ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 34 - 70

Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

О СУММЕ ДЕКРЕМЕНТОВ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

Новосибирск

1970

Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский, Д.В.Пестриков

О СУММЕ ДЕКРЕМЕНТОВ КОГЕРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУЧКА В НАКОПИТЕЛЕ

А Н Н О Т А Ц И Я

В работе даётся обоснование принципиальной возможности одновременного демпфирования коллективных колебаний пучка в накопителе по всем осцилляторным степеням свободы.

Устанавливается так называемая "теорема о сумме декрементов" мод когерентных возбуждений пучка, взаимодействующего с "внешней" системой. В отличие от синхротронного излучения, сумма декрементов не пропорциональна, в общем случае, полной мощности потерь. Показано также, что при взаимодействии пучка с системами "без памяти" сумма декрементов, в линейном приближении, не зависит от связи радиального и продольного движения. Это позволяет использовать такие системы для демпфирования синхротронных колебаний одновременно с радиальными за счёт перераспределения декрементов.

1. В в е д е н и е

В настоящее время известен широкий круг коллективных явлений, возникающих при получении больших токов в ускорителях и накопителях. Эти явления удобно классифицировать в соответствии с зависимостью декрементов[x)] от характерных частот движения частиц в машине /1/.

Первый класс - резонансные явления. Характерной чертой этих явлений является резонансная зависимость декрементов от расстройки. Известен ряд методов подавления неустойчивостей, возникающих при этих явлениях, например, изменения частот бетатронных и (или) синхротронных колебаний ; изменение частотных характеристик окружающих пучок элементов вакуумной камеры накопителя, и т.п.

Второй класс - эффекты типа стеночной неустойчивости. Для этого класса явлений характерна слабая зависимость декрементов от частот бетатронных колебаний. Возникающие при этом неустойчивости, вообще говоря, могут быть подавлены соответствующим выбором рабочей точки.

Третий класс - "мгновенные эффекты". Характерной особенностью этих эффектов является независимость декрементов от бетатронной и синхротронной частот (/2/ - /5/). Возникающие при этом неустойчивости, очевидно, не могут быть подавлены ни одним из перечисленных выше способов. Одним из способов подавления такого рода неустойчивостей (а также неустойчивостей, относящихся к первому и второму классам) может быть введение большого разброса по частотам, приводящее к разрушению коллективных колебаний. Однако такой способ не всегда применим из-за опасности приближения к машинным резонансам. Кроме того, большой разброс по частотам, при наличии когерентных возбуждений, может приводить к разогреву пучка тяжелых частиц.

Иногда оказывается возможным использование обратных связей. Однако этот способ удобен только для подавления отдельных мод возбуждений.

---

x) Под декрементом здесь и далее принимается величина $\delta = -\mathrm{Im}\,\omega$, когда временная зависимость возбуждений $e^{-i\omega t}$. При этом $\delta > 0$ означает, очевидно, затухание, а $\delta < 0$ - неустойчивость.

В работах (/2/, /3/, /4/) был предложен "универсальный" метод демпфирования неустойчивостей, основанный на использовании излучения энергии когерентных возбуждений в согласованные двусвязные волноводы. Этот метод обладает большой широкополосностью и может обеспечить, по крайней мере, устойчивость бунчированных пучков.

Первоначально этот способ был предложен для демпфирования бетатронных колебаний /3/, однако оказалось возможным модифицировать его для подавления также и синхротронных колебаний /4/. Демпфирование последних происходит за счёт перераспределения декрементов между радиальной и продольной степенями свободы. При этом радиальные бетатронные колебания могут оставаться устойчивыми, т.к. их демпфирование обязано возбуждению волны поперечным движением. В работе /4/ был предложен конкретный способ обеспечения одновременной устойчивости бетатронных и синхротронных колебаний.

Целью настоящей работы является установление некоторых общих свойств когерентных возбуждений и вытекающих из них следствий применительно к задаче обеспечения коллективной устойчивости пучка.

В первой части работы излагается метод усреднения применительно к системе уравнений Власова, предложенный в работе /3/. Во второй части, опираясь на изложенный формализм, устанавливается теорема о сумме декрементов когерентных возбуждений, которая может быть сформулирована следующим образом: "Сумма декрементов мод коллективных возбуждений равна сумме декрементов колебательных степеней свободы отдельных частиц пучка, взаимодействующих с "внешней" системой независимо друг от друга".

Особо подчеркнем, что сумма декрементов мод коллективных возбуждений не пропорциональна, в общем случае, полной мощности когерентных потерь пучка, что является качественным отличием когерентного излучения от некогерентного (синхротронного). На этом факте основывается принципиальная возможность одновременного демпфирования коллективных колебаний по всем степеням свободы в условиях, когда мгновенные энергетические потери, обязанные коллективному взаимодействию с внешней системой, не зависят (или слабо зависят) от энергии частиц.

1. Кинетическое уравнение

Для исследования коллективных явлений, происходящих в пучке, взаимодействующем с некоторым элементом вакуумной камеры, будем исходить из системы уравнений Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{H}]\right)\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\int d^3p\, f \;, \quad \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \;; \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\int d^3p\,\vec{v} f + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (2)$$

Векторы электрической $\vec{D}$ и магнитной $\vec{B}$ индукции связаны с полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ "материальными" уравнениями. В этой работе мы будем рассматривать лишь те задачи, в которых влияние наполнения камеры (а также её границ) можно описать в терминах электрической $\hat{\varepsilon}$ и магнитной $\hat{\mu}$ проницаемости. Тогда, в наиболее общем случае, "материальные" уравнения можно записать в виде:

$$D_i(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{3}\int d^3r' dt'\, \varepsilon_{ik}(\vec{r},\vec{r}'|t-t')\, E_k(\vec{r}',t')$$

$$B_i(\vec{r},t) = \sum_{k=1}^{3}\int d^3r' dt'\, \mu_{ik}(\vec{r},\vec{r}'|t-t')\, H_k(\vec{r}',t') \qquad (2a)$$

f в уравнении (1) - одночастичная функция распределения, нормированная на полное число частиц в пучке N:

$$\int d^3r\, d^3p\, f = \int d\Gamma\, f = N$$

$\vec{E}$ и $\vec{B}$ из (1) включают в себя как фокусирующие поля, так и поля, наведенные пучком и описываемые уравнениями (2) и (2а).

