ИНСТИТУТ
ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СОАН СССР

ИЯФ 48-70

И.Ф.Гинзбург, В.Л.Поляченко, А.М.Фридман

О КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ КОЛЕЦ САТУРНА

Новосибирск

1970

И.Ф.Гинзбург, В.Л.Поляченко, А.М.Фридман

О КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ КОЛЕЦ САТУРНА

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется дискутируемый в литературе вопрос о возможной неустойчивости колец Сатурна, приводящей к падению части их вещества на планету. Показано, что конечная толщина и малая плотность колец могут обеспечить их устойчивость относительно произвольных возмущений. Найден критерий устойчивости, позволяющий сделать выбор между различными экспериментальными оценками параметров колец. Условие падения части вещества колец на планету оказывается намного более сильным, нежели условие расслоения, и при существующих параметрах колец невыполнимым.

On the critical density of Saturn's rings.

I.F.Ginsburg, V.L.Polyachenko, A.M.Fridman.

Abstract

The work investi gates a question, discussing in the literature, about a possible unstability of Saturn's rings, resulting in the fall of their matter to planet. It is shown that the finite thickness and small density of rings can ensure their stability to arbitrary disturbances. The criterion of stability, making it possible to do a choice between different empirical appreciations of rings' parameters, is obtained. The condition of the fall of rings matter to planet is much stronger than the condition of the stratification.

1. Вопросом устойчивости колец Сатурна занимались многие авторы /1-7/. Из "классических" исследований на эту тему, относящихся еще к 19-ому и даже 18-ому (Лаплас /1/) веку, наиболее полным является известный трактат Максвелла /3/, получивший премию Адамса. Максвелл окончательно (начало было положено работами Лапласа /1/ и Ковалевской /2/) доказал теоретически, что твердотельные кольца и кольца в модели несжимаемой жидкости были бы абсолютно нестабильны, и пришел к выводу о неизбежности метеорного строения колец Сатурна. (Этот вывод был затем полностью подтверждён многочисленными данными оптических наблюдений (см., например, /8, 9/). Таким образом, возник вопрос об устойчивости плоской вращающейся системы, состоящий из пылевидной материи (материи с давлением P, близким к нулю).

При исследовании устойчивости пылевидного кольца Максвелл представляет кольцо как систему концентрических орбит и переходит затем к рассмотрению устойчивости отдельных орбит частиц. Результаты изучения устойчивости отдельных орбит частиц Максвелл использует впоследствии при выводе устойчивости всего кольца как целого. При этом предполагается, что механизм неустойчивости всего кольца совершенно аналогичен механизму неустойчивости отдельной орбиты, состоящей из некоторого числа частиц. Её устойчивость относительно радиальных возмущений не вызывает сомнений. Поэтому Максвеллу представляются опасными только тангенциальные возмущения.

В действительности более детальное рассмотрение колец как совокупности взаимодействующих частиц показывает, что радиальные возмущения, приводящие к слипанию орбит, и различные тангенциальные возмущения опасны в одинаковой степени (в рамках естественного в этой задаче коротковолнового приближения - см.ниже). Присутствие большой центральной массы стабилизирует эту неустойчивость. Действительно, в предельном случае бесконечно малой объёмной плотности вещества диска, когда взаимодействием между отдельными частицами диска по сравнению с действием на них центральной массы можно пренебречь, мы приходим к задаче Кеплера с очевидно устойчивым решением. Однако, если диск бесконечно тонок, то при сколь угодно малой поверхностной плотности вещества для длин волн возмущения $\lambda \to 0$, инкремент неустойчивости $\gamma \to \infty$ /10/. Очевидно, что в этом случае конечная центральная масса не может привести к стабилизации.

В настоящей работе показано, что конечная толщина h и малая плотность колец Сатурна обеспечивают их устойчивость. Критерий устойчивости (11) позволяет сделать выбор между различными экспериментальными оценками параметров колец.

