta k \Delta r \Delta s}{N_1^2(1+\mu+\gamma)^{1/2}}\left|\frac{1}{N_1^2} \pm \frac{\mu}{N_2^2} \mp \frac{\gamma}{N_3^2}\right| \qquad (2.7)$$

Знаки в последней скобке выбираются так, чтобы получилось минимальное выражение, что соответствует ближайшему расстоянию между резонансами. Оценкой (2.7) нельзя пользоваться при $N_1 \sim N_2 \sim N$, $\gamma \sim 1-\mu$. Для последнего случая с учётом замечания к формуле (1.18) имеем:

$$3\beta_{кр}\Phi_3 \sim \frac{17\pi^2\Delta k \Delta r \Delta s}{N^4}(k^2+r^2+s^2) \qquad (2.8)$$

В смешанном случае (например, $k \sim N_1$, $r \ll N_2$, $s \ll N_3$) получим те же оценки - (2.7), (2.8).

§ 3. Сравнение с экспериментальными данными

Как упоминалось выше, в работе /5/ численно исследовалась 2-мерная ангармоническая решетка, поэтому интересно провести сравнение с аналитическими оценками.

Для $N_1 = N_2 = 6$, $k = r = 2$, $\langle C\rangle \sim 1$ μ = 0.9 , $\Delta k \sim \Delta r \sim 2$ (в наших обозначениях), было найдено $\beta_{кр} \approx$ 2.8.

Выражения (1.14), (1.7а) дадут

$$\sigma_1 = \Delta\sigma_1 = 1 , \quad N_\beta \sim \Delta k \Delta \tau \sim 4$$

и, принимая во внимание, что в этом случае $N_0 = N_\lambda = 0$, т.к. $\Delta k, \Delta\tau < 8$ в (1.10), найдем приближенную оценку $\beta_{кр}$ из (1.15) с учетом (1.13):

$$\beta_{кр} \sim 3$$

что согласуется с экспериментальными данными.

Заключение

Как видно из вышеприведенных оценок и согласно /3/, с увеличением числа степеней свободы развитие стохастичности облегчается. Для более основательной проверки аналитических оценок были бы желательны эксперименты с бо́льшим числом осцилляторов.

Автор признателен Б.В.Чирикову за ценные замечания и Ф.М.Израйлеву за обсуждение отдельных вопросов.

Литература

1. E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam, Studies of Non-linear Problems I, Los Alomos Scientific Report LA-1940, 1955.

2. Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, ДАН, 166, 57 (1966); Ф.М.Израйлев, Б.В.Чириков, Статистические свойства нелинейной струны, препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1965.

3. Б.В.Чириков, Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности, диссертация, ИЯФ СО АН СССР, 1969.

4. Е.М.Крушкаль, О точных решениях класса нелинейных волновых уравнений, препринт ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск, 1968.

5. H. Hirooka and N. Saito, Computer Studies on the Approach to Thermal Equilibrium in Coupled Anharmonic Oscillators, I. Two Dimensional Case, Waseda University, Tokyo, 1968.