Перепишем (1), выделив явным образом взаимодействие с наведенными полями

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{z}} + \vec{F}_\varphi \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial V}{\partial \vec{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} - \frac{e}{c}\dot{\vec{A}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \qquad (1а)$$

здесь $\vec{F}_\varphi$ – фокусирующие силы, V – лагранжиан взаимодействия частицы с коллективным полем пучка

$$V = \frac{e}{c}(\vec{v}\vec{A}) - e\varphi$$

$\vec{A}$ и φ – векторный и скалярный потенциалы, связанные с полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ по формулам

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \;;\; \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \qquad (2^{П})$$

Запишем теперь произведение $\frac{\partial V}{\partial \vec{z}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}$ из (1а) в виде:

$$-\{V;f\} + \frac{\partial V}{\partial \vec{p}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{z}}$$

где $\{;\}$ – означает скобки Пуассона. Второй член этого выражения объединим с последним членом из (1а), в результате получим

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{p}}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{z}} - \frac{e}{c}\dot{\vec{A}}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{e}{c}\left(\vec{A}\{\vec{v};f\} + \vec{A}\{\vec{z};f\}\right)$$

Если воспользоваться правилом вычисления полной производной по времени от скобок Пуассона, то уравнение (1а) может быть переписано как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{z}} + \vec{F}_\varphi\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} - \{V;f\} = \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right) \qquad (3)$$

В пренебрежении взаимодействием с наведенным полем и неидеальностями ведущего поля решение (3) можно записать в виде

$$f = F(\mathcal{J},\eta) = F(\mathcal{J}_0\, \psi_i - \omega_i t)$$

где F – некоторая, вообще говоря, произвольная функция $\mathcal{J}$ и η, $\mathcal{J}$ и η – переменные действие – фаза, являющиеся интегралами невозмущенного движения, ω_i – частоты нормальных колебаний возле равновесной траектории.

Для ускорителя (накопителя) с плоскими, замкнутыми орбитами идеальное движение частицы возле равновесной орбиты (бетатронные и синхротронные колебания) описываются уравнениями:

$$\tau = \tau_b + \tau_c \;;\; \tau_c = \bar{R}\,\Psi(\theta_s)\frac{\Delta p_{\parallel}}{p_s}$$

$$(\tau_b, z) = \sqrt{\frac{2\bar{R}}{p_s}\mathcal{J}_{\tau,z}}\left(f_{\tau,z}(\theta_s)e^{i\psi_{\tau,z}} + к.с.\right)$$

$$p_\tau = \frac{p_s}{\bar{R}}\frac{d\tau}{d\theta_s} \;;\; p_z = \frac{p_s}{\bar{R}}\frac{dz}{d\theta_s} \;;\; \Delta p_{\parallel} = \mu_c\Omega_c\varphi_0\cos\psi_{\parallel}$$

$$\varphi = \varphi_0\sin\psi_{\parallel} \;;\; \psi_i = \omega_i t + \eta_i \;;\; \theta_s = \omega_0 t$$

$$\theta - \theta_s = \varphi + \vartheta_b \;;\; \vartheta_b = \frac{1}{\bar{R}}\left[\Psi\frac{d\tau_b}{d\theta_s} - \tau_b\frac{d\Psi}{d\theta_s}\right] \qquad (4)$$

Индексом S, как обычно, отмечаются величины, относящиеся к равновесному движению частицы; ω_i – частоты отсцилляторных движений, η_i – их начальные фазы; $\bar{R}$ – средний радиус машины; $\Delta p_{\parallel}$ – отклонение продольного импульса от равновесного значения. $\Psi(\theta_s)$ – вынужденное решение уравнения

$$\frac{d^2\psi}{d\theta_s^2}+\frac{\bar{R}^2}{R^2(\theta_s)}(1-n)\psi=\frac{\bar{R}}{R(\theta_s)} \tag{5}$$

$f_r(\theta_s)$ и $f_z(\theta_s)$ - функции Флоке r и z движения, соответственно: μ_c - "масса" синхротронного движения

$$\mu_c=\frac{\rho_s}{\omega_0}\,\frac{\gamma_s^2-1}{\alpha\gamma_s^2-1} \tag{6}$$

$\gamma_s=\varepsilon_s/mc^2$, α - коэффициент расширения орбит.

В дальнейшем мы будем иметь в виду случаи, когда взаимодействие с наведенными полями (а также не идеальностями ведущего поля) мало искажает движение частиц за времена порядка периодов идеальных колебаний. При этом целесообразно перейти в уравнении (3) к переменным $\mathcal{I}$ и ψ, рассматривая переход от ($\vec{r}$ и $\vec{p}$) к ($\mathcal{I}$ и ψ), как некоторое каноническое преобразование.

Так как скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований, уравнение (3) перепишется в виде (при этом можно считать, что V содержит в себе и неидеальную часть ведущего поля).

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(\omega_i+\Delta\omega_i)\frac{\partial f}{\partial\psi_i}+\frac{\partial V}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial I_i}=\frac{e}{c}\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\right) \tag{7}$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

$\Delta\omega_i=-\partial V/\partial I_i$ - мгновенный сдвиг частоты. Величина V периодична по фазам и равновесному азимуту с периодом 2π и поэтому может быть представлена разложением

$$V=\sum_n\sum_m V_{m,n}(I)\exp(im_i\psi_i+in\theta_s)$$

Для решения (7) можно применять метод усреднения, ограничиваясь первым приближением. При этом член в правой части (7), являющийся полной производной по времени, можно опустить,

т.к. при усреднении он дает вклад второго порядка по V.

Рассмотрим задачу об устойчивости малых когерентных колебаний около не возмущенного равновесного состояния, функция распределения которого, по определению, не зависит от фаз

$$f_0=f_0(I)$$

Представим функцию распределения в (7) в виде суммы

$$f=f_0+\tilde{f}=f_0+\sum_{m\neq 0}\tilde{f}_m(I,t)\,e^{im_i\psi_i} \tag{8}$$

где $\tilde{f}$ - неравновесная добавка, описывающая малые когерентные колебания пучка. По определению $\int d\Gamma f_0=N$, $\int d\Gamma\tilde{f}=0$. Считая $\tilde{f}$ малой по сравнению с f_0, запишем (7) с точностью членов порядка $\tilde{f}^2$

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial t}+(\omega_i+\Delta\omega_i)\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\psi_i}+\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial\tilde{f}}{\partial I_i}+\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial I_i}=-\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial I_i} \tag{9}$$

где

$$V=V^{(0)}+\tilde{V}=V[f_0]+V[\tilde{f}]$$

Уравнение (9) отличается от аналогичных, обычно используемых в теории устойчивости плазмы, уравнений присутствием в правой части неоднородного члена

$$-\frac{\partial V^{(0)}}{\partial\psi_i}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial I_i}$$

Его появление связано с тем, что $f_0(I)$ не является истинным равновесным распределением, которое должно находиться решением самосогласованной задачи, а описывает равновесное состояние без учета взаимодействия. Этот член учитывает возмущение движения частиц равновесной частью наведенного поля. За исключением случаев в близости к машинным резонансам и резонансам между гармониками частоты обращения и частотами колебаний поля, амплитуда вызываемых им колебаний порядка

$$\tilde f_{вын} \sim \frac{V\cdot f_0}{I\cdot(m_i\omega_i - n\omega_0)} << f_0$$

При этом может выполняться необходимое для получения (9) условие малости $\tilde f$ по сравнению с f_0.