2. В работе /10/ показано, что длинноволновые возмущения (с $\lambda \sim R$) "почти устойчивы" даже в отсутствие центрального тела. Поэтому не удивителен результат Ябошиты /6,7/ о том, что такие возмущения не приводят к неустойчивости колец Сатурна, стабилизируемых центральным телом (результат получен с помощью машинного эксперимента). Если толщина диска $h \gg \lambda$ то наша задача сводится к вопросу об устойчивости бесконечного цилиндра, которая доказана в работах /11, 12/ (относительно произвольных возмущ ний).

Таким образом, необходимо использовать возмущения с такой длиной волны λ, что $h \lesssim \lambda \ll R$. Радиальные размеры колец Сатурна более, чем в тысячу раз превосходят их толщину. Поэтому мы рассмотрели случай $h \ll \lambda \ll R$, когда диск можно считать бесконечно тонким и получили критерий устойчивости (11). Значительно более громоздкое исследование случая $\lambda \sim h$ может привести только к изменению численного коэффициента в условии (11), которое выполняется с большим запасом.

Как отмечалось выше, на основании экспериментальных данных /8, 9/ кольца Сатурна можно рассматривать как холодный газ. Вследствие этого кинетический метод описания не даёт результатов, отличных от гидродинамического.

Итак, исследуем устойчивость вращающегося кольца массы m с внутренним и внешним радиусом r_1 и r_2, соответственно, в поле центральной массы M относительно произвольных возмущений, лежащих в его плоскости. Равновесие такой системы определяется условием:

$$\frac{V_\varphi^{(0)2}}{r} = \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial r} \qquad (1)$$

$$\Psi^{(0)} = -G\left[\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma^{(0)}(r')\, r'\, dr'\, d\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi'}} + \frac{M}{r}\right] \qquad (2)$$

Здесь $V_\varphi^{(0)}(r)$; $\Psi^{(0)}(r)$; $\sigma^{(0)}(r)$ – соответственно, скорость, потенциал и поверхностная плотность кольца в точке r ; G – гравитационная постоянная.

Система линеаризованных уравнений гидродинамики, записанная в цилиндрических координатах, имеет в рассматриваемом случае вид:

$$\frac{\partial V_r}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - 2\Omega_0 V_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\kappa_0^2}{2\Omega_0} V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_0 V_r) + \frac{\sigma_0}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения: σ – поверхностная возмущенная плотность, V_r и V_φ – радиальная и азимутальная возмущенные скорости, Ψ – возмущенный потенциал, $\Omega_0 = \frac{V_\varphi^{(0)}}{r}$ – локальная угловая скорость вращения, $\kappa_0^2 = 2\Omega_0\left(\Omega_0 + \frac{\partial V_\varphi^{(0)}}{\partial r}\right)$ – эпициклическая частота. Связь возмущенного потенциала Ψ и возмущенной плотности σ даётся уравнением Пуассона:

$$\Delta \Psi = 4\pi G \sigma \cdot \delta(z) \qquad (6)$$

Как уже отмечалось, рассмотрение следует вести в коротковолновом пределе $kr \gg 1$. Тогда возмущение плотности можно выбрать в виде

$$\sigma = \tilde{\sigma} \exp[i(kr + l\varphi + \omega t)] \qquad (7)$$

При этом связь (6), интегральная для произвольных значений kr, становится локальной и

$$\Psi = -\frac{2\pi G}{k} e^{-k|z|}\,\sigma \qquad (8)$$

Теперь из (3) - (5), (8) получаем дисперсионное уравнение (уравнение, аналогичное (9), но без учёта центральной массы было получено ранее в работе /10/ в связи с исследованием проблемы о спиральных ветвях галактик):

$$(\omega + l\Omega_0)^2 = \kappa_0^2 - 2\pi G\sigma_0 k \qquad (9)$$

Поскольку невозмущенная скорость $V_0^2 \approx \frac{GM}{r}$, то

$$\kappa_0^2 = 2\left(\frac{V_0}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial (V_0^2)}{\partial r} = \frac{GM}{r^3} \qquad (10)$$

Отметим, что член κ_0^2 должен быть сохранен в уравнении (9), в отличие от всех других не содержащих k членов, ввиду наличия в κ_0^2 большого безразмерного параметра M/m.