Предположим, что свободные колебания (9) затухают, тогда при $t \to \infty$ решение (9)

$$f = f_0 + \tilde f_{вын}$$

будет определять равновесное состояние с учётом взаимодействия в первом порядке.

Если же свободные колебания оказываются неустойчивыми, то роль правой части сводится к переопределению начальных условий для $\tilde f$. При этом можно утверждать, что равновесное состояние системы с учётом самосогласованного поля не будет близко к f_0.

Таким образом, для ответа на вопрос об устойчивости малых колебаний вблизи равновесного состояния с распределением $f_0(J)$ достаточно решить (9) без правой части.

Подставив разложение (8) в (9) получим систему уравнений для $\tilde f\,(J, t)$

$$\frac{\partial \tilde f_m}{\partial t} + i(\omega_i + \Delta\omega_{i\,0})\, m_i \tilde f_m + i\, m_i \tilde V_m \cdot \frac{\partial f_0}{\partial I_i} =$$

$$= -i\sum_{m'\neq m}\left\{ m_i'\,\Delta\omega_{i\,m-m'}\,\tilde f_{m'} + (m_i - m_i')\,V^{(0)}_{m-m'}\,\frac{\partial \tilde f_{m'}}{\partial I_i}\right\} \qquad (10)$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$\tilde f_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \chi_{m,l}(J)\, e^{-i(l\omega_0 + \omega)t} \qquad (11)$$

Поскольку взаимодействие мало (см.выше) ясно, что спектр возбуждений должен быть близок к невозмущенному $\omega = m_i\omega_i + \Delta$, $|\Delta| \ll \min\{\omega_i\}$. При этом главный вклад в возбуждение $\omega \simeq (m_i\omega_i)$ даёт, очевидно, гармоника $\chi_{m,0}$, а вклад остальных порядка

$$\chi_{m,l} \sim \frac{\Delta}{(m-m')_i\,\omega_i - l\omega_0}$$

Поэтому, если когерентный сдвиг Δ мал по сравнению с разностью частот невозмущенного спектра, вкладом этих гармоник можно пренебречь, опустив при этом сумму в правой части (10) и заменив $\chi_m(t) \to \chi_{m,0}(t) = \bar\chi_m(t)$. При этом (10) переходит в

$$-i\frac{\partial \bar\chi_m}{\partial t} + m_i(\omega_i + \overline{\Delta\omega_i})\,\bar\chi_m + m_i\,\tilde{\bar V}_m\cdot\frac{\partial f_0}{\partial I_i} = 0, \qquad (12)$$

$$\overline{\Delta\omega_i} = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta_s}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d\psi}{2\pi}\right)^p \Delta\omega_i(\theta_s, \psi_1\cdots\psi_p)$$

p - число осцилляторных степеней свободы.

Для решения (12) необходимо еще выразить $\tilde V$ с помощью (2) через χ_m.

II. Поля и интегральное уравнение.

Вынужденное решение системы уравнений Максвелла (2): (2a) можно выразить в замкнутой форме (П.1.4) через функцию Грина системы, с которой взаимодействует пучок (см. приложение 1). Мы здесь, однако, из соображений наглядности, рассмотрим более простой случай, когда пучок взаимодействует с "пустой" камерой ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) с бесконечно-проводящими стенками.

Уравнения (2) записываются тогда в виде

$$\Delta\tilde{\varphi} = -4\pi\int d\rho^3\,\tilde{f}$$

$$\Delta\tilde{\vec{A}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\vec{A}}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\int d\rho^3\,\vec{v}\tilde{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\tilde{\varphi} \qquad (13)$$

Используется кулоновская калибровка $div\,\vec{A} = 0$.

Граничные условия на потенциалы можно распределить так, чтобы $\varphi = 0$ на границе, при этом граничные условия на $\vec{A}$ выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия для полей.

Решение (13) ищем в виде разложения по собственным функциям задачи, удовлетворяющим уравнениям

$$\Delta\varphi_\varkappa + \varkappa^2\varphi_\varkappa = 0\,; \quad \Delta\vec{A}_\kappa + \kappa^2\vec{A}_\kappa = 0. \qquad (14)$$

В силу условия $\varphi = 0$ на границе, $\varkappa^2 \neq 0$. Будем считать, что $\vec{A}_\kappa$ и $\varphi_\varkappa$ удовлетворяют условиям нормировки:

$$\int dV\,\vec{A}^*_\kappa(\vec{r})\,\vec{A}_{\kappa'}(\vec{r}) = 4\pi\,\delta_{\kappa,\kappa'}$$

$$\int dV\,\varphi^*_\varkappa(\vec{r})\,\varphi_{\varkappa'}(\vec{r}) = 4\pi\,\delta_{\varkappa,\varkappa'} \qquad (14a)$$

В тех случаях, когда спектры уравнений (14) непрерывны, символы Кронекера в (14а) должны быть заменены на δ -функции.

Запишем решение первого уравнения из (13):

$$\tilde{\varphi}(\vec{r},t) = \sum_{\varkappa^2}\frac{\varphi_\varkappa(\vec{r})}{\varkappa^2}\int d\Gamma\,\varphi^*_\varkappa(\vec{r})\,\tilde{f} \qquad (15)$$

Разложение $\tilde{\vec{A}}(\vec{r},t)$) можно представить в виде:

$$\vec{A} = c\sum_\kappa \vec{A}_\kappa(\vec{r})\,\tilde{Q}_\kappa(t) \qquad (16)$$

Если спектр $\{\kappa\}$ непрерывен, суммирование в (16) должно быть заменено интегрированием. Из (13) получаем уравнение для $Q_\kappa(t)$

$$\ddot{\tilde{Q}}_\kappa(t) + c^2\kappa^2\tilde{Q}_\kappa(t) = e\int d\Gamma\,(\vec{v}\vec{A}_\kappa)^*\tilde{f} \qquad (17)$$

Решение уравнения (17) ищем в виде:

$$\tilde{Q}_\kappa(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_{\kappa l}\, e^{-i(l\omega_0+\omega)t}$$

$$q_{\kappa,l} = e\,\frac{\int d\Gamma\,(\vec{v}\vec{A}_\kappa)^*_l\,\tilde{f}}{c^2\kappa^2 - (\omega + l\omega_0)^2} \qquad (18)$$

После подстановки (18) в (16), а (16) и (15) в (12) получаем (с точностью до величин порядка $\frac{\Delta}{(m_i - m_i')\omega_i - l\omega_0}$) интегральное уравнение для $\bar{\chi}_m(J)$.

$$(\omega - m_i\omega_i)\,\bar{\chi}_m(J) = e^2 m_i\frac{\partial f_0}{\partial I_i}\cdot$$

$$\cdot\left\{\sum_\kappa\sum_n \frac{(\vec{v}\vec{A}_\kappa)_{m,n}}{c^2\kappa^2 - (\omega + n\omega_0)^2}\int d\Gamma\,(\vec{v}\vec{A}_\kappa)^*_{m,n}\,\bar{\chi}_m(J) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varkappa^2}\sum_n \frac{(\varphi_\varkappa)_{m,n}}{\varkappa^2}\int d\Gamma\,(\varphi_\varkappa)^*_{m,n}\,\bar{\chi}_m(J)\right\} \qquad (19)$$

Уравнение (19) можно записать также в виде:

$$(\omega - m_i\omega_i)\bar{\chi}_m(J) = e^2 m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} \sum_n \int d\Gamma' \bar{\chi}(J) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left(v_\alpha v_\beta G_{\alpha\beta}(\vec{z}, \vec{z}' | \omega + n\omega_0) \right)_{m,n}^{m,n} - \left(\Delta(\vec{z}, \vec{z}') \right)_{m,n}^{m,n} \right\} \quad (19a)$$

где $\Delta(\vec{z}, \vec{z}')$ – функция Грина первого уравнения (14), $G_{\alpha\beta}(\vec{z}, \vec{z}' | \omega)$ – Фурье-образ функции Грина второго уравнения из (14).

Полученное уравнение в форме (19а) пригодно для описания взаимодействия пучка с камерой, элементы которой имеют произвольные ε и μ.

В дальнейшем, имея в виду взаимодействие с системами, имеющими конечную добротность, мы будем пользоваться уравнением в форме (19), описывая поглощение энергии поля феноменологически: $\omega \to \omega + i\lambda_K$ (более подробно см. в приложении 1).

Уравнения (19), (19а) представляют собой однородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода и спектр этих уравнений определяет спектр коллективных возбуждений пучка. Поскольку ядро (19) не эрмитово, собственные значения (19) будут, вообще говоря, комплексны, поэтому среди решений (19) могут оказаться неустойчивые.

Неустойчивости, возникающие при когерентном взаимодействии пучка с камерой могут быть двух типов: неустойчивости, обязанные конечной добротности элементов вакуумной камеры (сюда же относится и излучение), и неустойчивости, которые могут возникать и при бесконечной добротности элементов камеры.

Неустойчивости первого типа будем называть диссипативными, а второго – динамическими /5/. В качестве примера динамической неустойчивости кратко рассмотрим резонансное взаимодействие сгустка с высокодобротным резонатором (подробно см. в /6/). При выполнении резонансного условия:

$$\omega_K + m_i\omega_i = n\omega_0 ; \quad \omega_K = c \cdot K \quad (20)$$

(по i суммирования нет) легко получить из (19) дисперсионное уравнение (в отсутствии разброса).

$$(\omega' - \varepsilon)(\omega' + i\lambda_K) + N m_i \langle V_{m,n}^{2'} \rangle = 0 \quad (20a)$$

Здесь $\omega' - \varepsilon = \omega - m_i\omega_i$

$$V_{m,n}^2(J) = \frac{e^2}{2\omega_K} \left| (\vec{v}\vec{A}_K)_{m,n} \right|^2$$

ε – расстройка ($\varepsilon = \omega_K + m_i\omega_i - n\omega_0$).

Из (20а) следует, что, в отсутствии трения, возможна неустойчивость, когда $m_i > 0$ (суммовой резонанс) и

$$\varepsilon^2 < 4 N m_i \langle V_{m,n}^{2'} \rangle \quad (20б)$$

При выполнении условия (20) возможно, конечно, и возникновение диссипативной неустойчивости, но мы не будем здесь останавливаться на этом случае.

Если спектр колебаний поля дискретен и не близок (в смысле 20) к спектру колебаний пучка, то сумма по в (19) слабо зависит от точного значения ω (это относится и к тому случаю, когда спектр колебаний поля непрерывен). При этом в правой части (19) ω можно заменить на $m_i\omega_i + i\lambda_K$. Поэтому в нерезонансном случае уравнение (19) можно упростить:

$$(\omega - m_i\omega_i)\bar{\chi}_m(J) = e^2 m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{n,K} \frac{(\vec{v}\vec{A}_K)_{m,n}}{c^2K^2 - (m_i\omega_i + n\omega_0 + i\lambda_K)^2} \int d\Gamma (\vec{v}\vec{A}_K)^*_{m,n} \bar{\chi}(J) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\varkappa^2, n} \frac{(\varphi_\varkappa)_{m,n}}{\varkappa^2} \int d\Gamma (\varphi_\varkappa)^*_{m,n} \bar{\chi}_m(J) \right\}.$$

(Если спектр колебаний поля непрерывен, то нужно положить $\lambda_K = \delta \to 0$. При этом δ определяет правило обхода).

Иногда бывает удобно пользоваться не интегральными уравнениями (19), (19а), а системой алгебраических уравнений для моментов

$$X^{\kappa}_{m,n} = \int d\Gamma \, (\vec{v}\vec{A}_{\kappa})^{*}_{m,n} \, \overline{\chi}_{m}(\mathcal{J})$$

и

$$Z^{\varkappa}_{m,n} = \int d\Gamma \, (\varphi_{\varkappa})^{*}_{m,n} \, \overline{\chi}_{m}(\mathcal{J})$$

Из (19) получим

$$(\omega - m_i\omega_i) X^{\kappa}_{mn} = \sum_{n',\kappa'} \frac{\rho^{\kappa,\kappa'}_{n,n'} X^{\kappa'}_{m,n'}}{c^2\kappa^2 - (\omega + n'\omega_0)^2} - \sum_{n',\varkappa} \frac{t^{\kappa,\varkappa}_{n,n'} Z^{\varkappa}_{m,n'}}{\varkappa^2}$$

$$(\omega - m_i\omega_i) Z^{\varkappa}_{m,n} = \sum_{n',\kappa} \frac{t'_{n,n'} X^{\kappa}_{m,n'}}{c^2\kappa^2 - (\omega + n'\omega_0)^2} - \sum_{n',\varkappa'} \frac{\rho^{\varkappa\varkappa'}_{nn'} Z^{\varkappa'}_{m,n'}}{\varkappa^{2'}} \tag{21}$$

где

$$\rho^{\kappa,\kappa'}_{n,n'} = e^2 \int d\Gamma \, m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} (\vec{v}\vec{A}_{\kappa})^{*}_{m,n} (\vec{v}\vec{A}_{\kappa'})_{m,n'}$$

$$\rho^{\varkappa,\varkappa'}_{n,n'} = e^2 \int d\Gamma \, m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} (\varphi_{\varkappa})^{*}_{m,n} (\varphi_{\varkappa'})_{m,n'}$$

$$t^{\kappa,\varkappa}_{n,n'} = e^2 \int d\Gamma \, m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} (\vec{v}\vec{A}_{\kappa})^{*}_{m,n} (\varphi_{\varkappa})_{m,n'} \tag{21a}$$

III. О сумме декрементов коллективных мод пучка.

В этом пункте мы применим уравнения (19), (21) к вычислению суммы декрементов мод коллективных возбуждений пучка, взаимодействующего с некоторым элементом вакуумной камеры.