Из (9), (10) с $k \lesssim \frac{2\pi}{h}$ находим критерий устойчивости кольца:

$$\frac{M}{m} \gtrsim 4\pi \frac{R}{h} \qquad (11)$$

где R - внешний радиус колец, m - масса колец.

3. В заключение отметим следующие два обстоятельства:

а) Если бы критерий (11) не выполнялся, кольца Сатурна были бы неустойчивы. Этого не наблюдается. Поэтому критерий устойчивости (11) позволяет сделать выбор между различными

экспериментальными оценками /7, 8, 9/ для отношения M/m при известных значениях $R \sim 10^5$ км, $h \sim 10 \div 20$ км, (т.е. $\frac{4\pi R}{h} \sim 10^6$ $\sim 10^5$). Современные данные /6/ $M/m \sim 10^7$ представляются здесь более правдоподобными, нежели данные 1952 г., приведенные в известном справочнике Аллена /6/, $M/m \sim 2.10^4$.

Мы не рассматривали здесь механизмов стабильности колец, обусловленной балансом падения частиц на Сатурн и выбросами вещества из Сатурна. Дело в том, что заметное падение вещества может происходить лишь при неизмеримо меньшей толщине диска, нежели допустимая критерием (11): $C \ln R/h \gtrsim M/m$ (C - число порядка единицы). Ни при каких разумных значениях параметров этот последний критерий не выполняется.

б) Следуя известным гипотезам образования Солнечной системы из плоского газо-пылевого облака /13/, можно воспользоваться формулой (11) для выяснения устойчивости этой системы. Подставляя как современные значения геометрических параметров системы, так и предположительные их значения при образовании из /13/, убеждаемся в том, что неравенство (11) не выполнено на много порядков даже при настоящем отношении M/m (как справедливо отмечается в /13/, отношение M/m со временем может только увеличиваться). Таким образом, газо-пылевой диск, являющийся родоначальником планетной системы, должен быть сильно неустойчив.

Литература

1. Laplace, Memoire sur la theorie de l'ameon de Saturne, Mem. de l'Acad. des Sciences, 1789 (1787). (Mecanique Celeste, кн. 3, p. VI)
2. С.В.Ковалевская. Добавления и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна (в сб.С.В.Ковалевская, Научные работы, Изд.АН СССР, 1948).
3. Maxwell J. C. On the stability of the motion of Saturn's rings. Cambridge, 1859 (The Sci papers, v. 1, pp 287-377)
4. Basset, Amer. Journ. Math., Ma XI, (1888).
5. Dyson, On the Potential of an Anchor-Rings, Phil. Trans. CLXXXIV, 43, 1892.
6. Yabashita S., Monthly Not. of RAS 133, 247 (1966).
7. Yabashita S., Monthly Not of RAS 142, 201 (1969).
8. Russel H. N. etal., Astronomy, part I, 1926.
9. Аллен К.У., Астрофизические величины, Изд.И.Л., М., 1960.
10. Toomre A., Astrophys. Journ., 139, 1217, (1964)
11. Бисноватый-Коган Г.С., Л.Б.Зельдович, Р.З.Сагдеев, А.М.Фридман, ПМТФ, 3, 1969.
12. Бисноватый-Коган Г.С., Я.Б.Зельдович, А.М.Фридман, ДАН СССР, 182, 794, 1968.
13. С.К.Всехсвятский в сб.Проблемы современной космологии под ред. В.А.Амбарцумяна, изд.Наука, М., 1968.