Вообще, если имеется некоторое количество связанных осцилляторов (конечное, или бесконечное) то можно высказать утверждение о том, что сумма декрементов этой системы (если только она сходится) не зависит от связей между осцилляторами. Утверждение такого рода обычно называют теоремой о сумме декрементов.

Рассмотрим с этой точки зрения систему, состоящую из осцилляторов поля и мод коллективных колебаний пучка. Будем считать, что осцилляторы поля могут обладать некоторым собственным трением. Строго говоря, теорема о сумме декрементов может быть доказана только для такой замкнутой системы. Не трудно показать, что в этом случае сумма декрементов системы просто равна сумме декрементов осцилляторов поля в отсутствии взаимодействия.

Физический интерес, однако, представляет не полная сумма декрементов, а сумма декрементов тех нормальных колебаний, в которых содержится основная часть энергии коллективного движения частиц пучка. За исключением отмеченного выше случая резонансного взаимодействия удаётся сформулировать некоторое общее утверждение о сумме декрементов коллективных мод пучка.

Удобно исходить из (21). Согласно известной теореме алгебры о сумме характеристических корней системы линейных, однородных уравнений для суммарного когерентного сдвига частоты Ω имеем:

$$\Omega = \sum_{\alpha} (\omega - m_i\omega_i)_{\alpha} = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha,\alpha} \tag{22}$$

Отделяя в (22) мнимую часть получим: $\Delta = -\mathcal{J}m\,\Omega$

$$\Delta = N e^2 \mathcal{J}m \left\{ \sum_{\kappa} \sum_{m,n} \frac{\left\langle m_i \frac{\partial}{\partial I_i} V^2_{m,n} \right\rangle}{c^2\kappa^2 - (m_i\omega_i + n\omega_0 + i\lambda_{\kappa})^2} \right\} \tag{23}$$

где

$$V_{m,n}^2 = |(\vec{v}\vec{A}_\kappa)_{m,n}|^2$$

скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по ансамблю: если спектр осцилляторов поля непрерывен, то суммирование по K должно быть заменено интегрированием. Так как весь расчёт ведется в первом порядке по взаимодействию, в правой части (23) ω заменена на $m_i\omega_i$. Это, разумеется, справедливо лишь в том случае, когда когерентные сдвиги частот отдельных мод возбуждений $\Delta\omega_{m,n}$ много меньше $|cK - m_i\omega_i - n\omega_0|$, что соответствует нерезонансности взаимодействия /6/. Из выражения (23) видно, что для высокодобротных систем сумма декрементов может существенно зависеть от расстройки, в то время как для низкодобротных систем, как отдельные декременты, так и сумма декрементов коллективных возбуждений слабо зависит от частот. Под низкодобротной системой здесь и далее понимается система, поле в которой успевает затухнуть за время одного оборота частицы в машине.

Нетрудно видеть, что Δ выражено через парциальные "мощности" $\dot{I}_i$ в задаче о взаимодействии отдельной частицы с внешней системой. В этом можно убедиться, решая уравнения Максвелла с током $e\vec{v}(t)\delta(\vec{z}-\vec{z}_0(t))$, и усредняя затем мгновенную мощность по быстрому времени (по азимуту и по фазам колебаний)

$$\dot{I}_i = \overline{\frac{\partial V}{\partial \psi_i}}$$

Таким образом получаем:

$$\Delta = \mathcal{N}\left\langle \sum_{i=1}^{p} \delta_i \right\rangle \qquad (24)$$

p – число осцилляторных степеней свободы; δ_i – декремент отдельной частицы по i -й степени свободы. По определению:

$$\delta_i\,(I) = -\frac{\partial \dot{I}_i}{\partial I_i}$$

Следовательно можно сформулировать теорему: сумма декрементов нормальных мод возбуждений пучка равна сумме декрементов отдельных частиц, взаимодействующих с внешней системой независимо друг от друга[x)].

Применительно к задачам демпфирования коллективных колебаний пучка можно сформулировать эту теорему в более узком и конкретном смысле. Для коллективного взаимодействия практически существенна область низких частот, определяемых характерными частотами движения частиц в машине и геометрическими размерами элементов вакуумной камеры и пучка. При этом высшие моды возбуждений $|m_i| \gg 1$, $|n| \gg 1$ затухают, главным образом, из-за разброса по частотам и (для лёгких частиц) синхротронного излучения. Поэтому представляет интерес сумма декрементов не всех мод, а только тех мод колебаний, которые не подавляются разбросом (или синхротронным затуханием). Относительно суммы декрементов этих колебаний можно высказать утверждение, аналогичное сформулированному выше, если в правой части (23) оставить лишь те осцилляторы поля, которые эффективно взаимодействуют только с низкочастотными модами колебаний пучка.

Равенство (24) можно записать в форме:

$$\Delta = -\mathcal{N}\langle \overline{div_p \vec{F}} \rangle \qquad (25)$$

которая является явным выражением суммы декрементов через силу реакции "излучения"

$$\vec{F} = e\vec{E}(\vec{z},\vec{p},t) + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\times\vec{H}(\vec{z},\vec{p},t)\right] \qquad (26)$$

Отметим, что сумма декрементов (24), а также и парциальные декременты, в общем случае не пропорциональны полной мощности потерь

$$W = e^2 \mathcal{J}m\left\{\sum_K \sum_{m,n} \frac{(m_i\omega_i + n\omega_0)\, V_{m,n}^2}{c^2K^2 - (m_i\omega_i + n\omega_0 + i\lambda_K)^2}\right\}$$

как это было, например, для синхротронного излучения. Физичес-

---

x) В этой теореме влияние разброса не учитывается, так как при выводе теоремы фактически использовалось предположение о дискретности невозмущенного спектра колебаний пучка.

ки это связано с тем, что при синхротронном излучении основной вклад в декременты дают высокие частоты ($\omega \sim \omega_0 \gamma^3$), поэтому сила реакции излучения определяется только траекторией частицы и направлена против скорости

$$\vec{F}_c = -\frac{W}{c^2}\vec{v}$$

Для коллективного движения, как уже отмечалось, взаимодействие в основном обязано низкочастотным колебаниям поля, при этом сила "радиационного" трения в значительной степени определяется характеристиками устройства, с которым взаимодействует пучок (его геометрией и т.п.), поэтому здесь нет оснований считать, что она будет направлена вдоль скорости.

В качестве иллюстрации можно привести два примера, когда декремент бетатронных колебаний возникает только за счёт возбуждения системы поперечным движением и не пропорционален полной мощности потерь.

Если сгусток осциллирует в бесконечном двусвязном волноводе, то полная мощность потерь пропорциональна квадрату амплитуды бетатронных колебаний и исчезает при стремлении амплитуды к нулю, в то же время декремент поперечных колебаний остаётся, очевидно, конечным /3/. (Случай, когда сгусток взаимодействует с двусвязным волноводом конечной длины, рассматривался в /4/).

Другим примером может служить возбуждение резонатора осцилляторным движением пучка ($\omega_k - \omega_s = n\omega_0$), рассмотренное в /6/. При этом величина декремента колебаний существенно зависит от расстройки, в то время как полные когерентные потери могут быть вовсе не связанными с этим резонатором.

В этой связи обсудим возможности демпфирования когерентных колебаний пучков с помощью внешних систем. Для подавления отдельной моды колебаний пучка может быть использовано некоторое узкополосное устройство (резонатор с конечной добротностью), способное возбуждаться данным типом колебаний. Однако этот способ может быть трудноосуществимым при одновременной неустойчивости нескольких мод. В таких случаях можно использовать широкополосные системы (длинные линии, низкодобротные резонаторы).

Здесь мы подробнее остановимся на возможности эффективного демпфирования такими системами не только бетатронных, но и синхротронных возбуждений /4/. Для того, чтобы внести декремент в продольное движение, необходимо обеспечить модуляцию средних потерь энергии продольным движением. Для некогерентных потерь (скажем, на синхротронное излучение) эта модуляция обеспечивается явной зависимостью силы радиационного трения от полного импульса, в то время как мгновенные когерентные потери, для движения по заданной траектории, могут слабо зависеть (или вовсе не зависеть) от полной энергии. Частотная модуляция средних потерь за счёт зависимости частоты обращения от энергии даёт практически очень малый эффект. Однако модуляцию когерентных потерь можно обеспечить, используя устройство, потери энергии в котором зависят от радиального положения пучка

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = F_{\parallel}\left[R(E)\right]$$

Вследствие зависимости в ускорителе радиального положения от энергии это приведет к появлению декремента в продольном движении. При этом неизбежно уменьшение декремента когерентных радиальных колебаний, так как при взаимодействии с низкодобротной системой сумма декрементов не зависит от связи радиального и продольного движения. Действительно, для системы с низкой добротностью (в указанном выше смысле) наведенное поле определяется однократным пролётом и не зависит (в линейном приближении) от устройства нормальных колебаний частицы возле равновесной траектории. Поскольку сумма декрементов выражается в виде (25), то ясно, что в линейном приближении сумма декрементов не зависит от радиально-продольной связи. Так, например, для накопителя с плоской равновесной орбитой парциальные декременты r ; z и синхротронных колебаний равны[x]:

---

x) См. также Приложение II.

$$\delta_r = \mathcal{N}\left\langle -\left(\frac{\partial F_r}{\partial \rho_r}\right)_s - \frac{d\Psi}{d\theta_s}\left(\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \rho_r}\right)_s - \frac{\bar{R}\,\Psi}{\rho_s}\left(\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \tau}\right)_s \right\rangle \tag{27}$$

$$\delta_{\parallel} = \mathcal{N}\left\langle \frac{d\Psi}{d\theta_s}\left(\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \rho_{\parallel}}\right)_s + \frac{\bar{R}\,\Psi}{\rho_s}\left(\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial \tau}\right)_s \right\rangle$$

$$\delta_z = -\mathcal{N}\left\langle\left(\frac{\partial F_z}{\partial \rho_z}\right)_s\right\rangle$$

Отсюда непосредственно видно, что указанная выше связь в сумму декрементов не входит: радиальный декремент уменьшается на величину декремента, вносимого в продольное движение. Заметим, однако, что уменьшение декремента радиальных колебаний не является принципиальным недостатком этого способа. Как подчеркивалось выше, демпфирование поперечных колебаний не обязано модуляции полных потерь и может, например, обеспечиваться специальной системой, не вносящей декремента в продольное движение (то-есть систем, для которых $\langle \partial F_{\parallel}/\partial R \rangle = 0$).

Таким образом, используя систему согласованных пластин, можно обеспечить устойчивость бунчированных пучков по всем степеням свободы.

Приложение 1.

В этом разделе для кратности записи воспользуемся "четырехмерными обозначениями". Будет использоваться метрика, в которой скалярное произведение двух 4-векторов есть $ab = a_0 b_0 - \vec{a}\vec{b}$; 4 - радиус вектор $x = (ct, \vec{r})$; по повторяющимся индексам предполагается суммирование; греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

Уравнения (2) можно переписать в ковариантной форме:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$\hat{L}_{\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu}(x) \tag{П.1.1}$$

где $F^{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\ ;\ F_{0i} = E_i\ ;\ F_{ik} = \varepsilon_{ik\ell} B_{\ell} \tag{П.1.2}$$

а $\hat{L}_{\nu}$ - некоторый линейный оператор, который можно получить комбинируя уравнения Максвелла (2) и материальные уравнения (2а), $\varepsilon_{ik\ell}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ - единичные полностью антисимметричные тензоры третьего и четвертого ранга, соответственно. К уравнениям для полей (П.2) необходимо еще добавить некоторые граничные условия, которые символически можно записать в виде

$$\hat{M}\{F_{\mu\nu}\}\big|_{\Gamma} = 0 \tag{П.1.3}$$

где $\hat{M}$ также линейный оператор, действующий на $F_{\mu\nu}$. Подставив в (П.1.1) и (П.1.3) $F_{\mu\nu}$ из (П.1.2), получим уравнения для 4-вектора потенциала

$$\hat{L}_A A_{\mu}(x) = -\frac{4\pi}{c} j_{\mu}(x) \tag{П.1.2а}$$

$$\hat{M}_A\{A_\mu\}\big|_\Gamma = 0 \qquad (\text{П.1.3а})$$

здесь $\hat{L}_A$ и $\hat{M}_A$ – линейные операторы, действующие на A_μ. Кроме того, будем считать, что на A_μ наложено некоторое калибровочное условие.

Вынужденное решение (П.1.1а), удовлетворяющее граничному условию (П.1.3а), можно записать в виде:

$$A_\mu = \int d^4x\, \mathcal{D}_{\mu\nu}(x;x')\, j^\nu(x') \qquad (\text{П.1.4})$$

где $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x;x')$ – функция Грина уравнения (П.1.2а):

$$\hat{L}_A \mathcal{D}_{\mu\nu}(x;x') = -\frac{4\pi}{c} g_{\mu\nu}\, \delta(x-x') \qquad (\text{П.1.2б})$$

$g_{\mu\nu}$ – метрический тензор ($g_{00} = 1$, $g_{ii} = -1$, $g_{\mu\nu} = 0$ $\mu \neq \nu$). Для однородных во времени систем

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x;x') = \mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}\,'|t-t').$$

Из принципа причинности следует, что

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{r},\vec{r}\,'|t-t'<0) = 0.$$

Запишем лагранжан взаимодействия частицы с полем (П.1.4)

$$\widetilde{V} = -e(uA) \qquad (\text{П.1.5})$$

где $u = 1/\gamma \cdot \dfrac{dx}{d\tau}$; τ – собственное время.

Подставив (П.1.5) в (П.1.6), после усреднения по равновесному азимуту получим:

$$\overline{\widetilde{V}} = -e^2 \int d\Gamma' \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\, \overline{\mathcal{X}}_{m,\omega}(\mathcal{I}) \cdot$$

$$\cdot \sum_n \Big(u_\mu u'_\nu G_{\mu\nu}(\vec{r},\vec{r}\,'|\omega + n\omega_0)\Big)_n \qquad (\text{П.1.6})$$

где: $G_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}\,'|\omega)$ – Фурье-образ функции Грина $\mathcal{D}_{\mu\nu}$.

Если подставить теперь (П.1.7) в (12), то получим уравнение для $\overline{\mathcal{X}}_m$:

$$(\omega - m_i\omega_i)\overline{\mathcal{X}}_m(\mathcal{I}) = -e^2 m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} \sum_{\substack{n=-\infty \\ mn}}^{\infty} \int d\Gamma'\, \overline{\mathcal{X}}_m(\mathcal{I}') \cdot$$

$$\cdot \Big(u_\mu u'_\nu G_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}\,'|\omega + n\omega_0)\Big)_{mn}. \qquad (\text{П.1.7})$$

здесь

$$u_\mu u'_\nu G_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{m,n}\sum_{m',n'} \big(u_\mu u'_\nu G_{\mu\nu}\big)_{m,n}^{m',n'} e^{i(m_i\psi_i - m'_i\psi'_i + n\theta_3 - n'\theta'_3)}$$

При получении (П.1.7), как ранее, отбрасывались члены $\sim \dfrac{\Delta}{(m-m')\omega - \ell\omega_0}$. Видно, что уравнения (П.1.7) и (19а) вполне идентичны. Фурье-образ функции Грина $G_{\mu\nu}(\vec{r},\vec{r}\,'|\omega)$ можно представить разложением по собственным функциям "Фурье-образа" оператора $\hat{L}_A$

$$\hat{L}_A(i\omega)\, A_\mu(\vec{r},\lambda) = \lambda(i\omega)\, A_\mu(\vec{r},\lambda);$$

$$\int dV\, A^*_\mu(\vec{r},\lambda)\, A_\mu(\vec{r},\lambda') = 4\pi\,\delta_{\lambda,\lambda'}$$

Из уравнения (П.1.1б) получаем

$$G_{\mu,\nu} = \frac{1}{c} \sum_{\lambda} \frac{A_\mu(\vec{r},\lambda) A_\nu^*(\vec{r}',\lambda)}{\lambda(i\omega)}$$

При этом уравнение $\lambda(i\omega) = 0$ определяет, очевидно, спектр собственных колебаний поля.

Подставив разложение $G_{\mu\nu}(\omega)$ в (П.1.7) получаем интегральное уравнение для $\chi_{m,0}$ в форме (19)

$$(\omega - m_i\omega_i)\overline{\chi}_m(\mathcal{J}) = -\frac{e^2}{c} m_i \frac{\partial f_0}{\partial I_i} \sum_{n,\lambda} \frac{(uA_\lambda)_{m,n}}{\lambda(i\omega)} \cdot$$

$$\cdot \int d\Gamma (uA_\lambda)^*_{m,n} \overline{\chi}_m(\mathcal{J}).$$

(П.1.7а)

Это уравнение, так же, как и (П.1.7), пригодно для описания взаимодействия пучка с камерой, элементы которой обладают произвольным ε и μ. Вводя моменты

$$X_{m,n}(\lambda) = \int d\Gamma (uA_\lambda)^*_{m,n} \overline{\chi}_m(\mathcal{J})$$

можно получить из (П.1.7а) уравнение для $X_{m,n}$, аналогичное (21).

Характер свободных возбуждений поля полностью определяется особенностями $G_{\mu,\nu}(\vec{r},\vec{r}'/\omega)$, в плоскости комплексной переменной ω . Так если $G_{\mu\nu}(\omega)$ не имеет других особенностей, кроме полюсов, расположенных вблизи или на действительной оси

$$G_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}'/\omega) = \sum_{\alpha} \frac{f^{\alpha}_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}')}{\omega - \omega_\alpha}, \quad \omega_\alpha = \Omega_\alpha - i\gamma_\alpha$$

так что $\Omega_\alpha \gg \gamma_\alpha$, то поля осциллируют с частотами $\omega = \Omega_\alpha$, затухая с постоянной времени $\tau \sim 1/\gamma_\alpha$. В этом случае поля можно представить набором осцилляторов с собственным трением $\lambda_\alpha = \gamma_\alpha$. Если полюса $G_{\mu\nu}(\omega)$ расположены далеко от действительной оси, а также если $G_{\mu\nu}$ имеет другие (не полюсные) особенности, описание возбуждений поля

в терминах осцилляторов становится неудобным.

Использование аппарата функции Грина удобно еще и потому, что функция Грина характеризует импедансные свойства системы, с которой взаимодействует пучок.

Вычислим, например, с помощью (П.1.4) тензор электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}(x) = \int d^4x' \, Z^{\rho}_{\mu\nu}(\vec{r},\vec{r}'/t-t') \, j_\rho(\vec{r}',t') \qquad \text{(П.1.8)}$$

здесь

$$Z^{\rho}_{\mu,\nu} = \frac{\partial \mathcal{D}^{\rho}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \mathcal{D}^{\rho}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}. \qquad \text{(П.1.8а)}$$

Тензор (П.1.8а) можно назвать обобщенным импедансом системы в том смысле, что он характеризует отклик системы на единичное воздействие. Другими словами $Z^{\rho}_{\mu\nu}$ - есть поле, наводимое точечным зарядом (в этом смысле (П.1.8) можно понимать, как сумму полей, возбуждаемых отдельными частицами пучка). Отметим, что $Z^{\rho}_{\mu\nu}$ определена вполне однозначно, тогда как $\mathcal{D}_{\mu\nu}(\vec{r};\vec{r}'/\tau)$, вообще говоря, зависит от выбора калибровки.

Приложение П.

В этом пункте мы проведем вычисления суммы декрементов коллективных мод пучка в линейном приближении. Для простоты будем считать, что пучок движется в азимутально-симметричном накопителе. Легко видеть, что в линейном приближении сумма декрементов не зависит от формы равновесного распределения. Поэтому все расчёты можно проводить для δ -образного распределения по амплитудам колебаний.

Удобно исходить непосредственно из (24). С помощью (П.1.4) получаем

$$V = e^2 \int_0^\infty d\tau\, v_i(t)\, v'_k(t-\tau)\, \mathcal{D}_{ik}(\vec{r}(t), \vec{r}'(t-\tau)/\tau) \qquad \text{(П.П.2)}$$

Мы здесь используем кулоновскую калибровку $div\,\vec{A} = 0$. При этом можно считать, что вся вихревая часть поля содержится в пространственных компонентах $\mathcal{D}_{ik}$.

Сумма декрементов есть

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_z + \Delta_{\parallel} \qquad \text{(П.П.2)}$$

где Δ_r ; Δ_z ; $\Delta_{\parallel}$ - парциальные декременты r, z и синхротронных колебаний, которые записываются в виде:

$$\Delta_r = -N \left\langle \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial I_r \partial \psi_r}} \right\rangle$$

$$\Delta_{\parallel} = -N \left\langle \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial I_{\parallel} \partial \psi_{\parallel}}} \right\rangle$$

$$\Delta_z = -N \left\langle \overline{\frac{\partial^2 V}{\partial I_z \partial \psi_z}} \right\rangle$$

V - определено в (П.П.1); скобки $\langle\ \rangle$ обозначают усреднение по периодам колебательных движений.

Разложим подинтегральное выражение (П.П.1) в ряд Фурье по азимуту:

$$v_i v'_k \mathcal{D}_{ik} = \sum_{n,n'} e^{in\theta(t) - in'\theta(t-\tau)} \left(v_i v'_k \mathcal{D}_{ik}\right)_n^n$$

После усреднения по равновесному азимуту получим выражения для парциальных декрементов:

$$\Delta_r = -Ne^2 \sum_n \left\langle \frac{\partial^2}{\partial I_r \partial \psi_r} \int_0^\infty d\tau\, e^{in(\omega_0\tau + \tilde{\theta}(t,\tau))} \left(v_i v'_k \mathcal{D}_{ik}\right)_n^n \right\rangle$$

$$\Delta_{\parallel} = -Ne^2 \sum_n \left\langle \frac{\partial^2}{\partial I_{\parallel} \partial \psi_{\parallel}} \int_0^\infty d\tau\, e^{in(\omega_0\tau + \tilde{\theta}(t,\tau))} \left(v_i v'_k \mathcal{D}_{ik}\right)_n^n \right\rangle$$

$$\Delta_z = -Ne^2 \sum_n \left\langle \frac{\partial^2}{\partial I_z \partial \psi_z} \int_0^\infty d\tau\, e^{in\omega_0\tau} \left(v_i v'_k \mathcal{D}_{ik}\right)_n^n \right\rangle$$

здесь $\tilde{\theta}(t,\tau) = \theta(t) - \theta(t-\tau) - \omega_0\tau$

Отсюда в линейном приближении получим:

$$\Delta_r = \Delta_r^{(0)} + \overline{\psi}\, \Delta_r^{(1)}$$

где:

$$\Delta_z^{(0)} = Ne^2 Re \sum_n \int_0^\infty d\tau\, e^{in\omega_0\tau} \Big\{ \sin\omega_z\tau \Big[\frac{v_s R}{v_z \rho_s} \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{D}_{yy}^{(s)}}{\partial\tau\partial\tau'} \Big)_n^n + \frac{v_z v_s}{\rho_s} \big(\mathcal{D}_{yy}^s \big)_n^n \Big] - 2i \frac{v_z \omega_0}{\rho_s} \cos\omega_z\tau \Big[\Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{yz}^s}{\partial\tau} \Big)_n^n - \Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{zy}^s}{\partial\tau'} \Big)_n^n \Big] \Big\}$$

(П.П.3)

$$\Delta_z^{(1)} = Ne^2 Re \sum_n \int_0^\infty d\tau\, e^{in\omega_0\tau} \Big\{ \frac{in v_s^2}{\rho_s} \cos\omega_z\tau \cdot \Big[\Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{yy}^s}{\partial\tau} \Big)_n^n + \Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{yy}^s}{\partial\tau'} \Big)_n^n \Big] - \frac{i v_s \omega_z n}{\rho_s} \sin\omega_z\tau \cdot \Big[\big(\mathcal{D}_{yz}^s \big)_n^n - \big(\mathcal{D}_{zy}^s \big)_n^n \Big] \Big\}.$$

(П.П.4)

$$\Delta_{\parallel} = \Delta_{\parallel}^{(0)} + \overline{\Psi}\, \Delta_{\parallel}^{(1)}$$

$$\Delta_{\parallel}^{(0)} = e^2 N \sum_n \int_0^\infty d\tau\, \frac{n^2 v_s^2}{\mu_c \Omega_c} \cos\omega_0\tau\, \sin\Omega_c\tau\, \big(\mathcal{D}_{yy}^s \big)_n^n$$

(П.П.5)

$$\Delta_{\parallel}^{(1)} = e^2 N Re \sum_n \int_0^\infty d\tau\, e^{in\omega_0\tau} \Big\{ \overline{\Psi}\, \frac{v_s \mu_c \Omega_c R}{\rho_s} \sin\Omega_c\tau \cdot \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{D}_{yy}^{(s)}}{\partial\tau\partial\tau'} \Big)_n^n - i \frac{n v_s^2}{\rho_s} \cos\Omega_c\tau \Big[\Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{yy}^s}{\partial\tau} \Big)_n^n + \Big(\frac{\partial \mathcal{D}_{yy}^s}{\partial\tau'} \Big)_n^n \Big] \Big\}$$

(П.П.6)

Δ_z получается из Δ_τ заменой индекса τ на z.

Из приведенных формул видно, что, вообще говоря, сумма декрементов коллективных мод в линейном приближении зависит от радиально-продольной связи. Однако для низкодобротных систем, скажем, "типа длинных линий" видно, что в интегралах по τ существенна область

$$\tau < \frac{max\{l_b; l\}}{c}$$

(l_b - длина сгустка, l - длина пластины). При этом сумма декрементов низкочастотных возбуждений определяется, главным образом, членами Δ_z и $\Delta_\tau^{(0)}$ и не зависит от радиально - продольной связи.

Литература

1. Н.С.Диканский. Диссертация, Новосибирск (1969).
2. Н.С.Диканский, М.М.Карлинер и др. "А.Э.", 22, 188 (1967).
3. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. Препринт № 315, ИЯФ СО АН СССР (1969).
4. Я.С.Дербенев. Н.С.Диканский. Препринт № 318, ИЯФ СО АН СССР (1969).
5. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. Препринт № 326, ИЯФ СО АН СССР (1969).
6. Я.С.Дербенев, Н.С.Диканский. Доклад на Всесоюзном совещании по ускорителям заряженных частиц, Москва (1968).

Ответственный за выпуск Д.В.Пестриков
Подписано к печати 11.У1-1970г.
Усл. 1,3 печ.л., тираж 200 экз. Бесплатно.
Заказ № 34 . ПРЕПРИНТ.

Отпечатано на ротапринте в ИЯФ СО АН СССР, нв.